Universidade Federal de Pernambuco

Centro de Informática

Graduação em Ciência da Computação

Matemática Construtiva e o Intuicionismo

TRABALHO DE GRADUAÇÃO

Aluno: Arthur Freitas Ramos

Orientador: Ruy J. Guerra B. De Queiroz

Recife

12 de Setembro de 2013

Resumo

A matemática construtiva é uma forma diferente de interpretar a matemática, rompendo com a tradicional visão platoniana. Entre as várias formas de matemática construtiva que foram desenvolvidas no século XX, este trabalho irá focar na mais famosa e que teve maior influência, o intuicionismo. Neste trabalho, além de uma breve introdução histórica, também será mostrado com maior detalhe o porquê do intuicionismo ser conhecido por ter rompido com a matemática clássica. Além disso, serão mostrados vários conceitos essenciais da lógica intuicionista, a qual foi essencial para o desenvolvimento do construtivismo. Também será apresentado de forma breve um conceito fundamental da escola intuicionista, que é o de sequência de escolhas. As formas de construtivismo posteriores ao intuicionismo também foram de grande importância. Por esse motivo, essas formas não foram desprezadas nesse trabalho, sendo apresentadas de forma breve. A última forma apresentada, a teoria dos tipos, tem uma relação bem direta com a computação, sendo utilizada na prática em diversas aplicações, sendo um exemplo o desenvolvimento de algumas linguagens funcionais.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus. Até agora, venho conseguindo realizar todos os objetivos que aos poucos vou traçando, sendo que seria impossível realizá-los sem a força e a determinação que tenho certeza que Deus me dá todos os dias. Queria não só agradecer, mas como também dedicar esse trabalho aos meus pais. A linguagem humana é pobre para expressar o tamanho do sentimento de admiração e gratidão que eu tenho por eles. Sem o esforço deles, que nunca deixaram faltar nada na minha vida, eu nunca conseguiria chegar até aqui. Quero agradecer a todo o carinho dado a mim por minha avó, Maria Teresa. Tão grande foi esse carinho e tão importante minha avó é para minha vida que a considero minha segunda mãe. Também foi fundamental a forte amizade com minha irmã Amanda, que me ajudou a resolver vários problemas que tive durante o curso. Agradeço aos meus amigos que me acompanharam durante todo o curso. São pessoas com grande talento, comprovado por nosso ótimo desempenho sempre que fazíamos projetos juntos. Além disso, são amigos que criaram um laço de amizade tão forte que é certeza que esse laço irá durar pelo restante da minha vida. São eles: Dalton Santama, Davi Duarte, David Hulak, Hugo Neiva e Tullio José. Faço um agradecimento em especial para Dalton, por poder sempre compartilhar meus problemas, pois só Deus sabe o cansaço e esforço que a gente passou nesses últimos dois anos. Agradeço também a minha namorada, Cássia Farias. Nunca pensei que alguem teria tanta paciência para escutar praticamente todo dia meus avanços diários na escrita desse trabalho. Obrigado também por fazer eu me tornar a pessoa feliz que eu sou hoje. Por fim, queria agradecer ao orientador desse trabalho, o professor Ruy. Não só por ter proposto e orientado um trabalho com um tema tão interessante como o desse, mas por todo o trabalho que ele faz pelo Centro de Informática, oferecendo cadeiras eletivas incríveis, como Lambda Cálculo e Teoria dos Conjuntos.

Muito Obrigado.

Sumário

1. Introdução.....5
2. Contexto Histórico.....8
2.1 Século XIX e início do Século XX.....8
2.2 Pré-Intuicionismo.....10
2.3 Intuicionismo.....10
3. O Intuicionismo.....13
3.1 O Princípio do Terceiro Excluído.....14
3.1.1 A Dupla Negação.....16
3.1.2 O contra-exemplo Brouweriano.....17
3.2 A Lógica Intuicionista.....18
3.2.1 A Interpretação de Brouwer-Heyting-Kolmogorov (Interpretação BHK).....19
3.2.2 Formalização da Lógica Intuicionista.....21
3.2.3 Regras admissíveis e Incompletude do IPC.....23
3.2.4 A Tradução Negativa.....24
3.3 A Aritmética de Heyting.....25
3.4 Sequência de Escolhas.....27
4. O Construtivismo.....30
4.1 O Construtivismo de Bishop.....31
4.1.1 O Princípio da Omnisciência.....33
4.2 Teoria dos Tipos de Martin-Löf.....34
5. Conclusão.....36
5.1 Trabalhos Futuros.....36
Referências Bibliográficas.....38

1. Introdução

Em algum momento, o qual não há registros exatos, o homem pré-histórico criou a noção de contagem. Essa noção provavelmente surgiu da necessidade de contar coisas simples da vida primitiva, como o número de flechas usadas para caçar ou a quantidade de animais caçados. Com a contagem, surgiu a ideia de número, o qual é, então, o elemento mais primitivo da matemática. Com a evolução da linguagem, a matemática também se desenvolveu e então surgiu a aritmética. Essa aritmética era muito simples, limitando-se as operações simples feito a de soma de dois números. Por milhares de anos, a matemática estava limitada à noção de contagem e a essa aritmética muito simples, ou seja, era ainda limitada a apenas trabalhar com números. É nesse contexto que, sendo desenvolvida principalmente pela civilização da Grécia antiga, aparece a geometria euclidiana.

O surgimento da Geometria foi um marco de extrema importância para a matemática. Ora, antes ela estava limitada apenas a trabalhar com números, agora além dos números surgiam as formas geométricas, como triângulos, quadrados, pentágonos, etc. Por isso, agora seria incorreto dizer que a matemática é apenas o estudo dos números. É daí que nasce a ideia de um objeto matemático. Um número é, então, um objeto matemático, assim como uma forma geométrica também é. Dessa forma, por causa da geometria, a matemática passou a ser menos limitada, estudando agora os objetos matemáticos. Com o passar dos séculos, foram surgindo cada vez mais objetos matemáticos e a matemática foi ficando cada vez maior e mais complexa, principalmente no século XIX. Esse século foi marcado por uma criação explosiva de novos conceitos abstratos, principalmente na geometria e na álgebra, ou seja, uma criação de diversos novos objetos. Porém, também nesse século, a medida que esses conceitos eram desenvolvidos, um incômodo crescente surgia em uma boa parte da comunidade matemática, o qual culminava na seguinte pergunta: De onde vem esses objetos matemáticos?

A Grécia antiga também foi marcada por um grande desenvolvimento filosófico. Um desses desenvolvimentos, a teoria das formas proposta por Platão, é particularmente interessante para a matemática. De forma bem resumida, para Platão existiria um mundo composto por formas (ou ideias) que seria abstrato e imutável. O mundo real, que é mutável, seria então uma aproximação imperfeita desse mundo imutável. A partir dessa ideia que surgiu uma das filosofias da matemática mais bem aceitas no século XIX e que ainda é aceita por boa parte da comunidade matemática atual, o platonismo.

O platonismo procura responder a pergunta lançada anteriormente. Para essa filosofia, existe um mundo abstrato e imutável que contém todos os elementos matemáticos. O papel do matemático não é, então, construir novos objetos matemáticos, mas sim limitar-se a encontrar algum objeto que ainda não foi descoberto desse mundo. Ou seja, todos os objetos matemáticos já existem, mas nem todos já foram descobertos.

Por outro lado, tinha uma parte da comunidade matemática que não aceitava as ideias do platonismo. Para eles, um objeto matemático existiria a partir do momento em que o matemático conseguisse construí-lo na mente dele. Essa forma de pensar recebeu o nome intuitivo de construtivismo. Portanto, agora se tinha duas formas antagônicas de se pensar. Com o desenvolvimento do construtivismo, surgiram várias escolas que compartilhavam essas ideias construtivas. Entre elas, está a mais bem conhecida, o intuicionismo, a qual será o foco desse trabalho.

Esse trabalho não terá como objetivo fazer um grande aprofundamento dos conceitos do construtivismo e do intuicionismo, mas sim promover uma visão geral e expor vários dos principais conceitos, focando principalmente no intuicionismo. Nos parágrafos seguintes, será exposto o objetivo de cada capítulo.

O segundo capítulo é um capítulo breve que falará sobre o contexto histórico em que é inserido o construtivismo e o intuicionismo. O objetivo desse capítulo é aprofundar um pouco mais a discussão histórica iniciada nessa introdução, focando mais nos acontecimentos do século XIX e do início do século XX que culminaram no intuicionismo.

O terceiro capítulo é o capítulo principal desse trabalho. Nele, serão introduzidos conceitos muito importantes da escola intuicionista, como a refutação do princípio do terceiro excluído. Será dado também vários detalhes da lógica intuicionista, incluindo a importante interpretação que é dada para os conectivos lógicos nessa nova lógica. Para finalizar o capítulo, são mostrados alguns conceitos clássicos do intuicionismo que se distanciam um pouco mais dos conceitos lógicos.

O quarto e último capítulo do desenvolvimento desse trabalho será focado nos construtivismos pós-intuicionismo. O capítulo será também bastante breve e terá como foco principal o construtivismo de Ernett Bishop. Também será feita uma introdução curta para a teoria dos tipos de Martin-Löf. Nessa parte de teoria dos tipos, também são mostradas algumas relações diretas que o construtivismo tem com a computação.

Por fim, o conteúdo desse trabalho foi baseado nos artigos de vários matemáticos de

comprovado talento e renome. Inclui artigos do próprio pai do Intuicionismo, Brouwer, e de um dos estudantes dele, Heyting. Também inclui os trabalhos de Intuicionistas de renome, como Michael Dummett, Dirk van Dalen e A. Troelstra.

2. Contexto Histórico

O início do século XX foi marcado na matemática por uma forte produção acadêmica nas áreas de fundamentos e filosofia da matemática. O fato que demonstra esse interesse é que, em um intervalo menor que 30 anos, surgiram três escolas que romperam com o pensamento platoniano, o qual era o mais aceito na época. A primeira foi o logicismo, em 1884, criada pelo matemático alemão Gottlob Frege(1848-1925). Em 1907, surge o intuicionismo, criada pelo matemático holandês L. E. J. Brouwer(1881-1966). Por último, veio o formalismo, criado pelo matemático alemão David Hilbert(1862-1943) em 1910. Essas três escolas tentam, cada uma ao seu modo, estabelecer uma fundação firme para a matemática. As formas de pensar antagônicas dessas escolas acabaram culminando na famosa "crise dos fundamentos", na década de 1920[1]. Esse capítulo tem como objetivo entender o contexto histórico que culminou no surgimento dessas escolas no final do século XIX e início do século XX.

2.1 Século XIX e Início do Século XX

O século XIX foi marcado pelo aumento gradual da abstração da Matemática. Um ótimo exemplo é a geometria. Até o inicio século XIX, a única forma de geometria era a euclidiana, a qual a partir de um conjunto de axiomas, procurava descrever as formas geométricas do mundo concreto. Ou seja, a geometria estava intimamente ligada ao mundo visível. Porém, em 1832 surge a geometria hiperbólica e, em 1851, a geometria elíptica, ambas não-euclidianas. A partir daí, a matemática começa a considerar válido o estudo de qualquer forma de geometria, mesmo que esta modelasse um mundo abstrato. De forma paralela a esses desenvolvimentos na geometria, surgiram também novos conceitos abstratos na álgebra, como o conceito de corpo numérico e o de grupos. Outro avanço essencial deste século foi o aumento de rigor da análise. Nessa área, apesar da rica pesquisa, ainda existiam conceitos mal definidos, os quais ainda faltavam o rigor matemático, como o de infinitesimal. Porém, devido ao trabalho de diversos matemáticos, como Bolzano, Cauchy, Riemann, Weierstrass, as noções de limites, derivadas e integrais conseguiram eliminar esse conceito, passando a ser escritas como sentenças envolvendo apenas quantificadores e números reais[2].

A forma matemática mais abstrata de pensar que surgiu devido aos avanços descritos anteriormente é geralmente chamada de forma moderna do pensamento matemático[2]. Antes

desses avanços, a produção matemática era baseada em computações e construções. Um exemplo era a álgebra, que era baseada em achar processos algorítimicos para resolver equações. Com o aumento da abstração, a matemática foi se distanciando dessa prática algorítmica[2]. Com isso, não era mais necessário construir uma entidade a partir de um conjunto de computações para provar a existência dela. Assim, provas não-construtivas passaram a ser utilizadas de forma frequente.

Antes mesmo do surgimento de filosofias construtivas de pensamento matemático, tal qual o intuicionismo, provar um resultado de forma não construtiva já causava controvérsias ainda no século XIX. Foi citado anteriormente o aumento de rigor da análise, o qual resolveu o problema com os termos mal definidos, como o de infinitesimal. Entretanto, ao formular as sentenças da análise com base nos números reais, surgiu o problema que a própria definição de um numero real não era bem definida. A resposta veio com a construção dos reais a partir dos racionais através dos chamados "cortes de Dedekind", método criado pelo matemático alemão Richard Dedekind, publicado em 1872. A controvérsia surge no fato de que essa construção não foi aceita por todos os matemáticos da época. Um desses foi o também alemão Leopold Kronecker[1], que não aceitava a construção de Dedekind devido ao fato de que se utiliza de conjuntos infinitos de cortes, sendo uma prova não-construtiva. Kronecker chegou também a criticar o teorema de Bolzano-Weierstrass[1], já que este é dependente do fato que os reais são completos, o que também ficaria dependente da construção não aceita por ele dos reais.

Ainda no século XIX, em 1884, Frege funda o logicismo. Essa escola tenta estabelecer a base da matemática através da lógica, defendendo que toda a matemática poderia ser derivada a partir da lógica, ou seja, a matemática seria na verdade uma lógica disfarçada. Para exemplificar isso, Frege conseguiu a partir de uma lógica de segunda ordem derivar a aritmética de Peano também de segunda ordem. Para isso, Frege utilizou-se de um princípio que essencialmente dizia que para qualquer propriedade de uma entidade matemática, existe uma classe de entidades que possuem essa propriedade[3]. Desde a criação até 1902, o logicismo sofreu grande expansão e já era adotado por parte considerável da comunidade matemática da época.

Em 1902, o logicismo sofre um grande golpe com a descoberta do paradoxo de Russell. Utilizando o princípio criado anteriormente por Frege, Russell pensou na seguinte classe de entidades: $R = \{x|\ \ x \notin x\ \ \}$, ou seja, R é o conjunto de todos os conjuntos que não são membros deles próprios. Se R não é membro dele mesmo, então, pela própria definição de R, ele teria que conter ele mesmo. R também não pode ser membro dele mesmo, pois entraria

em contradição com sua própria definição. Por isso, a existência de *R* é um paradoxo. Como *R* foi criado a partir do princípio utilizado por Frege, este não pode estar correto. O próprio Russell tentou resolver esse problema, criando uma teoria para definir quando uma entidade matemática pode definir classes. Entretanto, a partir dessa nova teoria, Russell não conseguiu derivar os princípios básicos da aritmética sem ter que apelar para princípios da matemática, e não da lógica[3].

2.2 Pré-Intuicionismo

Um pequeno grupo de matemáticos não eram adeptos as ideias do logicismo no final do século XIX. Esse grupo, liderados por Poincaré, Borel e Lebesgue, formaram a escola pré-intuicionista[4]. Essa escola não aceitava que os números naturais, o princípio da indução completa e qualquer entidade construída a partir deles fossem geradas puramente da lógica e da linguagem. Apesar desse pensamento romper com o logicismo nesses pontos, os pré-intuicionistas não foram muito além. Por exemplo, no caso dos reais, essa escola não chegou a tentar procurar uma origem que fosse independente da lógica e da linguagem, como fizeram para os números naturais[4]. Além disso, ao contrário do que se verá no intuicionismo, grande parte dos pré-intuicionistas não chegavam a rejeitar o terceiro excluído, fato criticado por Brouwer. Entretanto, esse não foi o caso do matemático Leopold Kronecker, o qual também pode ser considerado um pré-Intuicionista. Kronecker não compartilhava da mesma visão que os outros adeptos dessa escola tinham sobre os números naturais, chegando a dizer a seguinte frase: *"Deus criou os números naturais; Todo o restante é resultado do trabalho do homem"*. Mesmo assim, Kronecker ainda é considerado um pré-Intuicionista, pois não aceitava provas não construtivas, como a construção dos reais feita por Dedekind. Dessa forma, ele já criticava a lei do terceiro excluído antes mesmo dos trabalhos de Brouwer.

2.3 Intuicionismo

O intuicionismo nasceu em 1907, com a tese de doutorado com título *"On The Foundations of Mathematics"*, escrita pelo matemático holandês L. E. J. Brouwer. O logicismo procurou achar uma base para a matemática através da lógica, se utilizando da forma clássica de pensar (ou seja, a forma utilizada durante o século XIX). Por sua vez, o intuicionismo tinha uma ideia bem contrária a essa forma de pensar, pois rejeitava que a matemática era um produto derivado da lógica. Para Brouwer, os princípios básicos da matemática (os axiomas) eram resultado da intuição, daí saiu o nome pelo qual a escola é

conhecida. Além disso, os objetos da matemática só podem existir quando são criados a partir da produção da mente humana, rejeitando, então, a visão platonista. Com base nessa visão, Brouwer considerava a matemática independente até mesmo da linguagem. Essa filosofia também criticava fortemente a matemática clássica, não aceitando provas que não fossem construtivas, ou seja, é uma filosofia construtiva. Esses primeiros trabalhos com ênfase nos fundamentos da matemática ficaram conhecidos como o "primeiro ato" do intuicionismo[1].

Seguindo adiante na cronologia, Brouwer publica em 1908 o artigo com título *"The unreliability of the logical principles"*. É nesse artigo que surge um dos fatos pelo qual o intuicionismo é mais conhecido, que é a rejeição da lei(ou princípio) do terceiro excluído. Essa é uma lei da lógica que diz que para qualquer sentença *P,* é válido *P* ou $\neg P$. Na lógica clássica, esse princípio é sempre válido, mesmo para problemas que não sabemos se é verdadeiro ou não. Por exemplo, aceitando esse princípio, pode-se garantir que a conjectura de Goldbach é válida ou não é válida, mesmo sem ter uma prova que a demonstre ou uma prova que mostre que ela não pode ser demonstrada. Brouwer argumentou que esse princípio era abstraído da forma com que os subconjuntos de um conjunto finito eram trabalhados, mas que era incorreto estender esse princípio para conjuntos infinitos[1]. Mais detalhe sobre esse princípio será discutido no próximo capítulo. Por agora, é importante notar que a rejeição desse princípio foi uma grande crítica à matemática clássica, pois, naquela época, diversos teoremas importantes tinham sido provados o utilizando como um argumento essencial.

Em 1918, Brouwer passa a desenvolver uma teoria dos conjuntos que é independente da Lei do Terceiro Excluído, rompendo com as teorias mais aceitas até então, a de Cantor e de Zermelo. Esse trabalho no desenvolvimento de uma teoria intuicionista dos conjuntos é chamado de "segundo ato" do intuicionismo[1]. Como foi visto anteriormente, foi possível construir os reais a partir dos racionais utilizando a teoria dos conjuntos de Cantor a partir do método criado por Dedekind, mas essa construção não é aceita pelo intuicionismo, já que é não-construtiva. Além disso, o próprio axioma da escolha não é aceito do ponto de vista do construtivismo, pois apenas impõe a existência de uma escolha, mas não explicita qual é essa escolha. O maior problema surge do fato de que a análise clássica é muito dependente tanto da construção dos reais como do axioma da escolha. Por isso, foi rejeitada pelo intuicionismo e, então, desenvolver uma teoria intuicionista dos conjuntos foi a forma encontrada por Brouwer para resolver esse problema. Um pouco mais de detalhe sobre essa teoria e como ela chega nos reais de forma construtiva será discutido no próximo capítulo.

Com o desenvolvimento da nova teoria intuicionista dos conjuntos, a comunidade matemática ficou dividida durante a década de 20. De um lado, os defensores da matemática

clássica, liderados por Hilbert e de outro os críticos, liderados por Brouwer. Por serem dois personagens com personalidades bastante fortes, essa forma contrária de pensar acabou criando disputas pessoais entre os dois. Esse conflito culminou em 1928, quando Brouwer foi removido do quadro de editores do jornal *Mathematische Annalen,* o qual era o jornal matemático mais importante da época e tinha Hilbert como editor principal. Devido a esse acontecimento, Brouwer passou alguns anos sem publicar nenhum artigo. Por isso, a crise foi aos poucos sendo deixada de lado[1].

Foi dito que problemas que surgiram na análise clássica serviram de incentivo para a criação de uma análise intuicionista. Entretanto, à medida que ia se desenvolvendo, ficou evidente que esse novo tipo de análise era extremamente complexa, tornando-se inviável. Com relação a isso, Brouwer comenta: *"As esferas da verdade são menos transparentes que as da ilusão"*, mostrando que esse fato não o preocupava[1]. Porém, ficou claro que isso impactou diretamente o intuicionismo, pois levou grande parte da comunidade matemática da época a perder o interesse nele. Com o grande aumento das pesquisas na área da computação, surgiu novamente o interesse na área intuicionista. Isso é explicado pelo fato que a computação resolve os problemas de forma algorítmica, ou seja, é de natureza construtiva. Dessa forma, surgiram várias técnicas e novas teorias baseadas no intuicionismo que possuem aplicações teóricas e práticas para a computação. Um bom exemplo é a teoria intuicionista dos tipos, criada por Martin-Löf em 1971, que além de ter forte importância teórica, ainda é utilizada de forma prática em programas feitos para auxiliar a prova de teoremas e no desenvolvimento de algumas linguagens funcionais.

3. O Intuicionismo

Na matemática, existem proposições que já são, a princípio, consideradas verdadeiras, as quais são chamadas de axiomas. Excluindo os axiomas, qualquer outra proposição matemática precisa ser provada para ser considerada verdadeira. Dessa forma, um argumento matemático que demonstra de forma rigorosa que determinada proposição é verdadeira é chamado de prova. Porém, nem todas as formas de provas são aceitas por todos os matemáticos, sendo esse o caso dos intuicionistas. Um ponto fundamental do intuicionismo é que é uma escola não-clássica, ou seja, a única forma de prova aceita é a prova construtiva. Dado uma proposição, esse tipo de prova procura apresentar um exemplo que mostre que a proposição é verdadeira ou pode, ainda, fornecer um algoritmo que construa tal exemplo[5]. Vale ressaltar que, por essa definição, a matemática construtiva é independente do próprio intuicionismo, sendo encontrados diversos exemplos de provas construtivas na matemática clássica.

Um ótimo exemplo de uma prova não-construtiva é a prova de que existem números irracionais a e b tal que a^b seja um número racional: Considere o número $\sqrt{2},$ o qual é irracional. Logo, $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ ou é racional, ou é irracional. Se for racional, a prova está concluída. Se não for, $((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ é igual a 2, que é racional. Como esse caso considera que $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ é irracional, então a prova também está concluída. Dessa forma, em qualquer caso, existe um número a^b racional com a e b irracionais. Como pode-se notar, esse exemplo mostra que algum dos dois casos resolve o problema, mas não permite saber qual deles é o que resolve[6]. Ou seja, não foi possível apresentar um exemplo para a proposição.

Uma prova construtiva para a proposição anterior poderia ser a seguinte: Considere os seguintes números $\sqrt{2}$ e $\log_{\sqrt{2}}3$, os quais são irracionais (Em um argumento rigoroso, seria necessário provar essa afirmação, mas para evitar o alongamento desse exemplo, essas provas serão omitidas). O número $(\sqrt{2})^{(\log_{\sqrt{2}}3)}$ é igual a 3, que é um número racional. Nessa prova, é dado explicitamente um exemplo em que a^b é racional, com a e b irracionais, logo se caracteriza como uma prova construtiva.

O ponto comum das provas não-construtivas é que elas se baseiam na validade de um princípio da lógica chamado de princípio do terceiro excluído. Um dos pontos iniciais e de mais importância para o intuicionismo foi a não aceitação da validade desse princípio. Esse é

um dos pontos mais importantes na diferenciação da lógica intuicionista da lógica clássica. O princípio, sua refutação e as implicações disso serão melhor discutidos no tópico a seguir.

3.1 O Princípio do Terceiro Excluído

O princípio (ou lei) do terceiro excluído é um princípio da lógica que diz que para qualquer proposição *P*, é válido *P* ou $\neg P$. Para os matemáticos clássicos, esse princípio é sempre válido, independente da natureza da proposição *P*. Por outro lado, Brouwer refutou esse princípio, afirmando que era válido apenas para conjuntos finitos e os subconjuntos destes, não podendo ser expandido para os conjuntos infinitos.

Para ilustrar o argumento defendido por Brouwer, suponha que *P* seja a proposição que todo elemento de um conjunto *S* que possui uma propriedade *E*. Logo, $\neg P$ significa que pelo menos um elemento de S possui a propriedade $\neg E$. Além disso, para qualquer elemento que pertença a S, suponha que sempre é possível decidir se esse elemento possui a propriedade E ou $\neg E$. Caso *S* seja finito, fica fácil mostrar que a lei é válida. Para isso, basta percorrer cada elemento de *S*. Como é possível decidir para cada elemento se *E* ou $\neg E$, então ao percorrer *S* se algum elemento possuir a propriedade $\neg E$, implicará que $\neg P$ é verdade. Caso contrário, todos os elementos terão a propriedade *E*, logo, *P* será verdade. Entretanto, ao tentar esse mesmo processo para o caso que *S* seja infinito, pode ser que ao percorrer *S*, todo elemento até o ponto percorrido tenha a propriedade *E*, porém como *S* é infinito, não é possível garantir que, ao continuar o processo, não será encontrado um elemento que possua a propriedade $\neg E$.

Se não existisse nenhum problema em aberto na matemática, a lei do terceiro excluído seria válida mesmo para o caso de *S* infinito mencionado anteriormente. Ora, caso $\neg P$, seria possível mostrar um elemento de *S* com propriedade $\neg E$. Caso *P*, seria possível demonstrar de forma genérica que a existência de um elemento de *S* com propriedade $\neg E$ resultaria em uma contradição. Porém, existem problemas em aberto na matemática, basta pensar na conjectura de Goldbach. Nessa conjectura, *S* seria o conjunto dos números pares maiores que 2 e *E* seria a propriedade que o número pode ser escrito como a soma de dois primos. Por mais que se caminhe nos elementos de *S*, até agora não foi encontrado nenhum elemento com propriedade $\neg E$. Como *S* é infinito, também não é possível garantir que todo elemento tem propriedade *E*, pois pode ser que só não se achou um elemento com propriedade $\neg E$ porque S ainda não foi suficientemente percorrido. Logo, não dá para garantir nem que

P ou que $\neg P$ seja verdadeiro. Por isso, o princípio do terceiro excluído não pode ser aplicada para conjuntos infinitos enquanto houver problemas em aberto na matemática[7].

Grande parte dos resultados obtidos na matemática clássica é dependente da validade desse princípio. Em sua crítica, Brouwer demonstrou isso, ao refutar uma das leis básicas dos reais (e de qualquer corpo ordenado), a lei da tricotomia. Ele mostrou um exemplo, o qual será melhor detalhado a seguir, que deixava claro que o funcionamento dessa lei dependia do funcionamento do terceiro excluído em conjuntos infinitos. A tricotomia nos reais diz que, qualquer que seja o x real, x é positivo, negativo ou zero. Brouwer criou um contra-exemplo, ou seja, mostrou um número real que não é nem positivo, nem negativo e nem zero[8].

O exemplo utilizado originalmente envolve o número *pi*, mas qualquer número irracional poderia ter sido utilizado. Para o número *pi*, existem processos algorítmicos para calcular o número com uma precisão de tantas casas decimais quanto se queira. Além disso, até hoje não foi encontrado algum padrão nos números que aparecem nessa expansão decimal de *pi*, ou seja, qualquer propriedade que pode ser notada nessa expansão é, a princípio, acidental[8]. Com base nisso, pode-se pensar na propriedade em que aparecem 100 zeros consecutivos na expansão de *pi*. O único método atual para tentar verificar essa propriedade é tentar expandir o número *pi* até que a propriedade apareça. Até onde *pi* já foi expandido, foi verificado que essa propriedade ainda não acontece[8]. Dessa forma, ainda não se tem uma forma de demonstrar que a propriedade é verdadeira ou não.

Para continuar o exemplo, é agora necessário definir um novo número, o *pi-hat*. A princípio, o *pi-hat* será exatamente igual a *pi*, mas com a seguinte particularidade: Caso ao expandir *pi-hat* seja encontrado uma sequência de 100 zeros consecutivos, então a expansão irá terminar. Como a sequência foi encontrada, ela tem que ter começado em alguma *n-ésima* posição. Com base nisso, se n for ímpar, defina *pi-hat* como terminando nessa posição n. Caso n seja par, coloque o número 1 na posição $n+1$ e defina *pi-hat* como terminando na posição $n+1$. Apesar da definição de *pi-hat* depender de uma propriedade que ainda não é sabido se é verdade, a definição é perfeitamente aceitável. Se a propriedade for falsa, *pi-hat* é exatamente igual a *pi*. Se a propriedade é verdadeira e a sequência de *0s* começa em uma posição par, então *pi-hat* é maior que *pi*, caso contrário, é menor[8].

O ponto final do exemplo de Brower é pensar na diferença $D = pi - pi\text{-}hat$. Pela Lei da Tricotomia, como D é um número real, então ou $D > 0$, ou $D < 0$ ou $D = 0$. Porém, para saber em qual caso da lei da tricotomia D se enquadra, é necessário calcular *pi-hat*. Entretanto, por

mais que seja feita a expansão de *pi*, pode ser que ainda não se encontre 100 zeros consecutivos, sendo necessário expandir ainda mais. Ora, enquanto não for possível decidir o valor de *pi-hat*, será impossível determinar o valor de *D*, logo, não é possível dizer se *D* é negativo, positivo, ou 0. Por isso, Brouwer concluiu que enquanto não for determinado, *D* não cai em nenhum dos 3 casos, refutando, então, a lei da tricotomia[8]. Com esse exemplo, Brouwer deixou claro que a lei da tricotomia depende do princípio do terceiro excluído. Mostrar a dependência dessa lei foi um fato de extrema importância, pois refutar a tricotomia é equivalente a refutar a forma como que os reais são entendidos na matemática clássica. Como grande parte da matemática depende dos reais, Brouwer estava refutando praticamente toda a matemática clássica com esse exemplo relativamente simples.

3.1.1 A Dupla Negação

A dupla negação é um princípio da lógica que diz que uma proposição *P* é equivalente a $\neg\neg P$. Em outras palavras, isso quer dizer que provar a impossibilidade da impossibilidade de uma proposição é equivalente a provar a proposição. Na lógica clássica, a dupla negação é sempre válida e a partir dela, é possível chegar no princípio do terceiro excluído. Ora, se o intuicionismo rejeita tal princípio, seria intuitivo pensar que a dupla negação também não deveria ser válida. Realmente, é possível mostrar exemplos que demonstram que, do ponto de vista construtivo, a dupla negação não é válida.

Um desses exemplos, assim como o exemplo de Brouwer para refutar o terceiro excluído, também envolve o número pi e propriedades de sua expansão. Para esse caso, suponha que queremos mostrar que uma propriedade *P,* que diz que um número *sigma* é racional, não é equivalente a mostrar que não é verdade que *sigma* não é racional, ou seja, $\neg\neg P$. Assim como a propriedade de possuir 100 zeros consecutivos, não é sabido se existe uma sequência na expansão de pi em que aparece 0123456789 (Isso não é inteiramente verdade, pois foi recentemente descoberto que essa sequência realmente acontece no número *pi*. Entretanto, considere para esse exemplo que, assim como na época dos artigos de Brouwer, ainda não era sabido se essa sequência aparecia). Pode-se definir um número $\sigma = \frac{1}{3}$, caso nunca apareça a sequência. Se a sequência aparecer, defina $\sigma = \frac{(10^k - 1)}{3.10^k}$, onde k é a posição da casa decimal em que o 9 aparece na sequência[9].

A partir disso, pode-se tentar supor que *sigma* não é racional. Ora, se sigma não é

racional, então $\sigma = \frac{(10^k - 1)}{3.10^k}$ não poderia ser válido e nenhuma sequência 0123456789 poderia aparecer em pi. Contudo, nesse caso $\sigma = \frac{1}{3}$, o que também seria inválido, já que $\frac{1}{3}$ é racional[9]. Logo, qualquer caso leva a uma contradição, sendo válido, então, que não pode ser verdade que *sigma* não é racional, ou seja, $\neg\neg P$. Apesar disso, para mostrar *P* do ponto de vista intuicionista, é necessário construir um número racional $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros primos entre si, tal que $\sigma = \frac{p}{q}$. Como não tem como saber se a sequência 0123456789 aparece em *pi*, não tem como ser decidido o valor de σ. Dessa forma, não é possível determinar os valores de *p* e *q*, implicando que *P* não pode ser mostrado de forma construtiva.

3.1.2 O Contra-exemplo Brouweriano

Foi visto que o princípio da tricotomia nos reais, apesar de ser aceito na matemática clássica, não é um princípio construtivo, não sendo aceito pelos intuicionistas. Apesar disso, suponha que esse princípio seja válido do ponto de vista do intuicionismo. Se é válido, então seria possível classificar $D = pi - pi\text{-}hat$ como $D > 0$, $D = 0$ *ou* $D < 0$. A única forma construtiva de fazer isso é sabendo o valor numérico de *D*. Para saber esse valor, é preciso ter o valor de *pi-hat*. Entretanto, para conhecer o valor de *pi-hat*, é necessário saber se na expansão de *pi* aparece alguma sequência de 100 zeros consecutivos. Como foi dito anteriormente, ainda não é sabido se isso acontece, ou seja, é um problema em aberto. Com isso, do ponto de vista construtivo, supor a veracidade da tricotomia é equivalente a se ter uma solução para o problema dos zeros consecutivos de *pi*, logo, o princípio não pode ser verdadeiro, sendo não-construtivo.

Para mostrar um contra-exemplo na matemática, é preciso mostrar que uma determinada proposição *P* acaba permitindo inferir alguma outra proposição *Q,* a qual é conhecidamente falsa[10]. O exemplo anterior não cai nessa definição de contra-exemplo, pois a partir de uma proposição *P* (o princípio da tricotomia) foi possível decidir se *Q* era verdadeiro ou falso (*Q* é a proposição a cerca dos zeros consecutivos de *pi*), sendo que *Q* ainda está em aberto na matemática. Mesmo assim, esse caso ainda pode ser considerado

como uma forma de contra-exemplo, pois a conclusão foi que *P* não pode ser verdadeiro. Esse novo tipo de contra-exemplo é chamado de Brouweriano e também é conhecido como contra-exemplo fraco.

Em sua crítica ao terceiro excluído, Brouwer não só atacou o princípio mas também atacou grande quantidade de proposições que eram consideradas verdadeiras pela matemática clássica. A forma padrão de mostrar que essas proposições são não-construtivas é mostrar um contra-exemplo Brouweriano. O contra-exemplo é que, a partir da suposição que a proposição é verdadeira, é possível resolver ou criar um algoritmo que resolvesse algum problema ainda em aberto na matemática[10]. Além de contra-exemplos envolvendo o número *pi*, Brouwer também se utilizava de problemas famosos, como o último teorema de Fermat[10], o qual ainda estava em aberto na data de publicação de seus artigos (esse teorema só foi provado em 1995).

Com o desenvolvimento da matemática construtiva após os trabalhos de Brouwer, a forma de mostrar o não-construtivismo da matemática através de contra-exemplos foi melhor refinada e novas técnicas e conceitos foram introduzidos, principalmente com o trabalho de Errett Bishop. Esses detalhes, porém, ficarão para o tópico sobre o construtivismo de Bishop no próximo capítulo.

3.2 A Lógica Intuicionista

Nos tópicos anteriores, foi mostrado o porquê do princípio do terceiro excluído não ser aceito pelo intuicionismo, apesar de ser válido na lógica clássica. Embora essa seja uma diferença de grande relevância, a lógica intuicionista não se resume à lógica clássica sem esse princípio. Prova disso é que, como será visto com mais detalhes no tópico a seguir, a própria forma de interpretar o significado das constantes lógicas são diferentes entre essas duas lógicas.

Assim como na lógica clássica, a intuicionista pode utilizar quantificadores. Ou seja, pode ser dividida em lógica intuicionista proposicional (sem quantificadores), a qual é abreviada na literatura como **IPC**, e lógica intuicionista de predicados (com quantificadores). Também de forma semelhante, a lógica intuicionista de predicados pode ser de primeira-ordem ou de ordens maiores. Quando é utilizada na forma de primeira-ordem, a sigla utilizada para representar essa lógica é **IQC.**

3.2.1 A Interpretação de Brouwer-Heyting-Kolmogorov (Interpretação BHK)

É a interpretação do significado das contantes lógicas dada pelo intuicionismo. Foi desenvolvida primeiro por L. E. J. Brouwer e Arend Heyting, sendo desenvolvida posteriormente de forma independente por Andrey Kolmogorov. Por ser uma lógica construtiva, a interpretação é centrada no conceito de construção. Dado uma proposição *P*, *P* ser verdadeiro é interpretado como ter uma prova construtiva para *P*. Por sua vez, ter uma prova para *P* significa ter uma construção p que estabelece *P*[11]. Nesse caso, será utilizada a notação $p : P$. Por isso, o objetivo da interpretação BHK é que, dado uma fórmula, seja possível estabelecer exatamente o que significa provar essa fórmula. A seguir, para cada constante lógica, segue a sua respectiva interpretação:

- $P \wedge Q$: É qualquer coisa que seja uma prova de *P* e uma prova de *Q*. Ou seja, é um par *(p,q)*, tal que $p : P$ e $q : Q$;
- $P \vee Q$: É qualquer coisa que seja uma prova de *P* ou uma prova de *Q*. De forma mais formal, é um par *(p,q)*, tal que *p* tem como função carregar uma informação, que pode ser 0 ou 1. Se *p* for 0, então $q : P$. Se *p* for 1, então $q : Q$. Na Lógica Clássica, a disjunção não indica qual das duas proposições é válida, indica apenas que uma das duas o é. Porém, isso não acontece na Lógica Intuicionista, pois a informação que está em *p* especifica quem está sendo construído[11];
- $P \rightarrow Q$: De forma intuitiva, uma prova de *P* implicaria em uma prova de *Q* se assim que fosse construída qualquer prova de *P*, fosse obtida uma prova de *Q*. Formalmente, temos que p : $P \rightarrow Q$ se p transforma cada prova de $q : P$ em uma prova $p(q) : Q$ [11]. Ou seja, *p* é uma função que converte uma prova de *P* em uma prova de *Q*;
- $\neg P$: É uma função *p* que transforma uma prova $p : P$ em uma prova de um absurdo. Em outras palavras, $\neg P$ é $P \rightarrow \perp$, Por absurdo, pode-se entender como qualquer proposição que é absurda, como por exemplo, 0 = 1. Por isso, pode ser dito que $\neg P$ é $P \rightarrow 0 = 1$;
- $p : \perp$ é sempre falso. Em outras palavras, não a nenhuma construção para o absurdo.

À primeira vista, a representação de $P \rightarrow \bot$ como $P \rightarrow 0 = 1$ pode parecer estranha. Nessa equivalência, parece que o absurdo está sendo reduzido para apenas uma única proposição. Ora, se assim fosse, qualquer outra proposição absurda, como, por exemplo, 0 = 2, deixaria de representar o absurdo. A coerência para essa equivalência vem do fato que, a partir de 0 = 1, qualquer proposição da aritmética pode ser provada. Isso é mostrado de forma simples, através da seguinte prova por indução: 0 = 0 e 0 = 1. Suponha como hipótese da indução que se 0 = *n,* então 1 = *n* + 1. Como 0 = 1 e 1 = *n* + 1, então 0 = *n* + 1. Dessa forma, por indução, 0 é igual a qualquer número natural. Com isso, assumindo 0 = 1, é possível ter uma prova para qualquer igualdade na aritmética. Com uma prova para qualquer igualdade, obtém-se uma prova para qualquer proposição da aritmética. Assim, é possível concluir que é válido representar o absurdo como 0 = 1.

Considerando apenas a lógica proposicional, a interpretação estaria completa. Entretanto, a interpretação BHK não se limitou apenas às constantes da lógica proposicional, sendo incluída interpretações tanto para o quantificador existencial como para o universal. Como esses quantificadores só fazem sentido quando estão se referindo a algum domínio de objetos matemáticos, as próximas duas interpretações serão consideradas para um domínio S qualquer:

- $\exists x P(x)$: No existe, basta pegar alguma instância $x' \in S$ e fazer uma construção *x'' : P(x')*. Assim, a prova pode ser considerado um par *(x', x'')*, em que x' é uma instância e *x'' : P(x')* é a prova dessa instância[11];
- $\forall x P(x)$: É uma função *p* que, para cada elemento $x' \in S$, *p(x') : P(x')*[11].

Com isso, toda constante lógica da **IQC** tem agora significado bem definido. Como uma proposição complexa *P* é uma composição de outras proposições juntamente com essas constantes, é sempre possível utilizar a interpretação BHK para interpretar o significado de *P.*

A seguir, é mostrada uma tabela que coloca de forma resumida a interpretação de cada constante:

Fórmula	**Interpretação**
$P \wedge Q$	*(p,q)*, com *p : P* e *q : Q*
$P \vee Q$	*(p,q).* Se *p* = 0, então *q : P.* Se *p* = 1, então *q : Q*
$P \rightarrow q$	Para todo p : $P \rightarrow Q$, *p(q) : P,* sendo *q : Q*
$\neg P$	Para todo *p : P*, *a(p) :* $\bot$
$\bot$	Sempre falso

$\exists x P(x)$	*(x,x''), x'' : P(x'),* $x' \in S$ (*S* é um domínio qualquer)
$\forall x P(x)$	*p(x') : P(x'),* para todo $x' \in S$ (*S* é um domínio qualquer)

Para ilustrar a utilização da interpretação BHK na prática, segue-se algumas proposições que são válidas na lógica clássica, mas não na intuicionista:

- $\neg P \vee Q \equiv P \rightarrow Q$: Na lógica clássica, para que $P \rightarrow Q$ seja válido, basta que *P* seja falso ou que *Q* seja verdadeiro. Por isso, pela interpretação da disjunção clássica, $P \rightarrow Q$ seria equivalente a $\neg P \vee Q$. Para entender o porquê disso não ser válido na interpretação BHK, será utilizado o exemplo dos 100 zeros consecutivos do *pi*. Considere que P = "aparecem 100 zeros consecutivos no número pi" e Q = "aparecem 99 zeros consecutivos no número *pi*". Ora, possuindo uma prova para *P*, é óbvio que também tem uma prova para *Q,* portanto $P \rightarrow Q$. Contudo, ao analisar a disjunção $\neg P \vee Q$, a interpretação intuicionista não garante que essa fórmula sempre seja verdadeira, pois ainda não se sabe provar que aparecem 99 zeros consecutivos nem que não aparecem 100 zeros consecutivos. Portanto, $\neg P \vee Q$ não é equivalente a $P \rightarrow Q$.
- $\neg\neg P \rightarrow P$: A dupla negação, um dos resultados clássicos que foi discutido anteriormente. Nesse tópico, o objetivo é mostrar que a não validade desse resultado é coerente com a interpretação BHK. De $p : \neg\neg P$, conclui-se que não tem como provar $P \rightarrow \perp$[11]. Para provar que esse resultado é válido, seria necessário ter uma prova para *P.* Como a única conclusão que se tem é a dita anteriormente, então não é possível chegar nessa prova de *P.* Dessa forma, $\neg\neg P \rightarrow P$ não é válido.
- $P \vee \neg P$: A refutação do princípio do terceiro excluído é uma das bases do intuicionismo. Dessa forma, o único resultado aceitável seria esse princípio ser incoerente sob o ponto de vista da interpretação BHK. Por essa interpretação, $P \vee \neg P$ é um par (*p,q*), com p = 0 ou p = 1. Entretanto, como nem sempre se tem uma prova para *P* ou para $\neg P$, então o valor de *p* nem sempre pode ser computado[11]. Dessa forma, não há prova para $P \vee \neg P$.

3.2.2 Formalização da Lógica Intuicionista

Com o desenvolvimento e grande aumento de interesse pela logica intuicionista, cada

vez mais foi sendo sentida a necessidade de definir formalmente essa lógica. A forma procurada para essa formalização foi o "sistema de Hilbert". De forma resumida, são sistemas em que as fórmulas são deduzidas através de um conjunto de axiomas lógicos (geralmente grande) e de um conjunto pequeno de regras de inferência.

Em 1922, houve a primeira tentativa de formalização, através de um artigo publicado pelo matemático Andrei Kolmogorov. O conjunto de axiomas proposto por ele, porém, não cobria completamente a lógica intuicionista. Uma outra tentativa que também não chegou a cobrir essa lógica foi feita em 1928 por Valerii Glivenko[12]. Em 1930, Heyting publica uma série de artigos pelos quais ele é mais conhecido. Nesses, ele não só formalizava a **IPC** e a **IQC**, mas também a própria aritmética e Análise intuicionistas. Esses trabalhos são algumas das publicações mais importantes do intuicionismo[12].

O processo utilizado por Heyting para formalizar **IPC** e **IQC** foi baseado na obra *Principia Mathematica*, escrita por Russell. Nesse livro, Russell propõe um sistema no estilo de Hilbert para a lógica clássica. A partir disso, o trabalho de Heyting foi analisar cada axioma desse sistema e extrair os que eram aceitáveis com base no Intuicionismo[11]. Assim, ele chegou nos seguintes axiomas, retirados de [13]:

- $A \rightarrow (B \rightarrow A);$
- $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C));$
- $A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B);$
- $A \wedge B \rightarrow A;$
- $A \wedge B \rightarrow B;$
- $A \rightarrow A \vee B;$
- $B \rightarrow A \vee B;$
- $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C));$
- $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A);$
- $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B);$
- $\forall x A(x) \rightarrow A(t);$
- $A(t) \rightarrow \exists x A(x)$

Comparando esse sistema de axiomas com o da lógica clássica, a única diferença é que esse sistema não possui o axioma que representa o princípio do terceiro excluído[11]. Quanto às regras de inferência, essas são 3, também retiradas de [13]:

- *Modus Ponens:* De A e $(A \rightarrow B)$, conclui-se B;
- $\forall -$ *Introdução*: De $(B \rightarrow A(x))$, com x sendo uma variável que não ocorre livre em B, conclui-se $(B \rightarrow \forall\, xA(x))$;
- $\exists -$ *Introdução*: De $(A(x) \rightarrow B)$, com x sendo uma variável que não ocorre livre em B, conclui-se $(\exists A(x) \rightarrow B)$.

3.2.3 Regras Admissíveis e Incompletude do IPC

Para entender a incompletude do **IPC**, é necessário entender o conceito de regra admissível, o qual será definido informalmente. Um sistema formal é composto por um conjunto de regras tal que, a partir delas, são derivados os teoremas. Se ao adicionar uma nova regra o conjunto de teoremas que podem ser derivados continua o mesmo, essa regra é chamada de admissível. Ou seja, é uma regra que apesar de ser válida no sistema estudado, não acresce em nada nas possíveis inferências que pode-se fazer com as regras.

Baseado na definição anterior, é intuitivo pensar que uma regra admissível é semelhante a uma redundante e, por isso, deveria poder ser gerada a partir das já definidas pelo sistema. Apesar desse pensamento ser inteiramento válido para a lógica proposicional Clássica (**CPC)**, ele não é válido para a **IPC**. Quando qualquer regra admissível pode ser derivada pelas já definidas, o sistema é dito estruturalmente completo. Caso contrário, é estruturalmente incompleto.

Em 1960, Ronald Harrop publica um artigo em que aparece a primeira regra que não é derivável, mas é admissível no **IPC**: $\neg A \rightarrow (B \vee C) / (\neg A \rightarrow B) \vee (\neg A \rightarrow C)$ [14]. Seguindo o trabalho de Harrop, G. E. Mints publica em 1976 um artigo com várias regras em que isso também acontece, sendo $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C) / ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \vee ((A \rightarrow B) \rightarrow C)$ a mais famosa, conhecida como regra de Mints[15]. Dessa forma, esses trabalhos estabeleceram a incompletude estrutural do **IPC.** Entretanto, o estudo das regras admissíveis para a **IPC** não parou com a constatação desse fato. A principal dúvida que restou foi se ainda existia alguma regra admissível e não derivável, fora as expostas por esses trabalhos. Em 1984, Rybakov mostrou que é sempre possível decidir se uma regra é ou não admissível no **IPC**. Além disso,

ele mostrou que não existe um conjunto finito de regras admissíveis que geram todas as admissíveis do **IPC**[14]. Contudo, foi provado em 2001 que existe um conjunto infinito de admissíveis capazes de gerar todas as outras também admissíveis.

3.2.4 A Tradução Negativa

Dado uma fórmula *P* válida na lógica clássica, é sempre possível achar uma fórmula válida equivalente na lógica intuicionista. Esse processo de transformar uma fórmula válida de uma lógica em uma outra equivalente e também válida de uma outra lógica é chamado de tradução. As traduções da clássica para a intuicionista ficaram conhecidas como traduções negativas, pois todas envolvem o aparecimento do sinal lógico de negação após traduzir a fórmula.

A tradução negativa mais conhecida foi a proposta de forma similar por Kurt Gödel e Gerhard Gentzen, conhecida como tradução de Gödel-Gentzen. Porém, ao propor as traduções, nem Gödel e nem Gentzen tinham o conhecimento que uma tradução já tinha sido proposta em 1925 por Kolmogorov[16]. Nessa tradução, a qual será abreviada por *Ko*, ele percebeu que qualquer sub-fórmula clássica se transforma em uma sub-fórmula intuicionista equivalente ao adicionar a dupla negação na frente. De acordo com [16], consistia na seguinte definição indutiva:

- $A^{Ko} :\equiv \neg\neg A$, com A atômica;
- $(A \wedge B)^{Ko} :\equiv \neg\neg(A^{Ko} \wedge B^{Ko})$;
- $(A \vee B)^{Ko} :\equiv \neg\neg(A^{Ko} \vee B^{Ko})$;
- $(A \rightarrow B)^{Ko} :\equiv \neg\neg(A^{Ko} \rightarrow B^{Ko})$;
- $(\forall xA)^{Ko} :\equiv \neg\neg \forall xA^{Ko}$;
- $(\exists xA)^{Ko} :\equiv \neg\neg \exists xA^{Ko}$

A partir dessa definição, é possível mostrar que A é provável de forma clássica se e somente si A^{Ko} é provável de forma intuicionista[16].

A seguir, segui a tradução de Gödel-Gentzen de acordo com [16], definida de forma indutiva e abreviada como *N:*

- $A^{N} :\equiv \neg\neg A$, com A atômica;

- $(A \wedge B)^N :\equiv (A^N \wedge B^N)$;
- $(A \vee B)^N :\equiv \neg\neg(A^N \vee B^N)$;
- $(A \rightarrow B)^N :\equiv (A^N \rightarrow B^N)$;
- $(\forall xA)^N :\equiv \forall xA^N$;
- $(\exists xA)^N :\equiv \neg\neg \exists xA^N$

A tradução de Gödel-Gentzen é mais simples que a de Kolmogorov, pois suprime diversas duplas negações que não são necessárias, como nas sub-fórmulas envolvendo os conectivos ^ e →, e o quantificador $\forall x$. Outras formas de tradução negativa semelhante as mostradas e mais otimizadas (ou seja, inserindo uma menor quantidade de negações) foram propostas[16], mas não serão mostradas nesse trabalho.

No próximo tópico, discutiremos sobre a aritmética intuicionista, especificamente a aritmética de Heyting. Possuir essas traduções da lógica clássica para a intuicionista é de grande importância para esse próximo tópico, pois havendo tal tradução, ao aceitar a consistência da aritmética de Heyting, automaticamente também se estaria aceitando a consistência da aritmética de Peano.

3.3 A Aritmética de Heyting

A aritmética é provavelmente a área mais antiga e mais elementar da matemática. De forma semelhante a várias outras teorias da matemática (como a teoria dos conjuntos), apesar de ser extensivamente utilizada há bastante tempo, só foi formalizada no século XIX. A formalização mais conhecida é a feita através de um conjunto de axiomas conhecidos como axiomas de Peano, os quais foram propostos em 1889 pelo matemático alemão Giuseppe Peano. É importante ressaltar que a aritmética usual utiliza a semântica da lógica clássica (podendo ser tanto de primeira-ordem, como de ordens superiores). Essa aritmética é conhecido como aritmética de Peano e é comumente abreviada como **PA**.

Ao publicar uma série de artigos de extrema importância para o intuicionismo em 1930, Heyting foi mais além do que apenas formalizar **IPC** e **IQC**[12]. Em um desses artigos, ele formalizava uma aritmética intuicionista, ou seja, uma que substituiria o uso da lógica clássica pela lógica intuicionista. Essa aritmética ficou conhecida, então, como aritmética de Heyting e é comumente abreviada como **HA**.

A **HA** e a **PA** compartilham diversas similaridades. Ora, diversos axiomas da **PA** são axiomas da matemática e não da lógica. Como a única diferença entre as duas aritméticas é a lógica utilizada, então é natural que esses axiomas matemáticos se preservem na **HA**. Além disso, a linguagem também se preserva entre as duas aritméticas[13] (ou seja, compartilham a mesma relação binária do =, a constante 0, a função sucessor S, as funções recursivas primitivas (como multiplicação e adição), etc.).

A seguir, alguns dos axiomas e definições importantes da aritmética formalizados através da Lógica Intuicionista, retirados de [13]:

1) O axioma da caracterização do 0:
   - $\forall x \neg(S(x)=0)$
2) A injetividade da função sucessor S:
   - $\forall x \forall y(S(x)=S(y)\rightarrow x=y)$
3) O axioma da extensão da igualdade:
   - $\forall x \forall y(x=y\rightarrow S(x)=S(y))$
4) O princípio da indução:
   - $A(0)\wedge \forall x(A(x)\rightarrow A(S(x)))\rightarrow \forall x(A(x))$
5) O princípio da boa ordenação:
   - $\forall x[\forall y\ (y < x \rightarrow A(y) \wedge \neg A(y)) \rightarrow \exists y\ (y < x \ \&\ A(y) \wedge \forall z(z < y \rightarrow \neg A(z))) \vee \forall y(y < x \rightarrow \neg A(y))]$
6) A definição da relação $<$:
   - É definida como $\exists z(S(z)+x=y)$.
7) A lei da comparação (não é axioma, mas é possível provar na **HA**):
   - $\forall x \forall y(x<y\vee x=y\vee y<x)$

Como não podia ser diferente, a **HA** não aceita o princípio do terceiro excluído como axioma e, por isso, é intuitivo pensar que nem toda fórmula é decidível nessa aritmética. Porém, tem fórmulas na forma $P\vee\neg P$ que são decidíveis pela **HA**. Um dos exemplos mais simples é $\forall x \forall y(x=y\vee\neg(x=y))$, a qual pode ser provada por indução. Além disso, foi verificado que qualquer fórmula sem quantificadores é decidível pela **HA**. Indo mais adiante ainda, se A(x) é decidível, então $\forall y(y<x\rightarrow A(y))$ e $\exists y(y<x\wedge A(y))$ também são

decidíveis por indução em x. Ou seja, qualquer fórmula que possui apenas quantificadores com variáveis ligadas são decidíveis em **HA**[13].

Adicionando o princípio do terceiro excluído no conjunto de axiomas lógicas de **HA**, obtém-se a **PA**[13]. Por isso, é comum encontrar a expressão **PA** = (**HA** + princípio do terceiro excluído) na literatura.

3.4 Sequência de Escolhas

Até agora, esse trabalho limitou-se a falar de conceitos e desenvolvimentos relacionados diretamente à lógica intuicionista. Porém, como já se sabe, o intuicionismo não foi restrito apenas ao desenvolvimento de uma nova lógica não-clássica. Tudo que foi descrito nesse capítulo está relacionado aos primeiros artigos de Brouwer sobre o intuicionismo, o qual rompia com a lógica clássica e foram conhecidos como primeiro ato do intuicionismo. Por sua vez, o objetivo desse tópico é expor de forma breve um dos conceitos mais importantes desenvolvidos em artigos publicados posteriormente aos do primeiro ato, os quais acabaram constituindo o chamado segundo ato do intuicionismo.

Pode-se resumir os trabalhos do segundo ato como publicações que tinham como objetivo estabelecer uma teoria intuicionista para o contínuo. Os métodos clássicos de construção dos reais, como a famosa construção de Dedekind, não eram construtivos e, portanto, não eram aceitos pelo intuicionismo. Como os reais são essenciais para praticamente qualquer área da matemática, era fundamental criar uma teoria intuicionista que conseguisse construí-los. Com esse objetivo, Brouwer introduziu uma série de conceitos novos no intuicionismo, sendo o principal a sequência de escolhas.

O conceito de uma sequência de escolhas é simples. Suponha um conjunto fixo de objetos matemáticos. Suponha também a existência de um matemático que escolhe um objeto desse conjunto e o coloca em uma sequência. Logo depois, ele escolhe um outro objeto também desse conjunto e assim sucessivamente, nunca parando esse processo. Essa sequência é, então, chamada de sequência de escolhas, porque cada elemento foi uma escolha do matemático. É importante ressaltar que essa sequência é potencialmente infinita pelo motivo que o matemático nunca para o processo. Por isso, pode-se também dizer que uma sequência de escolhas é um objeto incompleto[17].

Diante desse conceito, foram feitas duas distinções principais entre as sequências de escolhas, as *lawlike* e as *lawless*. As *lawlike* são quaisquer sequências em que todos os valores

são completamente determinados por alguma lei fixa em algum estágio finito da geração da sequência[18]. Um exemplo simples de uma sequência desse tipo é um matemático que está escolhendo elementos do conjunto dos números naturais a partir de uma relação de recorrência. Por exemplo, a relação $x_{n+1} = 2*x_n$, com $x_1 = 1$. Ora, o primeiro elemento dessa sequência será o 1 e, a partir daí, cada elemento terá seu valor determinado pela escolha anterior. Dessa forma, a escolha do matemático está limitada pela relação de recorrência, sendo então uma sequência de escolhas *lawlike*. Toda sequência de escolhas que não obedece nenhuma lei fixada é chamada de *lawless*[18]. Um exemplo seria o mesmo matemático anterior, mas que agora cada escolha dele não está mais restrita a nenhuma lei, ou seja, ele escolhe o número que ele quiser.

Como uma sequência de escolhas é um objeto sempre em construção, em um determinado momento o que obtemos não é a sequência completa, mas um segmento inicial desta. Além disso, se a sequência for *lawlike*, também podemos obter nesse mesmo momento um conjunto de restrições para as escolhas. Para afirmar que uma sequência de escolhas tem uma propriedade *P*, é necessário que seja possível provar essa propriedade através das informações que foram obtidas até o dado momento[17].

Também é importante ressaltar que o princípio do terceiro excluído também não é válido para essas sequências[17]. Ora, basta pensar em uma sequência *lawless* de números naturais. Em um dado momento, suponha que um número, por exemplo o número 7, não apareceu ainda no segmento inicial analisado. Como a sequência é *lawless*, não há uma forma de prever se esse número irá aparecer ou não em algum momento. Como a sequência é infinita, também não é possível chegar todos os elementos para saber se o 7 irá aparecer. Por isso, se *P* for a proposição que afirma que o 7 aparece na sequência, não é possível afirmar nem *P* nem $\neg P$.

Para entender como foi definida as sequências de escolhas que constroem os reais, é necessário apresentar o conceito de sequências de Cauchy. Uma sequência $a_1, a_2, a_3,...$ é de Cauchy quando, para todo número real ε, existe um inteiro n tal que para todos os naturais p,q > n, a condição $|x_p - x_q| < \varepsilon$ é satisfeita. Em termos informais, os elementos da sequência vão ficando arbitrariamente cada vez mais próximos um dos outros. Da forma que acabou de ser definida, essa sequência de Cauchy é definida para números reais, mas é possível também definir de forma construtiva uma sequência de Cauchy para os racionais. É toda sequência que, para cada valor da exponenciação $2^{-k,}$, sempre é possível achar um termo a_n tal que qualquer termo subsequente a_m difere de a_n por um valor menor que 2^{-k}. Definida dessa forma,

essa sequência converge para um número real. Por isso, é comum dizer que essa sequência gera o número real para o qual ela converge[19].

Com a definição de sequência de Cauchy para os racionais em mãos, fica mais fácil entender a construção dos reais. Basta que a sequência de escolhas obedeça à condição exposta anteriormente para que esta gere um número real. Dessa forma, cada número real pode ser representado pela sequência de escolhas que o gera e, portanto, o conjunto de todas as sequências de escolhas que satisfazem a condição de Cauchy construiria todos os números reais. Apesar dessa forma de apresentar a construção estar inteiramente correta, pode-se mostrar essa construção de forma menos informal, utilizando o conceito de *spread*, o qual também foi introduzido por Brouwer.

Um *spread* é como se fosse uma estrutura que agrega sequências de escolhas, de forma semelhante que um conjunto agrega objetos matemáticos. Todo *spread* tem uma lei que, dado um segmento inicial de uma sequência de escolhas, decide se esse segmento é admitido pela *spread* ou não é. Caso o segmento seja admitido, a lei do *spread* determina que pelo menos uma extensão imediata desse segmento também seja admitido pelo *spread.* Essa estrutura de *spread* sendo montada é semelhante a uma árvore. Basta pensar que cada segmento admitido é um nó da árvore e que se liga a um outro nó, que é sua extensão imediata. Como a extensão imediata também é considerada como um novo nó que acabou de ser adicionado, então também é admitido uma nova extensão para esse novo nó. Por esse processo ser infinito, o *spread* gera uma árvore com caminhos de tamanho infinito. Cada caminho é, então, uma sequência de escolhas e é chamado de um elemento da *spread*. A construção dos reais pode ser considerada, então, como a *spread* de todas as sequências de escolhas que satisfazem a condição de Cauchy para os números racionais[17].

4. O Construtivismo

No capítulo anterior, foi desenvolvida uma forma de matemática construtiva através das ideias do intuicionismo. O construtivismo, porém, não se limitou apenas a essa escola da matemática.

A década de 1930 foi marcada por avanços na teoria da computação através dos trabalhos de Alonzo Church e Alan Turing. Esses trabalhos também foram de grande importância para o surgimento e desenvolvimento da teoria da recursão. Com isso, surgiu uma nova área da matemática chamada matemática recursiva. Essa área, assim como as demais áreas da matemática clássica, utiliza a lógica clássica. Diante disso, na década de 1940, o Matemático A.A. Markov desenvolve uma versão construtiva da matemática recursiva. Basicamente, Markov desenvolveu a matemática recursiva substituindo a lógica clássica pela lógica intuicionista[20]. Nesse trabalho, essa forma de construtivismo não será melhor desenvolvida, pois seria necessário introduzir diversos conceitos e teorias da teoria da recursão, fugindo do escopo.

Mesmo com o surgimento da matemática construtiva recursiva, o progresso do construtivismo foi lento durante a década de 1950 e durante metade da década de 1960. O principal motivo foi que em algumas áreas o construtivismo deixou a teoria extremamente complexa, como na análise. Com isso, a comunidade matemática foi aos poucos perdendo o interesse. Entretanto, em 1967, o interesse foi renovado com o importante trabalho *Foundations of Constructive Analysis*, do matemático Ernett Bishop. Por meio desse, ele conseguiu desenvolver de forma construtiva grande parte da análise do século XX[20]. O trabalho de Bishop resultou em uma nova forma de construtivismo, conhecida como construtivismo de Bishop, o qual será melhor desenvolvido no próximo tópico.

Ao mesmo tempo em que Bishop escrevia a publicação citada anteriormente, um outro nome importante para o construtivismo, Martin-Löf, também estava trabalhando em uma publicação relacionada à análise construtiva. Ele começou a escrever a publicação *Notes on Constructive Analysis* em 1966, terminando em 1968. Como até a data de publicação ele nunca teve acesso ao trabalho de Bishop, a teoria utilizada nesse trabalho foi a da matemática construtiva recursiva e não o construtivismo de Bishop[20]. Apesar dessa publicação marcar o início dos trabalhos de Martin-Löf na matemática construtiva, a contribuição mais importante dele foi a criação e desenvolvimento de uma teoria intuicionista dos tipos. Essa teoria, além

de uma importância teórica, já que serve como um fundamento para o construtivismo de Bishop[20], tem uma grande importância prática para a computação. Essa teoria e algumas de suas aplicações serão apresentadas de forma bem abreviada em um tópico desse capítulo.

4.1 O Construtivismo de Bishop

Sem dúvida, o intuicionismo de Brouwer teve sucesso na crítica da matemática clássica. Também é inegável a influência dessa escola para o desenvolvimento do construtivismo. Entretanto, Brouwer geralmente utilizou os novos conceitos do intuicionismo para a negação da matemática clássica. Por causa disso, ele acabou não se concentrando na relevância matemática que esses conceitos teriam para a matemática construtiva[21]. Além disso, com os trabalhos do segundo ato do intuicionismo, Brouwer focou no desenvolvimento de conceitos que não foram muito bem aceitos por boa parte da comunidade matemática, como o de *spread* e sequência de escolhas. Diante disso, pode-se dizer que os trabalhos de Brouwer não foram tão importantes para o desenvolvimento do construtivismo e seus conceitos quanto foram para a negação da matemática clássica.

Até a metade da década de 1960, o construtivismo ainda estava intimamente ligado ao intuicionismo. Ora, até essa década, a única versão alternativa do construtivismo era a matemática construtiva recursiva de Markov. Entretanto, essa teoria, por sua vez, também estava fortemente associada ao intuicionismo, pois utilizava a lógica intuicionista. Como grande parte da comunidade matemática dessa época eram matemáticos clássicos, era natural que uma teoria que dependesse de uma outra que negava a matemática clássica não fosse popular. Diante desse contexto, era necessário surgir algum matemático que, de alguma forma, conseguisse encaixar o construtivismo na matemática clássica. Esse foi o papel que o matemático clássico Ernett Bishop assumiu ao desenvolver sua versão do construtivismo.

No desenvolvimento de sua teoria de construtivismo, Bishop procurou não cometer o mesmo erro que Brouwer. Ou seja, não focou em negar resultados, mas sim, em construí-los. Além disso, duas palavras que resumem bem a teoria de Bishop são a ideologia e o pragmatismo[21]. Ideológico, porque ele tinha como ideologia focar em uma matemática que toda proposição teria conteúdo empírico, e pragmático por causa da forma que desenvolveu sua teoria[21]. De acordo com [21], Bishop procurou sempre seguir três princípios ao desenvolver o construtivismo, os quais:

1) Evitar conceitos definidos de forma negativa;

2) Evitar definir conceitos irrelevantes. Ou seja, entre os vários possíveis conceitos clássicos equivalentes, mas que são diferentes do ponto de vista construtivo, escolher um ou dois que são os mais frutíferos do ponto de vista matemático e desconsiderar os outros;

3) Evitar uma pseudo-generalização. Ou seja, não hesitar em introduzir uma nova hipótese se ela facilitar a teoria e se ela satisfizer os exemplos em que o matemático esteja interessado.

Um ponto de grande importância dessa forma de construtivismo é que, da forma que foi desenvolvido, ele não procura e nem chega a realmente a refutar os princípios da matemática clássica. Entretanto, é óbvio que existem princípios que são inerentemente não-construtivos, como o princípio do terceiro excluído. Nesses casos, o correto é dizer que esses princípios são indecidíveis na teoria de Bishop. Por exemplo, o princípio do terceiro excluído não é adotado por Bishop, entretanto a matemática de Bishop também não possui nenhum princípio que refuta diretamente o terceiro excluído, diferentemente do que acontece no intuicionismo[22]. É importante notar que, por causa dessa indecidibilidade, todas as instâncias do princípio do terceiro excluído que são refutadas pelo intuicionismo não podem ser provadas no construtivismo de Bishop[22].

Devido a essa forma de ver a matemática, o construtivismo de Bishop é considerado, então, uma parte da matemática clássica. Ora, toda a parte da matemática clássica que pode ser decidida e provada de forma construtiva faz, então, parte da matemática de Bishop. Por fora, então, ficaria tudo que depende de argumentos não-construtivos para ser aceito ou provado.

Para melhor ilustrar as relações entre as diversas formas de construtivismo e a matemática clássica, pode-se utilizar um diagrama de Venn. Considere CLASS como o conjunto que representa a matemática clássica, INT representa o intuicionismo, BCM a matemática construtiva de Bishop e CRM a matemática construtiva recursiva, de Makov. O diagrama ficaria assim:

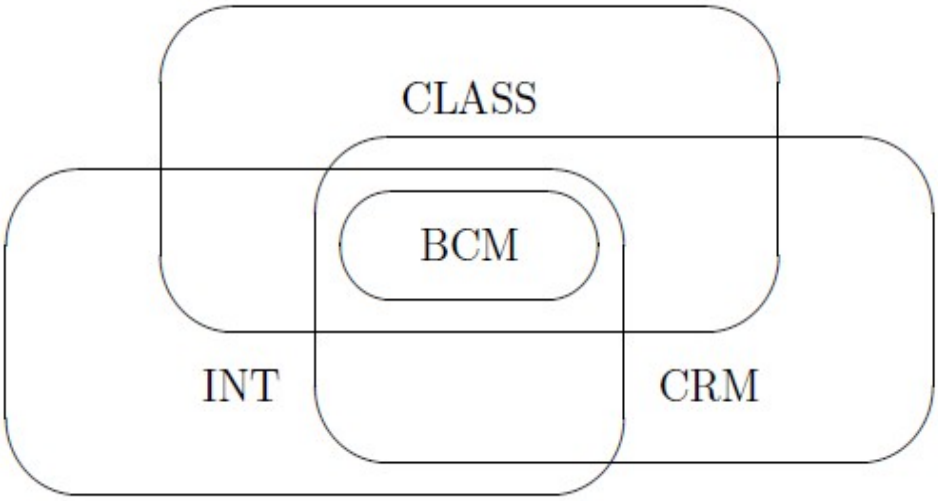

Figura 1: Diagrama mostrando a relação entre a matemática clássica e os diferentes tipos de construtivismo. Figura retirada de [21].

A figura 1 mostra claramente que tanto o intuicionismo quanto a matemática recursiva construtiva romperam com a matemática clássica, mas mostra que o mesmo não acontece com o Construtivismo de Bishop.

4.1.1 O Princípio da Omnisciência

Chegamos finalmente à conclusão de que qualquer parte da matemática clássica que é provada de forma construtiva faz parte do construtivismo de Bishop. Por causa dessa conclusão, é essencial possuir uma forma de identificar quando uma determinada prova é construtiva ou não. Muitas vezes, essa identificação é bastante intuitiva, como nas provas de a^b racional com a e b irracionais, mostradas no início do capítulo sobre o intuicionismo. Entretanto, algumas demonstrações como o fato da lei da tricotomia ser não-construtiva não é tão intuitiva assim, tendo-se que utilizar argumentos mais complicados. Foi visto que foi para resolver esse problema que Brouwer desenvolveu os chamados exemplos Brouwerianos. O problema é que esses exemplos são chamados de exemplos fracos, pois, como já foi explicado, dependem da existência de problemas que ainda estão em aberto na Matemática. Diante disso, Bishop decidiu refinar a forma de indicar que uma prova é não-construtiva. Para isso, utilizou os chamados princípios da omnisciência.

Como foi dito, qualquer instância do princípio do terceiro excluído não pode ser

provada por esse construtivismo. Assim, Bishop resolveu trabalhar particularmente em cima de uma dessas instâncias, a qual é chamada de princípio da omnisciência[21]. Esse princípio diz que, dado um conjunto *A*, ou todos os elementos de *A* tem uma propriedade *P* ou existe um elemento de *A* com a propriedade $\neg P$. A importância principal desse princípio, é que Bishop escolheu uma instância específica de *A* e de *P*, formulando o princípio da omnisciência limitada, abreviado por **LPO**. O **LPO** diz que, dado uma sequência binária a_n, então existe um k tal que $a_k = 1$ ou $a_k = 0$ para todo k[21]. No construtivismo de Bishop, é possível mostrar que a lei da tricotomia é equivalente ao **LPO** e, por isso, é não-construtiva[21]. Comparando essa forma com a utilizada por Brouwer, fica evidente a vantagem, pois evitou-se utilizar argumentos nem sempre muito bem aceitos envolvendo propriedades do número *pi*.

Após o **LPO**, Bishop foi mais além, formulando uma versão mais fraca que também é não-construtiva, o princípio menor da omnisciência limitada, abreviado por **LLPO**. O **LLPO** diz que seja a_n uma sequência binário com no máximo um número 1. Então $a_{2k} = 0$ para todo k ou $a_{2k+1} = 0$ para todo k. Um exemplo de um princípio não-construtivo que é equivalente ao **LLPO** é que $\forall x, y \in R. xy = 0 \rightarrow (x = 0 \vee y = 0)[21]$. Vale ressaltar que apesar do princípio do terceiro excluído implicar no **LPO** e este por sua vez implicar no **LLPO**, essas implicações não podem ser invertidas do ponto de vista construtivo. Por isso, a existência dessas várias versões também serve para indicar o quanto uma prova ou princípio é não-construtiva.

4.2 Teoria dos Tipos de Martin-Löf

Os avanços no Construtivismo decorrentes do trabalho de Bishop permitiram que, em 1971, o matemático Martin-Löf desenvolvesse a chamada teoria intuicionista dos tipos. Entre as formas de construtivismo mostradas até aqui, a teoria dos tipos é a que deixa mais evidente a relação entre o construtivismo e a computação. O objetivo desse tópico será limitado a fazer uma introdução simples do que significa a teoria dos tipos e mostrar alguns dos seus usos na computação. Isso deve-se ao fato que é uma teoria bastante complexa, seria necessário um artigo inteiro para explicá-la de forma satisfatória.

Para entender melhor a teoria dos tipos, pode-se pensar na teoria dos conjuntos. Na teoria dos conjuntos, o conceito principal é o conjunto e a partir dele, a teoria vai sendo construída. De forma semelhante funciona a teoria dos tipos, mas sendo o principal conceito os tipos. O próprio Martin-Löf falou algumas palavras que ajudam entender as ideias por trás

dessa teoria. De acordo com ele, devemos pensar acerca de objetos matemáticos e construções. Todo objeto matemático seria de um certo tipo e sempre seria dado junto com esse determinado tipo. O tipo é definido descrevendo o que deve-se fazer para construir um objeto desse tipo. Assim, um tipo seria bem-definido quando se sabe o que significa se ter um objeto desse tipo[20]. Com essas palavras, Martin-löf acaba definindo informalmente o que é um tipo. Além disso, ele vai mais além, dando um exemplo. O exemplo é que o motivo das funções **N→N** serem um tipo não é porque é sabido a existência de alguma função numérica em particular, como por exemplo, as funções recursivas primitivas (soma, multiplicação, etc), mas sim porque a noção de uma função numérica é bem entendida em geral[20].

Olhando para essa introdução abreviada das ideias de Martin-Löf, já se fica evidente a relação entre a teoria dos tipos e a computação. A forma que essa teoria interpreta os objetos matemáticos é semelhante a muitas linguagens funcionais, sendo um bom exemplo Haskell. Em Haskell, todos os dados são associados a um certo tipo. Porém, o que deixa essa linguagem mais similar ainda, é que qualquer função ou expressão da linguagem também tem um tipo associado. Por causa dessas semelhanças, algumas linguagens funcionais mais recentes, como as linguagens Epigram e Agda, basearam-se diretamente na teoria de Martin-Löf. Além disso, uma outra grande importância é a relação entre essa teoria e o isomorfismo de Curry-Howard. De forma resumida, esse isomorfismo estabelece a equivalência entre programas e provas matemáticas. Isso é visto de forma bem clara na teoria de Martin-Löf, pois do jeito que ela é desenvolvida, facilita a extração de programas a partir das provas[20]. É por isso que os conceitos da teoria dos tipos são bastante usados para desenvolver programas que tem como objetivo servir de assistente para provas.

5. Conclusão

Após ler esse trabalho, é possível entender os acontecimentos do século XIX que culminaram no interesse explosivo envolvendo a filosofia e os fundamentos da matemática no início do século XX, os quais culminaram no intuicionismo. Além disso, foi possível compreender a principal diferença de ideologia entre as duas principais que surgiram no inicio do século XX, o logicismo e o intuicionismo. Foi visto também que a crise entre essas ideologias acabou culminando na crise dos fundamentos.

A lógica intuicionista foi explicada de forma bem abrangente, sem entrar em detalhes muito específicos. Porém, o leitor desse trabalho é capaz de identificar os principais pontos que diferenciam a lógica intuicionista da lógica clássica. A explicação mais detalhada de alguns pontos, como o princípio do terceiro excluído e a dupla negação, faz com que o leitor seja capaz de entender de forma simples o porquê do intuicionismo rejeitar esses princípios. A parte da lógica intuicionista foi escrita de forma que o leitor seja capaz de entender os conceitos básicos, como a interpretação BHK. O propósito do tópico de sequência de escolhas foi introduzir alguns desenvolvimentos do segundo ato do intuicionismo, de forma que o leitor possa ficar interessado e, se possível, se aprofundar mais no assunto.

Ao explicar outras formas de construtivismo, o objetivo foi mostrar a evolução natural dessa teoria. É importante entender que o construtivismo de Bishop renovou o construtivismo e permitiu que o interesse ainda continuasse até os dias recentes. O último tópico, o qual fala sobre a teoria dos tipos, teve como objetivo deixar interessado não só os possíveis leitores que possuem interesse em matemática e lógica, mas como também os que tem interesse na área da computação.

5.1 Trabalhos Futuros

Muitas são as possibilidades de aprofundamento em diversos assuntos desse trabalho. Uma área de possível aprofundamento e que tem uma relação bem direta com a computação seria a teoria dos tipos. Outra possibilidade é fazer um trabalho mais detalhado focado exclusivamente no intuicionismo. Com um nível de detalhe maior, seria possível trabalhar com conceitos mais avançados, como o de realizabilidade, de teoria das provas. Como esse conceito é diretamente relacionado com a interpretação BHK, seria uma área interessante para se pesquisar. Além disso, também poderia se fazer um trabalho mais completo em relação aos

conceitos do segundo ato do intuicionismo, pois Brouwer não se limitou a *spread* e sequências de escolhas. Ele criou mais teorias interessantes, como o conceito de *species*, a indução *bar*, o teorema *fan*, além dos chamados axiomas da continuidade. De qualquer forma, a direção a se seguir seria pegar alguma área desse trabalho bastante abrangente e fazer outros trabalhos mais focados e detalhados.

Referências Bibliográficas

[1] Ferreirós, J., “The Crisis in the Foundations of Mathematics”, In Gowers, T (ed.), *Princeton Companion to Mathematics,* Princeton, Princeton University Press, 2008. p. 1-14.

[2] Avigad, Jeremy, **"**Philosophy of Mathematics**"**, *The Edinburgh Companion to Twentieth-Century Philosophies*. Editado por Constantin V. Boundas. Edinburgh: Edinburgh University Press, 2007, p. 234-251.

[3] Horsten, Leon, “Philosophy of Mathematics”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2012 Edition), Edward N. Zalta(ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/sum2012/entries/philosophy-mathematics/>

[4] Brouwer, L. E. J, “*Brouwer's Cambridge Lectures On Intuitionism*”, Editado por D. Van Dalen, 1 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. p. 2-3.

[5] Weisstein, Eric W. “Constructive Proof”. From MathWorld-A Wolfram Web Resource. Http://mathworld.wolfram.com/ConstructiveProof.html

[6] Dummett, Michael. “Preliminaries: Constructive Proof”. In: Dummett, Michael. *Elements Of Intuitionism*. 2 ed. New York: Oxford University Press, 2000. p. 6-8.

[7] Wade, Chris.(2012) “Why Does Intuitionistic Logic not allow the 'Law of the Excluded Middle'?”, *Southampton Philosophy Journal*. Retirado de http://www.southamptonphilosophyjournal.co.uk/Journal2012.html

[8] Davis, Philip J.; Hersh, Reuben; Marchisotto, Elena Anne. “pi and pi-hat”. *The Mathematical Experience*, Study Edition. 1 ed. Birkhäuser, 1995, p. 411-416

[9] Heyting, A. “Real Number Generators”. In: Heyting A. *Studies In Logic And The Foundations of Mathematics.*, Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1956, p. 17-18.

[10] Mandelkern, Mark. “Brouwerian Counterexamples”. *Mathematics Magazine*, Vol 62, No. 1. (1989), pp 3-27.

[11] van Dalen, Dirk “Intuitionistic Logic”, *The Blackwell Guide to Philosophica Logic.* Ed. L. Gobble. Blackwell, Oxford. 2001, 224-257.

[12] van Atten, Mark, "The Development of Intuitionistic Logic", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2012 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = http://plato.stanford.edu/archives/win2012/entries/intuitionistic-logic-development

[13] Moschovakis, Joan, "Intuitionistic Logic", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2010 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL =

http://plato.stanford.edu/archives/sum2010/entries/logic-intuitionistic

[14] Iemhoff, Rosalie, “On the Admissible Rules of Intuitionistic Propositional Logic”, *The Journal of Symbolic Logic.* Vol. 66, No. 1, Association for Symbolic Logic, Mar. 2011, pp. 281-294

[15] Sanz, Wagner de Campos; Piecha, Thomas. “A Critical Remark on The BHK Interpretation Of Implication” 2012. *Trabalho apresentado ao II Congresso Colombiano de Lógica, Epistemologia e Filosofia da Ciência*, Bogotá, 2012.

[16] Ferreira, Gilda; Oliva, Paulo. “On Various Negative Translations”, *Eletronic Proceedings in Theoretical Computer Science,* 47, 2011, pp 21-33.

[17] van Dalen, Dirk; van Atten, Mark. “Intuitionism”, *A Companion to Philosophical Logic*. Ed. Jaquette, D. Blackwell, Oxford, 2002, pp 513-530.

[18] Moschovakis, Joan. “An intuitionistic theory of lawlike, choice and lawless sequences”, *Logic Colloquium '90: ASL Summer Meeting,* Ed. Oikkonen, J; Väänänen, J. Berlin: Springer-Verlag, 1993, pp 191-209.

[19] Dummett, Michael. “Is Time a Continuum of Instants?”, *Philosophy*, Vol. 75, No. 294, Cambridge: Cambridge University Press, 2000, pp 497-515.

[20] Bridges, Douglas, "Constructive Mathematics", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*(Spring 2013 Edition), Edward N. Zalta(ed.), URL = http://plato.stanford.edu/archives/spr2013/entries/mathematics-constructive

[21] Lietz, Peter. “*From constructive mathematics to computable analysis via the realizability interpretation*”, Darmstadt, TU Darmstad, 2005, pp 14-21, Tese de Doutorado.

[22] Troelstra, A. S. “History of constructivism in the 20th century”, *ITLI Prepublication Series ML-91-05,* University of Amsterdam, 1991, pp 24-25.