Lambda-Cálculo (Aula 8)

Ruy de Queiroz & Anjolina de Oliveira

Centro de Informática, UFPE

2007.2

Conteúdo

Conteúdo

Atribuição de Tipos a Combinadores
Tipos e esquemas de tipos

Definição (Tipos e esquemas de tipos)

Suponha que tenhamos algumas constantes para tipos*, e uma quantidade infinita de* variáveis para tipos*.*

Atribuição de Tipos a Combinadores

Tipos e esquemas de tipos

Definição (Tipos e esquemas de tipos)

Suponha que tenhamos algumas constantes para tipos*, e uma quantidade infinita de* variáveis para tipos*. Então definimos* esquemas de tipo *da seguinte forma:*

Atribuição de Tipos a Combinadores
Tipos e esquemas de tipos

Definição (Tipos e esquemas de tipos)

Suponha que tenhamos algumas constantes para tipos*, e uma quantidade infinita de* variáveis para tipos*. Então definimos* esquemas de tipo *da seguinte forma:*

(a) *todas as constantes para tipos e variáveis para tipos são esquemas de tipo;*

Atribuição de Tipos a Combinadores

Tipos e esquemas de tipos

Definição (Tipos e esquemas de tipos)

Suponha que tenhamos algumas constantes para tipos, *e uma quantidade infinita de* variáveis para tipos. *Então definimos* esquemas de tipo *da seguinte forma:*

(a) *todas as constantes para tipos e variáveis para tipos são esquemas de tipo;*

(b) *se α e β forem esquemas de tipo, então o mesmo acontece com $(\alpha \to \beta)$.*

Atribuição de Tipos a Combinadores

Tipos e esquemas de tipos

Definição (Tipos e esquemas de tipos)

Suponha que tenhamos algumas constantes para tipos*, e uma quantidade infinita de* variáveis para tipos*. Então definimos* esquemas de tipo *da seguinte forma:*

(a) *todas as constantes para tipos e variáveis para tipos são esquemas de tipo;*

(b) *se α e β forem esquemas de tipo, então o mesmo acontece com $(\alpha \to \beta)$.*

Um tipo *é um esquema de tipo que não contém variáveis.*

Atribuição de Tipos a Combinadores
Convenções

Notação

Letras gregas minúsculas denotarão esquemas de tipo.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Convenções

Notação

Letras gregas minúsculas denotarão esquemas de tipo.
Na discussão dos numerais de Church usaremos a abreviação

Atribuição de Tipos a Combinadores
Convenções

Notação

Letras gregas minúsculas denotarão esquemas de tipo.
Na discussão dos numerais de Church usaremos a abreviação

$$\mathsf{N}_\alpha \equiv (\alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha.$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Convenções

Notação

Letras gregas minúsculas denotarão esquemas de tipo.
Na discussão dos numerais de Church usaremos a abreviação

$$\mathsf{N}_\alpha \equiv (\alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha.$$

Letras romanas minúsculas iniciais ('a', 'b', 'c', etc.) serão usadas para variáveis para tipos.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Convenções

Notação

Letras gregas minúsculas denotarão esquemas de tipo.
Na discussão dos numerais de Church usaremos a abreviação

$$\mathsf{N}_\alpha \equiv (\alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha.$$

Letras romanas minúsculas iniciais ('a', 'b', 'c', etc.) serão usadas para variáveis para tipos. Letras romanas minúsculas terminais ('x', 'y', etc.) serão usadas para variáveis para termos.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Convenções

Notação

Letras gregas minúsculas denotarão esquemas de tipo.
Na discussão dos numerais de Church usaremos a abreviação

$$\mathsf{N}_\alpha \equiv (\alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha.$$

Letras romanas minúsculas iniciais ('a', 'b', 'c', etc.) serão usadas para variáveis para tipos. Letras romanas minúsculas terminais ('x', 'y', etc.) serão usadas para variáveis para termos.
Um átomo não-redex *é um átomo diferente de* K *e* S.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Convenções

Notação

Letras gregas minúsculas denotarão esquemas de tipo.
Na discussão dos numerais de Church usaremos a abreviação

$$\mathsf{N}_\alpha \equiv (\alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha.$$

Letras romanas minúsculas iniciais ('a', 'b', 'c', etc.) serão usadas para variáveis para tipos. Letras romanas minúsculas terminais ('x', 'y', etc.) serão usadas para variáveis para termos.
Um átomo não-redex *é um átomo diferente de* K *e* S*.*
Uma constante não-redex *é uma constante diferente de* K *e* K*.*

Atribuição de Tipos a Combinadores

Convenções

Notação

Letras gregas minúsculas denotarão esquemas de tipo.
Na discussão dos numerais de Church usaremos a abreviação

$$\mathsf{N}_\alpha \equiv (\alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha.$$

Letras romanas minúsculas iniciais ('a', 'b', 'c', etc.) serão usadas para variáveis para tipos. Letras romanas minúsculas terminais ('x', 'y', etc.) serão usadas para variáveis para termos.
Um átomo não-redex *é um átomo diferente de* K *e* S*.*
Uma constante não-redex *é uma constante diferente de* K *e* K*.*
Um termo puro *é um termo cujos únicos átomos são* K, S, *e variáveis.*

Atribuição de Tipos a Combinadores

Convenções

Notação

Letras gregas minúsculas denotarão esquemas de tipo.
Na discussão dos numerais de Church usaremos a abreviação

$$\mathsf{N}_\alpha \equiv (\alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha.$$

Letras romanas minúsculas iniciais ('a', 'b', 'c', etc.) serão usadas para variáveis para tipos. Letras romanas minúsculas terminais ('x', 'y', etc.) serão usadas para variáveis para termos.

Um átomo não-redex *é um átomo diferente de* K *e* S*.*
Uma constante não-redex *é uma constante diferente de* K *e* K*.*
Um termo puro *é um termo cujos únicos átomos são* K, S, *e variáveis.*
Um combinador *contém apenas* K *e* S*.*

Atribuição de Tipos a Combinadores
Convenções

Observação

Uma expressão '$\alpha \to \beta$' contendo letras gregas não é um esquema de tipo.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Convenções

Observação

Uma expressão '$\alpha \to \beta$' contendo letras gregas não é um esquema de tipo. Trata-se apenas de um nome na meta-linguagem para um esquema de tipo não-especificado.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Convenções

Observação

Uma expressão '$\alpha \to \beta$' contendo letras gregas não é um esquema de tipo. Trata-se apenas de um nome na meta-linguagem para um esquema de tipo não-especificado.

Observação

Neste capítulo $\alpha \to \beta$ é usado para denotar algum conjunto de operadores ϕ tal que

Atribuição de Tipos a Combinadores

Convenções

Observação

Uma expressão '$\alpha \to \beta$' contendo letras gregas não é um esquema de tipo. Trata-se apenas de um nome na meta-linguagem para um esquema de tipo não-especificado.

Observação

Neste capítulo $\alpha \to \beta$ é usado para denotar algum conjunto de operadores ϕ tal que

$$x \in \alpha \quad \Rightarrow \quad \phi(x) \quad \textit{está definido e} \quad \phi(x) \in \beta.$$

Atribuição de Tipos a Combinadores
Convenções

Observação

Uma expressão '$\alpha \to \beta$' contendo letras gregas não é um esquema de tipo. Trata-se apenas de um nome na meta-linguagem para um esquema de tipo não-especificado.

Observação

Neste capítulo $\alpha \to \beta$ é usado para denotar algum conjunto de operadores ϕ tal que

$$x \in \alpha \quad \Rightarrow \quad \phi(x) \quad \text{está definido e} \quad \phi(x) \in \beta.$$

Isso difere do que acontece no capítulo 13,

Atribuição de Tipos a Combinadores
Convenções

Observação

Uma expressão '$\alpha \to \beta$' contendo letras gregas não é um esquema de tipo. Trata-se apenas de um nome na meta-linguagem para um esquema de tipo não-especificado.

Observação

Neste capítulo $\alpha \to \beta$ é usado para denotar algum conjunto de operadores ϕ tal que

$$x \in \alpha \quad \Rightarrow \quad \phi(x) \quad \text{está definido e} \quad \phi(x) \in \beta.$$

Isso difere do que acontece no capítulo 13, onde $\phi \in \alpha \to \beta$ implicava que o domínio de ϕ era exatamente α,

Atribuição de Tipos a Combinadores
Convenções

Observação

Uma expressão '$\alpha \to \beta$' contendo letras gregas não é um esquema de tipo. Trata-se apenas de um nome na meta-linguagem para um esquema de tipo não-especificado.

Observação

Neste capítulo $\alpha \to \beta$ é usado para denotar algum conjunto de operadores ϕ tal que

$$x \in \alpha \quad \Rightarrow \quad \phi(x) \quad \textit{está definido e} \quad \phi(x) \in \beta.$$

Isso difere do que acontece no capítulo 13, onde $\phi \in \alpha \to \beta$ implicava que o domínio de ϕ era exatamente α, mas aqui isso implica somente que o domínio contém *(não necessariamente propriamente) α.*

Atribuição de Tipos a Combinadores

Convenções

Observação

Uma expressão '$\alpha \to \beta$' contendo letras gregas não é um esquema de tipo. Trata-se apenas de um nome na meta-linguagem para um esquema de tipo não-especificado.

Observação

Neste capítulo $\alpha \to \beta$ é usado para denotar algum conjunto de operadores ϕ tal que

$$x \in \alpha \quad \Rightarrow \quad \phi(x) \quad \textit{está definido e} \quad \phi(x) \in \beta.$$

Isso difere do que acontece no capítulo 13, onde $\phi \in \alpha \to \beta$ implicava que o domínio de ϕ era exatamente α, mas aqui isso implica somente que o domínio contém *(não necessariamente propriamente) α. Isso decorre da intenção dos autores de permitir que um operador ϕ possa ter muitos tipos,*

Atribuição de Tipos a Combinadores

Convenções

Observação

Uma expressão '$\alpha \to \beta$' contendo letras gregas não é um esquema de tipo. Trata-se apenas de um nome na meta-linguagem para um esquema de tipo não-especificado.

Observação

Neste capítulo $\alpha \to \beta$ é usado para denotar algum conjunto de operadores ϕ tal que

$$x \in \alpha \quad \Rightarrow \quad \phi(x) \quad \text{está definido e} \quad \phi(x) \in \beta.$$

Isso difere do que acontece no capítulo 13, onde $\phi \in \alpha \to \beta$ implicava que o domínio de ϕ era exatamente α, mas aqui isso implica somente que o domínio contém *(não necessariamente propriamente) α. Isso decorre da intenção dos autores de permitir que um operador ϕ possa ter muitos tipos, i.e. que $\phi \in \alpha \to \beta$ possa ser verdadeiro para muitos α e β diferentes.*

Atribuição de Tipos a Combinadores
Fórmula de atribuição de tipos

Definição

Uma fórmula de atribuição de tipos *é qualquer expressão*

$$X \in \alpha$$

Atribuição de Tipos a Combinadores
Fórmula de atribuição de tipos

Definição

Uma fórmula de atribuição de tipos *é qualquer expressão*

$$X \in \alpha$$

onde X é um termo da Lógica Combinatória, e α é um esquema de tipo.

Atribuição de Tipos a Combinadores
Fórmula de atribuição de tipos

Definição

Uma fórmula de atribuição de tipos *é qualquer expressão*

$$X \in \alpha$$

onde X é um termo da Lógica Combinatória, e α *é um esquema de tipo. Seu* sujeito *é X e seu* predicado *é* α*.*

Atribuição de Tipos a Combinadores

Fórmula de atribuição de tipos

Definição

Uma fórmula de atribuição de tipos *é qualquer expressão*

$$X \in \alpha$$

onde X é um termo da Lógica Combinatória, e α é um esquema de tipo. Seu sujeito *é X e seu* predicado *é α.*

Uma fórmula $X \in \alpha$ é lida informalmente como ‘X é um membro de α’,

Atribuição de Tipos a Combinadores
Fórmula de atribuição de tipos

Definição

Uma fórmula de atribuição de tipos *é qualquer expressão*

$$X \in \alpha$$

onde X é um termo da Lógica Combinatória, e α é um esquema de tipo. Seu sujeito *é X e seu* predicado *é α.*

Uma fórmula $X \in \alpha$ é lida informalmente como 'X é um membro de α', ou mais formalmente como 'o esquema de tipo α é *atribuído ao termo* X'.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Sistema de atribuição de tipos

Definição (O sistema de atribuição de tipos AT_C)

AT_C é uma teoria formal no sentido do capítulo 6.

Atribuição de Tipos a Combinadores
Sistema de atribuição de tipos

Definição (O sistema de atribuição de tipos AT_C)

AT_C é uma teoria formal no sentido do capítulo 6. Suas fórmulas são expressões da forma $X \in \alpha$.

Atribuição de Tipos a Combinadores
Sistema de atribuição de tipos

Definição (O sistema de atribuição de tipos AT_C)

AT_C é uma teoria formal no sentido do capítulo 6. Suas fórmulas são expressões da forma $X \in \alpha$. AT_C tem dois esquemas de axioma, *motivados pelos tipos de* $\mathsf{K}_{\alpha,\beta}$ *e* $\mathsf{S}_{\alpha,\beta,\gamma}$ *na Definição 13.16:*

Atribuição de Tipos a Combinadores

Sistema de atribuição de tipos

Definição (O sistema de atribuição de tipos AT_C)

AT_C é uma teoria formal no sentido do capítulo 6. Suas fórmulas são expressões da forma $X \in \alpha$. AT_C tem dois esquemas de axioma, *motivados pelos tipos de* $\mathsf{K}_{\alpha,\beta}$ *e* $\mathsf{S}_{\alpha,\beta,\gamma}$ *na Definição 13.16:*

$(\rightarrow \mathsf{K}) \quad \mathsf{K} \in \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha,$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Sistema de atribuição de tipos

Definição (O sistema de atribuição de tipos AT_C)

AT_C é uma teoria formal no sentido do capítulo 6. Suas fórmulas são expressões da forma $X \in \alpha$. AT_C tem dois esquemas de axioma, *motivados pelos tipos de* $\mathsf{K}_{\alpha,\beta}$ *e* $\mathsf{S}_{\alpha,\beta,\gamma}$ *na Definição 13.16:*

$$(\to \mathsf{K}) \quad \mathsf{K} \in \alpha \to \beta \to \alpha,$$
$$(\to \mathsf{S}) \quad \mathsf{S} \in (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma.$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Sistema de atribuição de tipos

Definição (O sistema de atribuição de tipos AT_C)

AT_C é uma teoria formal no sentido do capítulo 6. Suas fórmulas são expressões da forma $X \in \alpha$. AT_C tem dois esquemas de axioma, *motivados pelos tipos de* $\mathsf{K}_{\alpha,\beta}$ *e* $\mathsf{S}_{\alpha,\beta,\gamma}$ *na Definição 13.16:*

$(\rightarrow \mathsf{K}) \quad \mathsf{K} \in \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha,$

$(\rightarrow \mathsf{S}) \quad \mathsf{S} \in (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma.$

Sua única regra é a chamada $\rightarrow$-eliminação *ou* $(\rightarrow \mathrm{e})$*;*

Atribuição de Tipos a Combinadores
Sistema de atribuição de tipos

Definição (O sistema de atribuição de tipos AT_C)

AT_C é uma teoria formal no sentido do capítulo 6. Suas fórmulas são expressões da forma $X \in \alpha$. AT_C tem dois esquemas de axioma, *motivados pelos tipos de* $\mathsf{K}_{\alpha,\beta}$ *e* $\mathsf{S}_{\alpha,\beta,\gamma}$ *na Definição 13.16:*

$(\rightarrow \mathsf{K}) \quad \mathsf{K} \in \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha,$

$(\rightarrow \mathsf{S}) \quad \mathsf{S} \in (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma.$

Sua única regra é a chamada $\rightarrow$-eliminação *ou* $(\rightarrow \mathrm{e})$*; tal regra é motivada pela Definição 13.16(b), e diz que*

Atribuição de Tipos a Combinadores

Sistema de atribuição de tipos

Definição (O sistema de atribuição de tipos AT_C)

AT_C é uma teoria formal no sentido do capítulo 6. Suas fórmulas são expressões da forma $X \in \alpha$. AT_C tem dois esquemas de axioma, *motivados pelos tipos de* $\mathsf{K}_{\alpha,\beta}$ *e* $\mathsf{S}_{\alpha,\beta,\gamma}$ *na Definição 13.16:*

$(\rightarrow \mathsf{K})\quad \mathsf{K} \in \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha,$

$(\rightarrow \mathsf{S})\quad \mathsf{S} \in (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma.$

Sua única regra é a chamada $\rightarrow$-eliminação *ou* $(\rightarrow \mathrm{e})$*; tal regra é motivada pela Definição 13.16(b), e diz que*

$$(\rightarrow \mathrm{e})\quad \frac{X \in \alpha \rightarrow \beta \qquad Y \in \alpha}{XY \in \beta}.$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Sistema de atribuição de tipos

Definição (Base para o sistema de atribuição de tipos AT_C)

Uma base $\mathcal{B}$ *é um conjunto finito ou infinito qualquer de fórmulas.*

Atribuição de Tipos a Combinadores
Sistema de atribuição de tipos

Definição (Base para o sistema de atribuição de tipos AT_C)

Uma base $\mathcal{B}$ *é um conjunto finito ou infinito qualquer de fórmulas. Se existe uma dedução de* $X \in \alpha$ *cujas hipóteses estejam todas em* $\mathcal{B}$*, escrevemos*

Atribuição de Tipos a Combinadores

Sistema de atribuição de tipos

Definição (Base para o sistema de atribuição de tipos AT_C)

Uma base $\mathcal{B}$ *é um conjunto finito ou infinito qualquer de fórmulas. Se existe uma dedução de $X \in \alpha$ cujas hipóteses estejam todas em $\mathcal{B}$, escrevemos*

$$\mathcal{B} \vdash_{AT_C} X \in \alpha,$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Sistema de atribuição de tipos

Definição (Base para o sistema de atribuição de tipos AT_C)

Uma base $\mathcal{B}$ *é um conjunto finito ou infinito qualquer de fórmulas. Se existe uma dedução de* $X \in \alpha$ *cujas hipóteses estejam todas em* $\mathcal{B}$*, escrevemos*

$$\mathcal{B} \vdash_{AT_C} X \in \alpha,$$

ou simplesmente $\mathcal{B} \vdash X \in \alpha$ *quando não causar confusão.*

Atribuição de Tipos a Combinadores

Sistema de atribuição de tipos

Definição (Base para o sistema de atribuição de tipos AT_C)

Uma base $\mathcal{B}$ *é um conjunto finito ou infinito qualquer de fórmulas. Se existe uma dedução de* $X \in \alpha$ *cujas hipóteses estejam todas em* $\mathcal{B}$*, escrevemos*

$$\mathcal{B} \vdash_{AT_C} X \in \alpha,$$

ou simplesmente $\mathcal{B} \vdash X \in \alpha$ *quando não causar confusão. Se* $\mathcal{B}$ *for vazia, escrevemos*

Atribuição de Tipos a Combinadores
Sistema de atribuição de tipos

Definição (Base para o sistema de atribuição de tipos AT_C)

Uma base $\mathcal{B}$ *é um conjunto finito ou infinito qualquer de fórmulas. Se existe uma dedução de* $X \in \alpha$ *cujas hipóteses estejam todas em* $\mathcal{B}$, *escrevemos*

$$\mathcal{B} \vdash_{AT_C} X \in \alpha,$$

ou simplesmente $\mathcal{B} \vdash X \in \alpha$ *quando não causar confusão. Se* $\mathcal{B}$ *for vazia, escrevemos*

$$\vdash_{AT_C} X \in \alpha.$$

Atribuição de Tipos a Combinadores
Lema da substituição

Lema (Lema da substituição)

Seja $\mathcal{B}$ uma base qualquer e suponha que

Atribuição de Tipos a Combinadores
Lema da substituição

Lema (Lema da substituição)

Seja $\mathcal{B}$ uma base qualquer e suponha que

$$\mathcal{B} \vdash_{AT_C} X \in \alpha.$$

Seja $[\beta_1/a_1, \ldots, \beta_k/a_k]\mathcal{B}$ a base obtida colocando-se $\beta_1, \ldots, \beta_k$ no lugar de $a_1, \ldots, a_k$ simultaneamente em todos os predicados em $\mathcal{B}$.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Lema da substituição

Lema (Lema da substituição)

Seja $\mathcal{B}$ uma base qualquer e suponha que

$$\mathcal{B} \vdash_{AT_C} X \in \alpha.$$

Seja $[\beta_1/a_1, \ldots, \beta_k/a_k]\mathcal{B}$ a base obtida colocando-se $\beta_1, \ldots, \beta_k$ no lugar de $a_1, \ldots, a_k$ simultaneamente em todos os predicados em $\mathcal{B}$. Então

$$[\beta_1/a_1, \ldots, \beta_k/a_k]\mathcal{B} \quad \vdash_{AT_C} \quad X \in [\beta_1/a_1, \ldots, \beta_k/a_k]\alpha.$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do lema da substituição

Demonstração.

Ponha os β's no lugar dos *a*'s em toda a dedução.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do lema da substituição

Demonstração.

Ponha os β's no lugar dos *a*'s em toda a dedução. Tal substituição cria, a partir de um axioma ($\rightarrow$ K) ou ($\rightarrow$ S) um novo axioma ($\rightarrow$ K) ou ($\rightarrow$ S), e a partir de uma instância de ($\rightarrow \mathrm{e}$) uma nova instância de ($\rightarrow \mathrm{e}$). $\square$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Dedução a partir de bases

Observação

A dedução a partir de uma base $\mathcal{B}$ serve para responder a questões do tipo 'Que tipo teria X se determinadas partes de X tivesse certos tipos?'.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Dedução a partir de bases

Observação

A dedução a partir de uma base $\mathcal{B}$ serve para responder a questões do tipo 'Que tipo teria X se determinadas partes de X tivesse certos tipos?'.

Definição (Tipos de base)

Tal qual antes, uma base $\mathcal{B}$ é um conjunto qualquer vazio, finito ou infinito de fórmulas, digamos

Atribuição de Tipos a Combinadores

Dedução a partir de bases

Observação

A dedução a partir de uma base $\mathcal{B}$ serve para responder a questões do tipo 'Que tipo teria X se determinadas partes de X tivesse certos tipos?'.

Definição (Tipos de base)

Tal qual antes, uma base $\mathcal{B}$ é um conjunto qualquer vazio, finito ou infinito de fórmulas, digamos

$$U_1 \in \delta_1, \quad U_2 \in \delta_2, \quad \ldots.$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Dedução a partir de bases

Observação

A dedução a partir de uma base $\mathcal{B}$ serve para responder a questões do tipo 'Que tipo teria X se determinadas partes de X tivesse certos tipos?'.

Definição (Tipos de base)

Tal qual antes, uma base $\mathcal{B}$ é um conjunto qualquer vazio, finito ou infinito de fórmulas, digamos

$$U_1 \in \delta_1, \quad U_2 \in \delta_2, \quad \ldots.$$

$\mathcal{B}$ é uma base de sujeitos fracamente (fortemente) normais *sse cada U_i for fracamente (fortemente) irredutível e comece com um átomo não-redex.*

Atribuição de Tipos a Combinadores

Dedução a partir de bases

Observação

A dedução a partir de uma base $\mathcal{B}$ serve para responder a questões do tipo 'Que tipo teria X se determinadas partes de X tivesse certos tipos?'.

Definição (Tipos de base)

Tal qual antes, uma base $\mathcal{B}$ é um conjunto qualquer vazio, finito ou infinito de fórmulas, digamos

$$U_1 \in \delta_1, \quad U_2 \in \delta_2, \quad \ldots.$$

$\mathcal{B}$ é uma base de sujeitos fracamente (fortemente) normais *sse cada U_i for fracamente (fortemente) irredutível e comece com um átomo não-redex. (Cada U_i desses tem que ter a forma*

Atribuição de Tipos a Combinadores
Dedução a partir de bases

Observação

A dedução a partir de uma base $\mathcal{B}$ serve para responder a questões do tipo 'Que tipo teria X se determinadas partes de X tivesse certos tipos?'.

Definição (Tipos de base)

Tal qual antes, uma base $\mathcal{B}$ é um conjunto qualquer vazio, finito ou infinito de fórmulas, digamos

$$U_1 \in \delta_1, \quad U_2 \in \delta_2, \quad \ldots .$$

$\mathcal{B}$ *é uma* base de sujeitos fracamente (fortemente) normais *sse cada U_i for fracamente (fortemente) irredutível e comece com um átomo não-redex. (Cada U_i desses tem que ter a forma*

$$U_i \equiv q_i V_{i,1} \ldots V_{i,k_i}$$

Atribuição de Tipos a Combinadores
Dedução a partir de bases

Observação

A dedução a partir de uma base $\mathcal{B}$ serve para responder a questões do tipo 'Que tipo teria X se determinadas partes de X tivesse certos tipos?'.

Definição (Tipos de base)

Tal qual antes, uma base $\mathcal{B}$ é um conjunto qualquer vazio, finito ou infinito de fórmulas, digamos

$$U_1 \in \delta_1, \quad U_2 \in \delta_2, \quad \ldots .$$

$\mathcal{B}$ é uma base de sujeitos fracamente (fortemente) normais *sse cada U_i for fracamente (fortemente) irredutível e comece com um átomo não-redex. (Cada U_i desses tem que ter a forma*

$$U_i \equiv q_i V_{i,1} \ldots V_{i,k_i}$$

onde q_i é um átomo não-redex e cada $V_{i,j}$ é irredutível.)

Atribuição de Tipos a Combinadores

Dedução a partir de bases

Definição (Tipos de base (cont.))

$\mathcal{B}$ *é uma* base mono-esquemática *sse cada* U_i *for uma constante não-redex,*

Atribuição de Tipos a Combinadores
Dedução a partir de bases

Definição (Tipos de base (cont.))

$\mathcal{B}$ é uma base mono-esquemática *sse cada U_i for uma constante não-redex, e as fórmulas forem exatamente o conjunto de todas as instâncias de substituição de algum conjunto de 'fòrmulas principais',*

Atribuição de Tipos a Combinadores
Dedução a partir de bases

Definição (Tipos de base (cont.))

$\mathcal{B}$ é uma base mono-esquemática *sse cada U_i for uma constante não-redex, e as fórmulas forem exatamente o conjunto de todas as instâncias de substituição de algum conjunto de 'fòrmulas principais', uma para cada constante em $\mathcal{B}$.*

Atribuição de Tipos a Combinadores
Dedução a partir de bases

Definição (Tipos de base (cont.))

$\mathcal{B}$ é uma base mono-esquemática *sse cada U_i for uma constante não-redex, e as fórmulas forem exatamente o conjunto de todas as instâncias de substituição de algum conjunto de 'fòrmulas principais', uma para cada constante em $\mathcal{B}$. Mais precisamente, $\mathcal{B}$ é mono-esquemática sse cada U_i for uma constante não-redex e,*

Atribuição de Tipos a Combinadores

Dedução a partir de bases

Definição (Tipos de base (cont.))

$\mathcal{B}$ *é uma* base mono-esquemática *sse cada* U_i *for uma constante não-redex, e as fórmulas forem exatamente o conjunto de todas as instâncias de substituição de algum conjunto de 'fòrmulas principais', uma para cada constante em* $\mathcal{B}$. *Mais precisamente,* $\mathcal{B}$ *é mono-esquemática sse cada* U_i *for uma constante não-redex e, para cada* U *ocorrendo como um sujeito em* $\mathcal{B}$

Atribuição de Tipos a Combinadores
Dedução a partir de bases

Definição (Tipos de base (cont.))

$\mathcal{B}$ é uma base mono-esquemática *sse cada U_i for uma constante não-redex, e as fórmulas forem exatamente o conjunto de todas as instâncias de substituição de algum conjunto de 'fòrmulas principais', uma para cada constante em $\mathcal{B}$. Mais precisamente, $\mathcal{B}$ é mono-esquemática sse cada U_i for uma constante não-redex e, para cada U ocorrendo como um sujeito em $\mathcal{B}$ (digamos,*

Atribuição de Tipos a Combinadores

Dedução a partir de bases

Definição (Tipos de base (cont.))

$\mathcal{B}$ é uma base mono-esquemática *sse cada U_i for uma constante não-redex, e as fórmulas forem exatamente o conjunto de todas as instâncias de substituição de algum conjunto de 'fòrmulas principais', uma para cada constante em $\mathcal{B}$. Mais precisamente, $\mathcal{B}$ é mono-esquemática sse cada U_i for uma constante não-redex e, para cada U ocorrendo como um sujeito em $\mathcal{B}$ (digamos, $U \equiv U_{i_1} \equiv U_{i_2} \equiv \ldots$),*

Atribuição de Tipos a Combinadores
Dedução a partir de bases

Definição (Tipos de base (cont.))

$\mathcal{B}$ *é uma* base mono-esquemática *sse cada* U_i *for uma constante não-redex, e as fórmulas forem exatamente o conjunto de todas as instâncias de substituição de algum conjunto de 'fòrmulas principais', uma para cada constante em* $\mathcal{B}$*. Mais precisamente,* $\mathcal{B}$ *é mono-esquemática sse cada* U_i *for uma constante não-redex e, para cada* U *ocorrendo como um sujeito em* $\mathcal{B}$ *(digamos,* $U \equiv U_{i_1} \equiv U_{i_2} \equiv \ldots$*), existe um* i_j *tal que* $\{\delta_{i_1}, \delta_{i_2}, \ldots\}$ *é exatamente o conjunto de todas as instâncias de substituição de* δ_{i_j}*.*

Atribuição de Tipos a Combinadores
Dedução a partir de bases

Definição (Tipos de base (cont.))

$\mathcal{B}$ *é uma* base mono-esquemática *sse cada U_i for uma constante não-redex, e as fórmulas forem exatamente o conjunto de todas as instâncias de substituição de algum conjunto de 'fòrmulas principais', uma para cada constante em $\mathcal{B}$. Mais precisamente, $\mathcal{B}$ é mono-esquemática sse cada U_i for uma constante não-redex e, para cada U ocorrendo como um sujeito em $\mathcal{B}$ (digamos, $U \equiv U_{i_1} \equiv U_{i_2} \equiv \ldots$), existe um i_j tal que $\{\delta_{i_1}, \delta_{i_2}, \ldots\}$ é exatamente o conjunto de todas as instâncias de substituição de δ_{i_j}. A fórmula $U \in \delta_{i_j}$ é chamada de* fórmula principal *para U em $\mathcal{B}$.*

Atribuição de Tipos a Combinadores

Dedução a partir de bases

Exemplo (Uma base mono-esquemática)

Suponha que incluamos os átomos $\overline{0}$, $\overline{\sigma}$, Z, *na definição de termo,*

Atribuição de Tipos a Combinadores

Dedução a partir de bases

Exemplo (Uma base mono-esquemática)

Suponha que incluamos os átomos $\overline{0}$, $\overline{\sigma}$, Z, *na definição de termo, conforme sugerido na Discussão 4.19,*

Atribuição de Tipos a Combinadores

Dedução a partir de bases

Exemplo (Uma base mono-esquemática)

Suponha que incluamos os átomos $\overline{0}$, $\overline{\sigma}$, Z, *na definição de termo, conforme sugerido na Discussão 4.19, e incluamos uma constante para tipo* N *para o conjunto de todos os números naturais.*

Atribuição de Tipos a Combinadores

Dedução a partir de bases

Exemplo (Uma base mono-esquemática)

Suponha que incluamos os átomos $\overline{0}$, $\overline{\sigma}$, Z, *na definição de termo, conforme sugerido na Discussão 4.19, e incluamos uma constante para tipo* N *para o conjunto de todos os números naturais. Suponha que a definição de redução seja modificada para incluir*

Atribuição de Tipos a Combinadores
Dedução a partir de bases

Exemplo (Uma base mono-esquemática)

Suponha que incluamos os átomos $\overline{0}$, $\overline{\sigma}$, Z, *na definição de termo, conforme sugerido na Discussão 4.19, e incluamos uma constante para tipo* N *para o conjunto de todos os números naturais. Suponha que a definição de redução seja modificada para incluir*

$$Z\overline{n} \triangleright Z_n,$$

Atribuição de Tipos a Combinadores
Dedução a partir de bases

Exemplo (Uma base mono-esquemática)

Suponha que incluamos os átomos $\overline{0}$, $\overline{\sigma}$, Z, *na definição de termo, conforme sugerido na Discussão 4.19, e incluamos uma constante para tipo* N *para o conjunto de todos os números naturais. Suponha que a definição de redução seja modificada para incluir*

$$Z\overline{n} \triangleright Z_n,$$

conforme sugerido em (4.22).

Atribuição de Tipos a Combinadores

Dedução a partir de bases

Exemplo (Uma base mono-esquemática)

Suponha que incluamos os átomos $\overline{0}$, $\overline{\sigma}$, Z, *na definição de termo, conforme sugerido na Discussão 4.19, e incluamos uma constante para tipo* N *para o conjunto de todos os números naturais. Suponha que a definição de redução seja modificada para incluir*

$$\mathsf{Z}\overline{n} \triangleright \mathsf{Z}_n,$$

conforme sugerido em (4.22). Então um conjunto natural de hipóteses é

Atribuição de Tipos a Combinadores
Dedução a partir de bases

Exemplo (Uma base mono-esquemática)

Suponha que incluamos os átomos $\overline{0}$, $\overline{\sigma}$, Z, *na definição de termo, conforme sugerido na Discussão 4.19, e incluamos uma constante para tipo* N *para o conjunto de todos os números naturais. Suponha que a definição de redução seja modificada para incluir*

$$\mathsf{Z}\overline{n} \triangleright \mathsf{Z}_n,$$

conforme sugerido em (4.22). Então um conjunto natural de hipóteses é

(a) $\qquad \overline{0} \in \mathsf{N}, \quad \overline{\sigma} \in \mathsf{N} \to \mathsf{N}, \quad \mathsf{Z} \in \mathsf{N} \to \mathsf{N}_\alpha,$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Dedução a partir de bases

Exemplo (Uma base mono-esquemática)

Suponha que incluamos os átomos $\overline{0}$, $\overline{\sigma}$, Z, *na definição de termo, conforme sugerido na Discussão 4.19, e incluamos uma constante para tipo* N *para o conjunto de todos os números naturais. Suponha que a definição de redução seja modificada para incluir*

$$\mathsf{Z}\overline{n} \triangleright \mathsf{Z}_n,$$

conforme sugerido em (4.22). Então um conjunto natural de hipóteses é

(a) $\quad \overline{0} \in \mathsf{N}, \quad \overline{\sigma} \in \mathsf{N} \to \mathsf{N}, \quad \mathsf{Z} \in \mathsf{N} \to \mathsf{N}_\alpha,$

onde $\mathsf{N}_\alpha \equiv (\alpha \to \alpha)\alpha \to \alpha$.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Dedução a partir de bases

Exemplo (Uma base mono-esquemática)

Suponha que incluamos os átomos $\overline{0}$, $\overline{\sigma}$, Z, *na definição de termo, conforme sugerido na Discussão 4.19, e incluamos uma constante para tipo* N *para o conjunto de todos os números naturais. Suponha que a definição de redução seja modificada para incluir*

$$Z\overline{n} \triangleright Z_n,$$

conforme sugerido em (4.22). Então um conjunto natural de hipóteses é

(a) $\overline{0} \in \mathsf{N}, \quad \overline{\sigma} \in \mathsf{N} \to \mathsf{N}, \quad \mathsf{Z} \in \mathsf{N} \to \mathsf{N}_\alpha,$

onde $\mathsf{N}_\alpha \equiv (\alpha \to \alpha)\alpha \to \alpha$. *Essa base contém um número infinito de fórmulas* $\mathsf{Z} \in \mathsf{N} \to \mathsf{N}_\alpha$,

Atribuição de Tipos a Combinadores
Dedução a partir de bases

Exemplo (Uma base mono-esquemática)

Suponha que incluamos os átomos $\overline{0}$, $\overline{\sigma}$, Z, *na definição de termo, conforme sugerido na Discussão 4.19, e incluamos uma constante para tipo* N *para o conjunto de todos os números naturais. Suponha que a definição de redução seja modificada para incluir*

$$\mathsf{Z}\overline{n} \triangleright \mathsf{Z}_n,$$

conforme sugerido em (4.22). Então um conjunto natural de hipóteses é

(a) $\qquad \overline{0} \in \mathsf{N}, \quad \overline{\sigma} \in \mathsf{N} \to \mathsf{N}, \quad \mathsf{Z} \in \mathsf{N} \to \mathsf{N}_\alpha,$

onde $\mathsf{N}_\alpha \equiv (\alpha \to \alpha)\alpha \to \alpha$*. Essa base contém um número infinito de fórmulas* $\mathsf{Z} \in \mathsf{N} \to \mathsf{N}_\alpha$*, a saber, uma para cada* α*.*

Atribuição de Tipos a Combinadores
Dedução a partir de bases

Exemplo (Uma base mono-esquemática)

Suponha que incluamos os átomos $\overline{0}$, $\overline{\sigma}$, Z, *na definição de termo, conforme sugerido na Discussão 4.19, e incluamos uma constante para tipo* N *para o conjunto de todos os números naturais. Suponha que a definição de redução seja modificada para incluir*

$$\mathsf{Z}\overline{n} \triangleright \mathsf{Z}_n,$$

conforme sugerido em (4.22). Então um conjunto natural de hipóteses é

(a) $\qquad \overline{0} \in \mathsf{N}, \quad \overline{\sigma} \in \mathsf{N} \to \mathsf{N}, \quad \mathsf{Z} \in \mathsf{N} \to \mathsf{N}_\alpha,$

onde $\mathsf{N}_\alpha \equiv (\alpha \to \alpha)\alpha \to \alpha$. *Essa base contém um número infinito de fórmulas* $\mathsf{Z} \in \mathsf{N} \to \mathsf{N}_\alpha$, *a saber, uma para cada* α. *Mas para todos os esquemas de tipo* $\mathsf{N} \to \mathsf{N}_\alpha$ *são instâncias de substituição do esquema de tipo*

Atribuição de Tipos a Combinadores

Dedução a partir de bases

Exemplo (Uma base mono-esquemática)

Suponha que incluamos os átomos $\overline{0}$, $\overline{\sigma}$, Z, *na definição de termo, conforme sugerido na Discussão 4.19, e incluamos uma constante para tipo* N *para o conjunto de todos os números naturais. Suponha que a definição de redução seja modificada para incluir*

$$\mathsf{Z}\overline{n} \rhd \mathsf{Z}_n,$$

conforme sugerido em (4.22). Então um conjunto natural de hipóteses é

(a) $\overline{0} \in \mathsf{N}, \quad \overline{\sigma} \in \mathsf{N} \to \mathsf{N}, \quad \mathsf{Z} \in \mathsf{N} \to \mathsf{N}_\alpha,$

onde $\mathsf{N}_\alpha \equiv (\alpha \to \alpha)\alpha \to \alpha$. *Essa base contém um número infinito de fórmulas* $\mathsf{Z} \in \mathsf{N} \to \mathsf{N}_\alpha$, *a saber, uma para cada* α. *Mas para todos os esquemas de tipo* $\mathsf{N} \to \mathsf{N}_\alpha$ *são instâncias de substituição do esquema de tipo*

$$\mathsf{N} \to \mathsf{N}_a$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Dedução a partir de bases

Exemplo (Uma base mono-esquemática)

Suponha que incluamos os átomos $\overline{0}$, $\overline{\sigma}$, Z, *na definição de termo, conforme sugerido na Discussão 4.19, e incluamos uma constante para tipo* N *para o conjunto de todos os números naturais. Suponha que a definição de redução seja modificada para incluir*

$$\mathsf{Z}\overline{n} \triangleright \mathsf{Z}_n,$$

conforme sugerido em (4.22). Então um conjunto natural de hipóteses é

(a) $\qquad \overline{0} \in \mathsf{N}, \quad \overline{\sigma} \in \mathsf{N} \to \mathsf{N}, \quad \mathsf{Z} \in \mathsf{N} \to \mathsf{N}_\alpha,$

onde $\mathsf{N}_\alpha \equiv (\alpha \to \alpha)\alpha \to \alpha$. *Essa base contém um número infinito de fórmulas* $\mathsf{Z} \in \mathsf{N} \to \mathsf{N}_\alpha$, *a saber, uma para cada* α. *Mas para todos os esquemas de tipo* $\mathsf{N} \to \mathsf{N}_\alpha$ *são instâncias de substituição do esquema de tipo*

$$\mathsf{N} \to \mathsf{N}_a$$

portanto a base é mono-esquemática.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Dedução a partir de bases

Observação

Se a base for mono-esquemática, seus membros podem ser usados exatamente como os axiomas para K *e* S*.*

Atribuição de Tipos a Combinadores

Dedução a partir de bases

Observação

Se a base for mono-esquemática, seus membros podem ser usados exatamente como os axiomas para K *e* S. *Deduções a partir de bases mono-esquemáticas acabam se tornando casos bons para estudo:*

Atribuição de Tipos a Combinadores

Dedução a partir de bases

Observação

Se a base for mono-esquemática, seus membros podem ser usados exatamente como os axiomas para K *e* S*. Deduções a partir de bases mono-esquemáticas acabam se tornando casos bons para estudo: por exemplo, no Lema 14.11, se* $\mathcal{B}$ *for mono-esquemática, então podemos substituir*

Atribuição de Tipos a Combinadores
Dedução a partir de bases

Observação

Se a base for mono-esquemática, seus membros podem ser usados exatamente como os axiomas para K *e* S. *Deduções a partir de bases mono-esquemáticas acabam se tornando casos bons para estudo: por exemplo, no Lema 14.11, se $\mathcal{B}$ for mono-esquemática, então podemos substituir*

$$[\beta_1/a_1, \ldots, \beta_n/a_n]\mathcal{B}$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Dedução a partir de bases

Observação

Se a base for mono-esquemática, seus membros podem ser usados exatamente como os axiomas para K *e* S*. Deduções a partir de bases mono-esquemáticas acabam se tornando casos bons para estudo: por exemplo, no Lema 14.11, se* $\mathcal{B}$ *for mono-esquemática, então podemos substituir*

$$[\beta_1/a_1, \ldots, \beta_n/a_n]\mathcal{B}$$

por simplesmente '$\mathcal{B}$*'.*

Atribuição de Tipos a Combinadores

Dedução a partir de bases

Observação

Se a base for mono-esquemática, seus membros podem ser usados exatamente como os axiomas para K *e* S*. Deduções a partir de bases mono-esquemáticas acabam se tornando casos bons para estudo: por exemplo, no Lema 14.11, se* $\mathcal{B}$ *for mono-esquemática, então podemos substituir*

$$[\beta_1/a_1, \ldots, \beta_n/a_n]\mathcal{B}$$

por simplesmente '$\mathcal{B}$*'. Também, veremos que para qualquer termo* X*,*

Atribuição de Tipos a Combinadores
Dedução a partir de bases

Observação

Se a base for mono-esquemática, seus membros podem ser usados exatamente como os axiomas para K *e* S*. Deduções a partir de bases mono-esquemáticas acabam se tornando casos bons para estudo: por exemplo, no Lema 14.11, se* $\mathcal{B}$ *for mono-esquemática, então podemos substituir*

$$[\beta_1/a_1, \ldots, \beta_n/a_n]\mathcal{B}$$

por simplesmente '$\mathcal{B}$*'. Também, veremos que para qualquer termo* X*, os esquemas de tipo dedutíveis para* X *a partir de uma base mono-esquemática são todas as instâncias de substituição de um 'esquema de tipo principal'.*

Atribuição de Tipos a Combinadores
Dedução a partir de bases

Observação

Se a base for mono-esquemática, seus membros podem ser usados exatamente como os axiomas para K *e* S*. Deduções a partir de bases mono-esquemáticas acabam se tornando casos bons para estudo: por exemplo, no Lema 14.11, se $\mathcal{B}$ for mono-esquemática, então podemos substituir*

$$[\beta_1/a_1, \ldots, \beta_n/a_n]\mathcal{B}$$

por simplesmente '$\mathcal{B}$'. Também, veremos que para qualquer termo X, os esquemas de tipo dedutíveis para X a partir de uma base mono-esquemática são todas as instâncias de substituição de um 'esquema de tipo principal'.
Mas outros tipos de base são de interesse também, tais como os exemplos a seguir.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Dedução a partir de bases

Exemplo

Tomemos a base como sendo um conjunto de termos puros, e uma constante para tipos N*,*

Atribuição de Tipos a Combinadores
Dedução a partir de bases

Exemplo

Tomemos a base como sendo um conjunto de termos puros, e uma constante para tipos N*, e desejamos olhar para os numerais de Church.*

Atribuição de Tipos a Combinadores

Dedução a partir de bases

Exemplo

Tomemos a base como sendo um conjunto de termos puros, e uma constante para tipos N*, e desejamos olhar para os numerais de Church. Então um conjunto natural de hipóteses é o seguinte:*

Atribuição de Tipos a Combinadores
Dedução a partir de bases

Exemplo

Tomemos a base como sendo um conjunto de termos puros, e uma constante para tipos N*, e desejamos olhar para os numerais de Church. Então um conjunto natural de hipóteses é o seguinte:*

(a) $\quad \mathsf{KI} \in \mathsf{N}, \quad \mathsf{SB} \in \mathsf{N} \to \mathsf{N}.$

Atribuição de Tipos a Combinadores
Dedução a partir de bases

Exemplo

Tomemos a base como sendo um conjunto de termos puros, e uma constante para tipos N, *e desejamos olhar para os numerais de Church. Então um conjunto natural de hipóteses é o seguinte:*

(a) $$\mathsf{KI} \in \mathsf{N}, \quad \mathsf{SB} \in \mathsf{N} \to \mathsf{N}.$$

Trata-se de uma base que não é de sujeitos fracamente normais, pois seus sujeitos começam com combinadores.

Atribuição de Tipos a Combinadores
Dedução a partir de bases

Exemplo

Tomemos a base como sendo um conjunto de termos puros, e uma constante para tipos N, *e desejamos olhar para os numerais de Church. Então um conjunto natural de hipóteses é o seguinte:*

(a) $$\mathsf{KI} \in \mathsf{N}, \quad \mathsf{SB} \in \mathsf{N} \to \mathsf{N}.$$

Trata-se de uma base que não é de sujeitos fracamente normais, pois seus sujeitos começam com combinadores. Alternativamente, poderíamos assumir a infinitude de fórmulas:

Atribuição de Tipos a Combinadores
Dedução a partir de bases

Exemplo

Tomemos a base como sendo um conjunto de termos puros, e uma constante para tipos N*, e desejamos olhar para os numerais de Church. Então um conjunto natural de hipóteses é o seguinte:*

(a) $\mathsf{KI} \in \mathsf{N}, \quad \mathsf{SB} \in \mathsf{N} \rightarrow \mathsf{N}.$

Trata-se de uma base que não é de sujeitos fracamente normais, pois seus sujeitos começam com combinadores. Alternativamente, poderíamos assumir a infinitude de fórmulas:

(b) $(\mathsf{SB})^n(\mathsf{KI}) \in \mathsf{N} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$

Atribuição de Tipos a Combinadores
Dedução a partir de bases

Exemplo

Tomemos a base como sendo um conjunto de termos puros, e uma constante para tipos N*, e desejamos olhar para os numerais de Church. Então um conjunto natural de hipóteses é o seguinte:*

(a) $\mathsf{KI} \in \mathsf{N}, \quad \mathsf{SB} \in \mathsf{N} \to \mathsf{N}.$

Trata-se de uma base que não é de sujeitos fracamente normais, pois seus sujeitos começam com combinadores. Alternativamente, poderíamos assumir a infinitude de fórmulas:

(b) $(\mathsf{SB})^n(\mathsf{KI}) \in \mathsf{N} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$

Novamente, temos uma base que não é de sujeitos fracamente normais,

Atribuição de Tipos a Combinadores
Dedução a partir de bases

Exemplo

Tomemos a base como sendo um conjunto de termos puros, e uma constante para tipos N*, e desejamos olhar para os numerais de Church. Então um conjunto natural de hipóteses é o seguinte:*

(a) $\mathsf{KI} \in \mathsf{N}, \quad \mathsf{SB} \in \mathsf{N} \to \mathsf{N}.$

Trata-se de uma base que não é de sujeitos fracamente normais, pois seus sujeitos começam com combinadores. Alternativamente, poderíamos assumir a infinitude de fórmulas:

(b) $(\mathsf{SB})^n(\mathsf{KI}) \in \mathsf{N} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$

Novamente, temos uma base que não é de sujeitos fracamente normais, mas tem algumas das propriedades de tais bases, como veremos adiante.

Atribuição de Tipos a Combinadores
Dedução a partir de bases

Observação (Propriedade da construção de sujeito)

Note que a dedução de uma fórmula $X \in \alpha$ *segue de perto a construção de* X.

Atribuição de Tipos a Combinadores
Dedução a partir de bases

Observação (Propriedade da construção de sujeito)

Note que a dedução de uma fórmula $X \in \alpha$ *segue de perto a construção de* X*. Na regra* $(\to \mathrm{e})$*, o sujeito da conclusão é construído a partir dos sujeitos das premissas,*

Atribuição de Tipos a Combinadores

Dedução a partir de bases

Observação (Propriedade da construção de sujeito)

Note que a dedução de uma fórmula $X \in \alpha$ segue de perto a construção de X. Na regra $(\rightarrow \mathrm{e})$, o sujeito da conclusão é construído a partir dos sujeitos das premissas, de modo que à medida que descemos na dedução o sujeito cresce em comprimento, e contém todos os sujeitos anteriores.

Atribuição de Tipos a Combinadores
Dedução a partir de bases

Observação (Propriedade da construção de sujeito)

Note que a dedução de uma fórmula $X \in \alpha$ segue de perto a construção de X. Na regra $(\rightarrow \mathrm{e})$, o sujeito da conclusão é construído a partir dos sujeitos das premissas, de modo que à medida que descemos na dedução o sujeito cresce em comprimento, e contém todos os sujeitos anteriores.
Em mais detalhes:

Atribuição de Tipos a Combinadores
Dedução a partir de bases

Observação (Propriedade da construção de sujeito)

Note que a dedução de uma fórmula $X \in \alpha$ *segue de perto a construção de* X. *Na regra* $(\rightarrow \mathrm{e})$, *o sujeito da conclusão é construído a partir dos sujeitos das premissas, de modo que à medida que descemos na dedução o sujeito cresce em comprimento, e contém todos os sujeitos anteriores.*
Em mais detalhes: Seja $\mathcal{D}$ *uma dedução em forma de árvore de* $X \in \alpha$ *a partir de hipóteses*

Atribuição de Tipos a Combinadores
Dedução a partir de bases

Observação (Propriedade da construção de sujeito)

Note que a dedução de uma fórmula $X \in \alpha$ segue de perto a construção de X. Na regra $(\rightarrow \mathrm{e})$, o sujeito da conclusão é construído a partir dos sujeitos das premissas, de modo que à medida que descemos na dedução o sujeito cresce em comprimento, e contém todos os sujeitos anteriores.
Em mais detalhes: Seja $\mathcal{D}$ uma dedução em forma de árvore de $X \in \alpha$ a partir de hipóteses

(a) $$U_1 \in \delta_1, \ldots, U_n \in \delta_n \qquad (n \geq 0)$$

Atribuição de Tipos a Combinadores
Dedução a partir de bases

Observação (Propriedade da construção de sujeito)

Note que a dedução de uma fórmula $X \in \alpha$ segue de perto a construção de X. Na regra $(\rightarrow \mathrm{e})$, o sujeito da conclusão é construído a partir dos sujeitos das premissas, de modo que à medida que descemos na dedução o sujeito cresce em comprimento, e contém todos os sujeitos anteriores.
Em mais detalhes: Seja $\mathcal{D}$ uma dedução em forma de árvore de $X \in \alpha$ a partir de hipóteses
(a) $$U_1 \in \delta_1, \ldots, U_n \in \delta_n \qquad (n \geq 0)$$
tal que cada uma dessas fórmulas de fato ocorra em $\mathcal{D}$.

Atribuição de Tipos a Combinadores
Abstração e tipos

Teorema (Abstração e tipos)

Seja $\mathcal{B}$ uma base qualquer.

Atribuição de Tipos a Combinadores
Abstração e tipos

Teorema (Abstração e tipos)

Seja $\mathcal{B}$ uma base qualquer. Se x não ocorre em nenhum sujeito em $\mathcal{B}$,

Atribuição de Tipos a Combinadores
Abstração e tipos

Teorema (Abstração e tipos)

Seja $\mathcal{B}$ uma base qualquer. Se x não ocorre em nenhum sujeito em $\mathcal{B}$, e se

Atribuição de Tipos a Combinadores
Abstração e tipos

Teorema (Abstração e tipos)

Seja $\mathcal{B}$ uma base qualquer. Se x não ocorre em nenhum sujeito em $\mathcal{B}$, e se

$$\mathcal{B}, \quad x \in \alpha \quad \vdash_{AT_C} \quad X \in \beta,$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Abstração e tipos

Teorema (Abstração e tipos)

Seja $\mathcal{B}$ uma base qualquer. Se x não ocorre em nenhum sujeito em $\mathcal{B}$, e se

$$\mathcal{B}, \quad x \in \alpha \quad \vdash_{AT_C} \quad X \in \beta,$$

então

$$\mathcal{B} \quad \vdash_{AT_C} \quad \lambda^* x.X \in \alpha \to \beta,$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Abstração e tipos

Teorema (Abstração e tipos)

Seja $\mathcal{B}$ uma base qualquer. Se x não ocorre em nenhum sujeito em $\mathcal{B}$, e se

$$\mathcal{B}, \quad x \in \alpha \quad \vdash_{AT_C} \quad X \in \beta,$$

então

$$\mathcal{B} \quad \vdash_{AT_C} \quad \lambda^* x.X \in \alpha \to \beta,$$

onde λ^* é ou λ^η (i.e. o λ^* da Definição 2.14)

Atribuição de Tipos a Combinadores
Abstração e tipos

Teorema (Abstração e tipos)

Seja $\mathcal{B}$ uma base qualquer. Se x não ocorre em nenhum sujeito em $\mathcal{B}$, e se

$$\mathcal{B}, \quad x \in \alpha \quad \vdash_{AT_C} \quad X \in \beta,$$

então

$$\mathcal{B} \quad \vdash_{AT_C} \quad \lambda^* x.X \in \alpha \to \beta,$$

onde λ^* é ou λ^η (i.e. o λ^* da Definição 2.14) ou λ^w (Definição 9.20) ou λ^β (Definição 9.34).

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do teorema de abstração e tipos

Demonstração.

Indução sobre a complexidade de X, com os casos correspondendo aos casos da Definição 2.14, que inclui todos os casos em 9.20 e 9.34.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do teorema de abstração e tipos

Demonstração.

Indução sobre a complexidade de X, com os casos correspondendo aos casos da Definição 2.14, que inclui todos os casos em 9.20 e 9.34. Seja $\mathcal{D}$ a dedução dada de $X \in \beta$.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do teorema de abstração e tipos

Demonstração.

Indução sobre a complexidade de X, com os casos correspondendo aos casos da Definição 2.14, que inclui todos os casos em 9.20 e 9.34. Seja $\mathcal{D}$ a dedução dada de $X \in \beta$. A restrição de que x não ocorre em $\mathcal{B}$ implica que sempre que x ocorra em $\mathcal{D}$,

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do teorema de abstração e tipos

Demonstração.

Indução sobre a complexidade de X, com os casos correspondendo aos casos da Definição 2.14, que inclui todos os casos em 9.20 e 9.34. Seja $\mathcal{D}$ a dedução dada de $X \in \beta$. A restrição de que x não ocorre em $\mathcal{B}$ implica que sempre que x ocorra em $\mathcal{D}$, seu esquema de tipo deve ser α.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do teorema de abstração e tipos

Demonstração.

Indução sobre a complexidade de X, com os casos correspondendo aos casos da Definição 2.14, que inclui todos os casos em 9.20 e 9.34. Seja $\mathcal{D}$ a dedução dada de $X \in \beta$. A restrição de que x não ocorre em $\mathcal{B}$ implica que sempre que x ocorra em $\mathcal{D}$, seu esquema de tipo deve ser α.

Caso 1: $x \notin VL(X)$ e $\lambda^* x.X \equiv \mathsf{K}X$.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do teorema de abstração e tipos

Demonstração.

Indução sobre a complexidade de X, com os casos correspondendo aos casos da Definição 2.14, que inclui todos os casos em 9.20 e 9.34. Seja $\mathcal{D}$ a dedução dada de $X \in \beta$. A restrição de que x não ocorre em $\mathcal{B}$ implica que sempre que x ocorra em $\mathcal{D}$, seu esquema de tipo deve ser α.

Caso 1: $x \notin VL(X)$ e $\lambda^* x.X \equiv \mathsf{K}X$. Então a hipótese $x \in \alpha$ não é usada em $\mathcal{D}$,

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do teorema de abstração e tipos

Demonstração.

Indução sobre a complexidade de X, com os casos correspondendo aos casos da Definição 2.14, que inclui todos os casos em 9.20 e 9.34. Seja $\mathcal{D}$ a dedução dada de $X \in \beta$. A restrição de que x não ocorre em $\mathcal{B}$ implica que sempre que x ocorra em $\mathcal{D}$, seu esquema de tipo deve ser α.

Caso 1: $x \notin VL(X)$ e $\lambda^* x.X \equiv \mathsf{K}X$. Então a hipótese $x \in \alpha$ não é usada em $\mathcal{D}$, portanto $\mathcal{D}$ é uma dedução de

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do teorema de abstração e tipos

Demonstração.

Indução sobre a complexidade de X, com os casos correspondendo aos casos da Definição 2.14, que inclui todos os casos em 9.20 e 9.34. Seja $\mathcal{D}$ a dedução dada de $X \in \beta$. A restrição de que x não ocorre em $\mathcal{B}$ implica que sempre que x ocorra em $\mathcal{D}$, seu esquema de tipo deve ser α.

Caso 1: $x \notin VL(X)$ e $\lambda^* x.X \equiv \mathsf{K}X$. Então a hipótese $x \in \alpha$ não é usada em $\mathcal{D}$, portanto $\mathcal{D}$ é uma dedução de

$$\mathcal{B} \quad \vdash \quad X \in \beta.$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do teorema de abstração e tipos

Demonstração.

Indução sobre a complexidade de X, com os casos correspondendo aos casos da Definição 2.14, que inclui todos os casos em 9.20 e 9.34. Seja $\mathcal{D}$ a dedução dada de $X \in \beta$. A restrição de que x não ocorre em $\mathcal{B}$ implica que sempre que x ocorra em $\mathcal{D}$, seu esquema de tipo deve ser α.

Caso 1: $x \notin VL(X)$ e $\lambda^* x.X \equiv \mathsf{K}X$. Então a hipótese $x \in \alpha$ não é usada em $\mathcal{D}$, portanto $\mathcal{D}$ é uma dedução de

$$\mathcal{B} \quad \vdash \quad X \in \beta.$$

Agora a fórmula $\mathsf{K} \in \beta \to \alpha \to \beta$ é uma instância do esquema de axioma ($\to$ K),

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do teorema de abstração e tipos

Demonstração.

Indução sobre a complexidade de X, com os casos correspondendo aos casos da Definição 2.14, que inclui todos os casos em 9.20 e 9.34. Seja $\mathcal{D}$ a dedução dada de $X \in \beta$. A restrição de que x não ocorre em $\mathcal{B}$ implica que sempre que x ocorra em $\mathcal{D}$, seu esquema de tipo deve ser α.

Caso 1: $x \notin VL(X)$ e $\lambda^* x.X \equiv \mathsf{K}X$. Então a hipótese $x \in \alpha$ não é usada em $\mathcal{D}$, portanto $\mathcal{D}$ é uma dedução de

$$\mathcal{B} \quad \vdash \quad X \in \beta.$$

Agora a fórmula $\mathsf{K} \in \beta \to \alpha \to \beta$ é uma instância do esquema de axioma ($\to$ K), e, portanto, pela regra ($\to \mathrm{e}$),

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do teorema de abstração e tipos

Demonstração.

Indução sobre a complexidade de X, com os casos correspondendo aos casos da Definição 2.14, que inclui todos os casos em 9.20 e 9.34. Seja $\mathcal{D}$ a dedução dada de $X \in \beta$. A restrição de que x não ocorre em $\mathcal{B}$ implica que sempre que x ocorra em $\mathcal{D}$, seu esquema de tipo deve ser α.

Caso 1: $x \notin VL(X)$ e $\lambda^* x.X \equiv \mathsf{K}X$. Então a hipótese $x \in \alpha$ não é usada em $\mathcal{D}$, portanto $\mathcal{D}$ é uma dedução de

$$\mathcal{B} \quad \vdash \quad X \in \beta.$$

Agora a fórmula $\mathsf{K} \in \beta \to \alpha \to \beta$ é uma instância do esquema de axioma ($\to$ K), e, portanto, pela regra ($\to \mathrm{e}$),

$$\mathcal{B} \quad \vdash \quad \mathsf{K}X \in \alpha \to \beta.$$

□

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do teorema de abstração e tipos (cont.)

Demonstração.

(Continuação)

Caso 2: $X \equiv x$ e $\lambda^* x.X \equiv \mathsf{I}$.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do teorema de abstração e tipos (cont.)

Demonstração.

(Continuação)

Caso 2: $X \equiv x$ e $\lambda^* x.X \equiv \mathsf{I}$. Então $\beta \equiv \alpha$.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do teorema de abstração e tipos (cont.)

Demonstração.

(Continuação)

Caso 2: $X \equiv x$ e $\lambda^* x.X \equiv \mathsf{I}$. Então $\beta \equiv \alpha$. O resultado desejado é

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do teorema de abstração e tipos (cont.)

Demonstração.

(Continuação)

Caso 2: $X \equiv x$ e $\lambda^* x.X \equiv \mathsf{I}$. Então $\beta \equiv \alpha$. O resultado desejado é

$$\mathcal{B} \quad \vdash \quad \mathsf{I} \in \alpha \to \alpha,$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do teorema de abstração e tipos (cont.)

Demonstração.

(Continuação)
Caso 2: $X \equiv x$ e $\lambda^* x.X \equiv \mathsf{I}$. Então $\beta \equiv \alpha$. O resultado desejado é

$$\mathcal{B} \quad \vdash \quad \mathsf{I} \in \alpha \to \alpha,$$

que segue usando o Exemplo 14.6.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do teorema de abstração e tipos (cont.)

Demonstração.

(Continuação)

Caso 2: $X \equiv x$ e $\lambda^* x.X \equiv \mathsf{I}$. Então $\beta \equiv \alpha$. O resultado desejado é

$$\mathcal{B} \quad \vdash \quad \mathsf{I} \in \alpha \to \alpha,$$

que segue usando o Exemplo 14.6.

Caso 3: $X \equiv Ux$, onde $x \notin VL(U)$, e $\lambda^* x.X \equiv U$.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do teorema de abstração e tipos (cont.)

Demonstração.

(Continuação)

Caso 2: $X \equiv x$ e $\lambda^* x.X \equiv \mathsf{I}$. Então $\beta \equiv \alpha$. O resultado desejado é

$$\mathcal{B} \quad \vdash \quad \mathsf{I} \in \alpha \to \alpha,$$

que segue usando o Exemplo 14.6.

Caso 3: $X \equiv Ux$, onde $x \notin VL(U)$, e $\lambda^* x.X \equiv U$. Então, pela correspondência entre deduções e construções,

Atribuição de Tipos a Combinadores
Prova do teorema de abstração e tipos (cont.)

Demonstração.

(Continuação)
Caso 2: $X \equiv x$ e $\lambda^* x.X \equiv \mathsf{I}$. Então $\beta \equiv \alpha$. O resultado desejado é

$$\mathcal{B} \quad \vdash \quad \mathsf{I} \in \alpha \to \alpha,$$

que segue usando o Exemplo 14.6.
Caso 3: $X \equiv Ux$, onde $x \notin VL(U)$, e $\lambda^* x.X \equiv U$. Então, pela correspondência entre deduções e construções, $\mathcal{D}$ tem que ter a forma

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ U \in \alpha \to \beta\end{array} \qquad x \in \alpha}{Ux \in \beta}\,(\to \mathrm{e}),$$

Atribuição de Tipos a Combinadores
Prova do teorema de abstração e tipos (cont.)

Demonstração.

(Continuação)
Caso 2: $X \equiv x$ e $\lambda^* x.X \equiv \mathsf{I}$. Então $\beta \equiv \alpha$. O resultado desejado é

$$\mathcal{B} \quad \vdash \quad \mathsf{I} \in \alpha \to \alpha,$$

que segue usando o Exemplo 14.6.
Caso 3: $X \equiv Ux$, onde $x \notin VL(U)$, e $\lambda^* x.X \equiv U$. Então, pela correspondência entre deduções e construções, $\mathcal{D}$ tem que ter a forma

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ U \in \alpha \to \beta\end{matrix} \qquad x \in \alpha}{Ux \in \beta}\,(\to \mathrm{e}),$$

onde x não ocorre em $\mathcal{D}_1$.

Atribuição de Tipos a Combinadores
Prova do teorema de abstração e tipos (cont.)

Demonstração.

(Continuação)

Caso 2: $X \equiv x$ e $\lambda^* x.X \equiv \mathsf{I}$. Então $\beta \equiv \alpha$. O resultado desejado é

$$\mathcal{B} \quad \vdash \quad \mathsf{I} \in \alpha \to \alpha,$$

que segue usando o Exemplo 14.6.

Caso 3: $X \equiv Ux$, onde $x \notin VL(U)$, e $\lambda^* x.X \equiv U$. Então, pela correspondência entre deduções e construções, $\mathcal{D}$ tem que ter a forma

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ U \in \alpha \to \beta\end{array} \qquad x \in \alpha}{Ux \in \beta}\,(\to \mathrm{e}),$$

onde x não ocorre em $\mathcal{D}_1$. Mas $\lambda^* x.X \equiv U$.

Atribuição de Tipos a Combinadores
Prova do teorema de abstração e tipos (cont.)

Demonstração.

(Continuação)
Caso 2: $X \equiv x$ e $\lambda^* x.X \equiv \mathsf{I}$. Então $\beta \equiv \alpha$. O resultado desejado é

$$\mathcal{B} \quad \vdash \quad \mathsf{I} \in \alpha \to \alpha,$$

que segue usando o Exemplo 14.6.
Caso 3: $X \equiv Ux$, onde $x \notin VL(U)$, e $\lambda^* x.X \equiv U$. Então, pela correspondência entre deduções e construções, $\mathcal{D}$ tem que ter a forma

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ U \in \alpha \to \beta\end{array} \qquad x \in \alpha}{Ux \in \beta}\,(\to \mathrm{e}),$$

onde x não ocorre em $\mathcal{D}_1$. Mas $\lambda^* x.X \equiv U$. Logo, $\mathcal{D}_1$ é uma dedução do resultado desejado. $\square$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do teorema de abstração e tipos (cont.)

Demonstração.

(Continuação)

Caso 4: $X \equiv X_1 X_2$ e $\lambda^* x.X \equiv \mathsf{S}(\lambda^{*\prime} x.X_1)(\lambda^{*\prime} x.X_2)$,

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do teorema de abstração e tipos (cont.)

Demonstração.

(Continuação)

Caso 4: $X \equiv X_1 X_2$ e $\lambda^* x.X \equiv \mathsf{S}(\lambda^{*\prime} x.X_1)(\lambda^{*\prime} x.X_2)$, onde $\lambda^{*\prime}$ é λ^* se λ^* for λ^η ou λ^w,

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do teorema de abstração e tipos (cont.)

Demonstração.

(Continuação)
Caso 4: $X \equiv X_1 X_2$ e $\lambda^* x.X \equiv \mathsf{S}(\lambda^{*\prime} x.X_1)(\lambda^{*\prime} x.X_2)$, onde $\lambda^{*\prime}$ é λ^* se λ^* for λ^η ou λ^w, mas $\lambda^{*\prime}$ é λ^η se λ^* for λ^β.

Atribuição de Tipos a Combinadores
Prova do teorema de abstração e tipos (cont.)

Demonstração.

(Continuação)
Caso 4: $X \equiv X_1 X_2$ e $\lambda^* x.X \equiv \mathsf{S}(\lambda^{*\prime} x.X_1)(\lambda^{*\prime} x.X_2)$, onde $\lambda^{*\prime}$ é λ^* se λ^* for λ^η ou λ^w, mas $\lambda^{*\prime}$ é λ^η se λ^* for λ^β. Então $\mathcal{D}$ tem que ter a forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ X_1 \in \gamma \to \beta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ X_2 \in \gamma\end{array}}{X_1 X_2 \in \beta}$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do teorema de abstração e tipos (cont.)

Demonstração.

(Continuação)
Caso 4: $X \equiv X_1 X_2$ e $\lambda^* x.X \equiv \mathsf{S}(\lambda^{*\prime} x.X_1)(\lambda^{*\prime} x.X_2)$, onde $\lambda^{*\prime}$ é λ^* se λ^* for λ^η ou λ^w, mas $\lambda^{*\prime}$ é λ^η se λ^* for λ^β. Então $\mathcal{D}$ tem que ter a forma:

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ X_1 \in \gamma \to \beta\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_2 \\ X_2 \in \gamma\end{matrix}}{X_1 X_2 \in \beta}$$

Estamos demonstrando o teorema para todas as três formas de λ^* simultaneamente,

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do teorema de abstração e tipos (cont.)

Demonstração.

(Continuação)

Caso 4: $X \equiv X_1 X_2$ e $\lambda^* x.X \equiv \mathsf{S}(\lambda^{*\prime} x.X_1)(\lambda^{*\prime} x.X_2)$, onde $\lambda^{*\prime}$ é λ^* se λ^* for λ^η ou λ^w, mas $\lambda^{*\prime}$ é λ^η se λ^* for λ^β. Então $\mathcal{D}$ tem que ter a forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1 \\ X_1 \in \gamma \to \beta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_2 \\ X_2 \in \gamma\end{array}}{X_1 X_2 \in \beta}$$

Estamos demonstrando o teorema para todas as três formas de λ^* simultaneamente, portanto, pela hipótese da indução,

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do teorema de abstração e tipos (cont.)

Demonstração.

(Continuação)

Caso 4: $X \equiv X_1 X_2$ e $\lambda^* x.X \equiv \mathsf{S}(\lambda^{*\prime} x.X_1)(\lambda^{*\prime} x.X_2)$, onde $\lambda^{*\prime}$ é λ^* se λ^* for λ^η ou λ^w, mas $\lambda^{*\prime}$ é λ^η se λ^* for λ^β. Então $\mathcal{D}$ tem que ter a forma:

$$\frac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1 \\ X_1 \in \gamma \to \beta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_2 \\ X_2 \in \gamma\end{array}}{X_1 X_2 \in \beta}$$

Estamos demonstrando o teorema para todas as três formas de λ^* simultaneamente, portanto, pela hipótese da indução,

$$\mathcal{B} \quad \vdash \quad (\lambda^{*\prime} x.X_1) \in \alpha \to \gamma \to \beta,$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do teorema de abstração e tipos (cont.)

Demonstração.

(Continuação)
Caso 4: $X \equiv X_1 X_2$ e $\lambda^* x.X \equiv \mathsf{S}(\lambda^{*\prime} x.X_1)(\lambda^{*\prime} x.X_2)$, onde $\lambda^{*\prime}$ é λ^* se λ^* for λ^η ou λ^w, mas $\lambda^{*\prime}$ é λ^η se λ^* for λ^β. Então $\mathcal{D}$ tem que ter a forma:

$$\frac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ X_1 \in \gamma \to \beta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ X_2 \in \gamma\end{array}}{X_1 X_2 \in \beta}$$

Estamos demonstrando o teorema para todas as três formas de λ^* simultaneamente, portanto, pela hipótese da indução,

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{B} & \vdash & (\lambda^{*\prime} x.X_1) \in \alpha \to \gamma \to \beta,\\ \mathcal{B} & \vdash & (\lambda^{*\prime} x.X_2) \in \alpha \to \gamma,\end{array}$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do teorema de abstração e tipos (cont.)

Demonstração.

(Continuação)
Caso 4: $X \equiv X_1 X_2$ e $\lambda^* x.X \equiv \mathrm{S}(\lambda^{*\prime} x.X_1)(\lambda^{*\prime} x.X_2)$, onde $\lambda^{*\prime}$ é λ^* se λ^* for λ^η ou λ^w, mas $\lambda^{*\prime}$ é λ^η se λ^* for λ^β. Então $\mathcal{D}$ tem que ter a forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1 \\ X_1 \in \gamma \to \beta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_2 \\ X_2 \in \gamma\end{array}}{X_1 X_2 \in \beta}$$

Estamos demonstrando o teorema para todas as três formas de λ^* simultaneamente, portanto, pela hipótese da indução,

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{B} & \vdash & (\lambda^{*\prime} x.X_1) \in \alpha \to \gamma \to \beta, \\ \mathcal{B} & \vdash & (\lambda^{*\prime} x.X_2) \in \alpha \to \gamma,\end{array}$$

Agora, a fórmula

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do teorema de abstração e tipos (cont.)

Demonstração.

(Continuação)

Caso 4: $X \equiv X_1 X_2$ e $\lambda^* x.X \equiv \mathsf{S}(\lambda^{*\prime} x.X_1)(\lambda^{*\prime} x.X_2)$, onde $\lambda^{*\prime}$ é λ^* se λ^* for λ^η ou λ^w, mas $\lambda^{*\prime}$ é λ^η se λ^* for λ^β. Então $\mathcal{D}$ tem que ter a forma:

$$\frac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ X_1 \in \gamma \to \beta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ X_2 \in \gamma\end{array}}{X_1 X_2 \in \beta}$$

Estamos demonstrando o teorema para todas as três formas de λ^* simultaneamente, portanto, pela hipótese da indução,

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &\vdash (\lambda^{*\prime} x.X_1) \in \alpha \to \gamma \to \beta, \\ \mathcal{B} &\vdash (\lambda^{*\prime} x.X_2) \in \alpha \to \gamma, \end{aligned}$$

Agora, a fórmula

$$\mathsf{S} \in (\alpha \to \gamma \to \beta) \to (\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to \beta)$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do teorema de abstração e tipos (cont.)

Demonstração.

(Continuação)
Caso 4: $X \equiv X_1 X_2$ e $\lambda^* x.X \equiv \mathrm{S}(\lambda^{*\prime} x.X_1)(\lambda^{*\prime} x.X_2)$, onde $\lambda^{*\prime}$ é λ^* se λ^* for λ^η ou λ^w, mas $\lambda^{*\prime}$ é λ^η se λ^* for λ^β. Então $\mathcal{D}$ tem que ter a forma:

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ X_1 \in \gamma \to \beta\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_2 \\ X_2 \in \gamma\end{matrix}}{X_1 X_2 \in \beta}$$

Estamos demonstrando o teorema para todas as três formas de λ^* simultaneamente, portanto, pela hipótese da indução,

$$\mathcal{B} \quad \vdash \quad (\lambda^{*\prime} x.X_1) \in \alpha \to \gamma \to \beta,$$
$$\mathcal{B} \quad \vdash \quad (\lambda^{*\prime} x.X_2) \in \alpha \to \gamma,$$

Agora, a fórmula

$$\mathrm{S} \in (\alpha \to \gamma \to \beta) \to (\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to \beta)$$

é uma instância do esquema de axioma ($\to$ S), portanto o resultado segue por ($\to \mathrm{e}$). $\square$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Corolário do teorema de abstração e tipos

Corolário

Se nenhum sujeito em $\mathcal{B}$ contém as variáveis (distintas) $x_1, \ldots, x_n$, e

Atribuição de Tipos a Combinadores

Corolário do teorema de abstração e tipos

Corolário

Se nenhum sujeito em $\mathcal{B}$ contém as variáveis (distintas) $x_1, \ldots, x_n$, e

$$\mathcal{B}, x_1 \in \alpha_1, \ldots, x_n \in \alpha_n \quad \vdash_{AT_C} \quad X \in \beta,$$

Atribuição de Tipos a Combinadores
Corolário do teorema de abstração e tipos

Corolário

Se nenhum sujeito em $\mathcal{B}$ contém as variáveis (distintas) $x_1, \ldots, x_n$, e

$$\mathcal{B}, x_1 \in \alpha_1, \ldots, x_n \in \alpha_n \quad \vdash_{AT_C} \quad X \in \beta,$$

e λ^* é definido por quaisquer das Definições 2.4, 9.20, 9.34,

Atribuição de Tipos a Combinadores

Corolário do teorema de abstração e tipos

Corolário

Se nenhum sujeito em $\mathcal{B}$ contém as variáveis (distintas) $x_1, \ldots, x_n$, e

$$\mathcal{B}, x_1 \in \alpha_1, \ldots, x_n \in \alpha_n \quad \vdash_{AT_C} \quad X \in \beta,$$

e λ^* é definido por quaisquer das Definições 2.4, 9.20, 9.34, então

Atribuição de Tipos a Combinadores

Corolário do teorema de abstração e tipos

Corolário

Se nenhum sujeito em $\mathcal{B}$ contém as variáveis (distintas) $x_1, \ldots, x_n$, e

$$\mathcal{B}, x_1 \in \alpha_1, \ldots, x_n \in \alpha_n \quad \vdash_{AT_C} \quad X \in \beta,$$

e λ^* é definido por quaisquer das Definições 2.4, 9.20, 9.34, então

$$\mathcal{B} \quad \vdash_{AT_C} \quad \lambda^* x_1 \ldots x_n . X \in \alpha_1 \to \ldots \to \alpha_n \to \beta.$$

Atribuição de Tipos a Combinadores
Substituição de sujeitos

Lema

Sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ bases quaisquer e $\mathcal{D}$ uma dedução dando

Atribuição de Tipos a Combinadores
Substituição de sujeitos

Lema

Sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ bases quaisquer e $\mathcal{D}$ uma dedução dando

$$\mathcal{B}_1 \quad \vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha.$$

Atribuição de Tipos a Combinadores
Substituição de sujeitos

Lema

Sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ bases quaisquer e $\mathcal{D}$ uma dedução dando

$$\mathcal{B}_1 \quad \vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha.$$

Suponha que V seja uma ocorrência de termo qualquer em X,

Atribuição de Tipos a Combinadores

Substituição de sujeitos

Lema

Sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ bases quaisquer e $\mathcal{D}$ uma dedução dando

$$\mathcal{B}_1 \quad \vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha.$$

Suponha que V seja uma ocorrência de termo qualquer em X, tal que $\mathcal{D}$ contém uma fórmula $V \in \gamma$ na mesma posição que V tem na árvore de construção de X.

Atribuição de Tipos a Combinadores
Substituição de sujeitos

Lema

Sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ bases quaisquer e $\mathcal{D}$ uma dedução dando

$$\mathcal{B}_1 \quad \vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha.$$

Suponha que V seja uma ocorrência de termo qualquer em X, tal que $\mathcal{D}$ contém uma fórmula $V \in \gamma$ na mesma posição que V tem na árvore de construção de X. Seja X^* o resultado de se substituir V por um termo W tal que

Atribuição de Tipos a Combinadores
Substituição de sujeitos

Lema

Sejam $\mathcal{B}_1$ *e* $\mathcal{B}_2$ *bases quaisquer e* $\mathcal{D}$ *uma dedução dando*

$$\mathcal{B}_1 \quad \vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha.$$

Suponha que V *seja uma ocorrência de termo qualquer em* X*, tal que* $\mathcal{D}$ *contém uma fórmula* $V \in \gamma$ *na mesma posição que* V *tem na árvore de construção de* X*. Seja* X^* *o resultado de se substituir* V *por um termo* W *tal que*

$$\mathcal{B}_2 \quad \vdash_{AT_C} \quad W \in \gamma.$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Substituição de sujeitos

Lema

Sejam $\mathcal{B}_1$ *e* $\mathcal{B}_2$ *bases quaisquer e* $\mathcal{D}$ *uma dedução dando*

$$\mathcal{B}_1 \quad \vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha.$$

Suponha que V *seja uma ocorrência de termo qualquer em* X*, tal que* $\mathcal{D}$ *contém uma fórmula* $V \in \gamma$ *na mesma posição que* V *tem na árvore de construção de* X*. Seja* X^* *o resultado de se substituir* V *por um termo* W *tal que*

$$\mathcal{B}_2 \quad \vdash_{AT_C} \quad W \in \gamma.$$

Então

Atribuição de Tipos a Combinadores
Substituição de sujeitos

Lema

Sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ bases quaisquer e $\mathcal{D}$ uma dedução dando

$$\mathcal{B}_1 \quad \vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha.$$

Suponha que V seja uma ocorrência de termo qualquer em X, tal que $\mathcal{D}$ contém uma fórmula $V \in \gamma$ na mesma posição que V tem na árvore de construção de X. Seja X^* o resultado de se substituir V por um termo W tal que

$$\mathcal{B}_2 \quad \vdash_{AT_C} \quad W \in \gamma.$$

Então

$$\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \quad \vdash_{AT_C} \quad X^* \in \alpha.$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do Lema da substituição de sujeitos

Demonstração.

Primeiramente vamos remover de $\mathcal{D}$ a subárvore acima da fórmula $V \in \gamma$.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do Lema da substituição de sujeitos

Demonstração.

Primeiramente vamos remover de $\mathcal{D}$ a subárvore acima da fórmula $V \in \gamma$. O resultado é uma dedução $\mathcal{D}_1$ da forma

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do Lema da substituição de sujeitos

Demonstração.

Primeiramente vamos remover de $\mathcal{D}$ a subárvore acima da fórmula $V \in \gamma$. O resultado é uma dedução $\mathcal{D}_1$ da forma

$$\begin{array}{c} V \in \gamma \\ \mathcal{D}_1 \\ X \in \alpha. \end{array}$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do Lema da substituição de sujeitos

Demonstração.

Primeiramente vamos remover de $\mathcal{D}$ a subárvore acima da fórmula $V \in \gamma$. O resultado é uma dedução $\mathcal{D}_1$ da forma

$$\begin{array}{c} V \in \gamma \\ \mathcal{D}_1 \\ X \in \alpha. \end{array}$$

Agora substitua V por W na suposição/hipótese $V \in \gamma$,

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do Lema da substituição de sujeitos

Demonstração.

Primeiramente vamos remover de $\mathcal{D}$ a subárvore acima da fórmula $V \in \gamma$. O resultado é uma dedução $\mathcal{D}_1$ da forma

$$\begin{array}{c} V \in \gamma \\ \mathcal{D}_1 \\ X \in \alpha. \end{array}$$

Agora substitua V por W na suposição/hipótese $V \in \gamma$, e em todas as fórmulas abaixo dela em $\mathcal{D}_1$.

Atribuição de Tipos a Combinadores
Prova do Lema da substituição de sujeitos

Demonstração.

Primeiramente vamos remover de $\mathcal{D}$ a subárvore acima da fórmula $V \in \gamma$. O resultado é uma dedução $\mathcal{D}_1$ da forma

$$\begin{array}{c} V \in \gamma \\ \mathcal{D}_1 \\ X \in \alpha. \end{array}$$

Agora substitua V por W na suposição/hipótese $V \in \gamma$, e em todas as fórmulas abaixo dela em $\mathcal{D}_1$. O resultado é uma dedução $\mathcal{D}_1^*$ da forma

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do Lema da substituição de sujeitos

Demonstração.

Primeiramente vamos remover de $\mathcal{D}$ a subárvore acima da fórmula $V \in \gamma$. O resultado é uma dedução $\mathcal{D}_1$ da forma

$$\begin{array}{c} V \in \gamma \\ \mathcal{D}_1 \\ X \in \alpha. \end{array}$$

Agora substitua V por W na suposição/hipótese $V \in \gamma$, e em todas as fórmulas abaixo dela em $\mathcal{D}_1$. O resultado é uma dedução $\mathcal{D}_1^*$ da forma

$$\begin{array}{c} W \in \gamma \\ \mathcal{D}_1^* \\ X^* \in \alpha. \end{array}$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do Lema da substituição de sujeitos

Demonstração.

Primeiramente vamos remover de $\mathcal{D}$ a subárvore acima da fórmula $V \in \gamma$. O resultado é uma dedução $\mathcal{D}_1$ da forma

$$\begin{array}{c} V \in \gamma \\ \mathcal{D}_1 \\ X \in \alpha. \end{array}$$

Agora substitua V por W na suposição/hipótese $V \in \gamma$, e em todas as fórmulas abaixo dela em $\mathcal{D}_1$. O resultado é uma dedução $\mathcal{D}_1^*$ da forma

$$\begin{array}{c} W \in \gamma \\ \mathcal{D}_1^* \\ X^* \in \alpha. \end{array}$$

(continua ...) □

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do Lema da substituição de sujeitos

Demonstração.

(Continuação)
Agora tome a dedução $\mathcal{D}_2$ de $W \in \gamma$ e coloque-a sobre a suposição $W \in \gamma$ em $\mathcal{D}_1^*$. O resultado é uma dedução

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do Lema da substituição de sujeitos

Demonstração.

(Continuação)
Agora tome a dedução $\mathcal{D}_2$ de $W \in \gamma$ e coloque-a sobre a suposição $W \in \gamma$ em $\mathcal{D}_1^*$. O resultado é uma dedução

$$\begin{array}{c} \mathcal{D}_2 \\ W \in \gamma \\ \mathcal{D}_1^* \\ X^* \in \alpha \end{array}$$

Atribuição de Tipos a Combinadores
Prova do Lema da substituição de sujeitos

Demonstração.

(Continuação)
Agora tome a dedução $\mathcal{D}_2$ de $W \in \gamma$ e coloque-a sobre a suposição $W \in \gamma$ em $\mathcal{D}_1^*$. O resultado é uma dedução

$$\begin{array}{c} \mathcal{D}_2 \\ W \in \gamma \\ \mathcal{D}_1^* \\ X^* \in \alpha \end{array}$$

conforme desejado. □

Atribuição de Tipos a Combinadores

Teorema da redução-de-sujeito

Teorema (Redução-de-sujeito)

Seja $\mathcal{B}$ uma base de sujeitos fracamente (fortemente) normais;

Atribuição de Tipos a Combinadores
Teorema da redução-de-sujeito

Teorema (Redução-de-sujeito)

Seja $\mathcal{B}$ uma base de sujeitos fracamente (fortemente) normais; se

Atribuição de Tipos a Combinadores

Teorema da redução-de-sujeito

Teorema (Redução-de-sujeito)

Seja $\mathcal{B}$ uma base de sujeitos fracamente (fortemente) normais; se

$$\mathcal{B} \quad \vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Teorema da redução-de-sujeito

Teorema (Redução-de-sujeito)

Seja $\mathcal{B}$ uma base de sujeitos fracamente (fortemente) normais; se

$$\mathcal{B} \quad \vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha$$

e $X \triangleright_w X'$ ($X \triangleright_{\beta\eta} X'$),

Atribuição de Tipos a Combinadores
Teorema da redução-de-sujeito

Teorema (Redução-de-sujeito)

Seja $\mathcal{B}$ uma base de sujeitos fracamente (fortemente) normais; se

$$\mathcal{B} \quad \vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha$$

e $X \triangleright_w X'$ ($X \triangleright_{\beta\eta} X'$), então

Atribuição de Tipos a Combinadores

Teorema da redução-de-sujeito

Teorema (Redução-de-sujeito)

Seja $\mathcal{B}$ uma base de sujeitos fracamente (fortemente) normais; se

$$\mathcal{B} \quad \vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha$$

e $X \triangleright_w X'$ ($X \triangleright_{\beta\eta} X'$), então

$$\mathcal{B} \quad \vdash_{AT_C} \quad X' \in \alpha$$

Atribuição de Tipos a Combinadores
Teorema da redução-de-sujeito

Teorema (Redução-de-sujeito)

Seja $\mathcal{B}$ uma base de sujeitos fracamente (fortemente) normais; se

$$\mathcal{B} \quad \vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha$$

e $X \rhd_w X'$ ($X \rhd_{\beta\eta} X'$), então

$$\mathcal{B} \quad \vdash_{AT_C} \quad X' \in \alpha$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do Teorema da redução-de-sujeito

Demonstração.

Vamos nos restringir ao caso da redução fraca.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do Teorema da redução-de-sujeito

Demonstração.

Vamos nos restringir ao caso da redução fraca. Pelo lema da substituição de sujeitos, basta analisar o caso em que X é uma redex e X' é seu *contractum*.

Atribuição de Tipos a Combinadores
Prova do Teorema da redução-de-sujeito

Demonstração.

Vamos nos restringir ao caso da redução fraca. Pelo lema da substituição de sujeitos, basta analisar o caso em que X é uma redex e X' é seu *contractum*.

Caso 1: $X \equiv \mathsf{K}X'Y$.

Atribuição de Tipos a Combinadores
Prova do Teorema da redução-de-sujeito

Demonstração.

Vamos nos restringir ao caso da redução fraca. Pelo lema da substituição de sujeitos, basta analisar o caso em que X é uma redex e X' é seu *contractum*.

Caso 1: $X \equiv \mathsf{K}X'Y$. Seja $\mathcal{D}$ uma dedução de $X \in \alpha$ a partir da base $\mathcal{B}$.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do Teorema da redução-de-sujeito

Demonstração.

Vamos nos restringir ao caso da redução fraca. Pelo lema da substituição de sujeitos, basta analisar o caso em que X é uma redex e X' é seu *contractum*.

Caso 1: $X \equiv \mathsf{K}X'Y$. Seja $\mathcal{D}$ uma dedução de $X \in \alpha$ a partir da base $\mathcal{B}$. Devido à natureza de $\mathcal{B}$, o primeiro K em X não pode ser parte de um sujeito em $\mathcal{B}$,

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do Teorema da redução-de-sujeito

Demonstração.

Vamos nos restringir ao caso da redução fraca. Pelo lema da substituição de sujeitos, basta analisar o caso em que X é uma redex e X' é seu *contractum*.

Caso 1: $X \equiv \mathsf{K}X'Y$. Seja $\mathcal{D}$ uma dedução de $X \in \alpha$ a partir da base $\mathcal{B}$. Devido à natureza de $\mathcal{B}$, o primeiro K em X não pode ser parte de um sujeito em $\mathcal{B}$, portanto ele tem que corresponder a uma instância do esquema de axioma ($\rightarrow$ K).

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do Teorema da redução-de-sujeito

Demonstração.

Vamos nos restringir ao caso da redução fraca. Pelo lema da substituição de sujeitos, basta analisar o caso em que X é uma redex e X' é seu *contractum*.

Caso 1: $X \equiv \mathsf{K}X'Y$. Seja $\mathcal{D}$ uma dedução de $X \in \alpha$ a partir da base $\mathcal{B}$. Devido à natureza de $\mathcal{B}$, o primeiro K em X não pode ser parte de um sujeito em $\mathcal{B}$, portanto ele tem que corresponder a uma instância do esquema de axioma $(\rightarrow \mathsf{K})$. Logo, usando a correspondência entre deduções e construções de termos,

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do Teorema da redução-de-sujeito

Demonstração.

Vamos nos restringir ao caso da redução fraca. Pelo lema da substituição de sujeitos, basta analisar o caso em que X é uma redex e X' é seu *contractum*.

Caso 1: $X \equiv \mathsf{K}X'Y$. Seja $\mathcal{D}$ uma dedução de $X \in \alpha$ a partir da base $\mathcal{B}$. Devido à natureza de $\mathcal{B}$, o primeiro K em X não pode ser parte de um sujeito em $\mathcal{B}$, portanto ele tem que corresponder a uma instância do esquema de axioma ($\rightarrow$ K). Logo, usando a correspondência entre deduções e construções de termos, $\mathcal{D}$ tem que ter a forma

Atribuição de Tipos a Combinadores
Prova do Teorema da redução-de-sujeito

Demonstração.

Vamos nos restringir ao caso da redução fraca. Pelo lema da substituição de sujeitos, basta analisar o caso em que X é uma redex e X' é seu *contractum*.

Caso 1: $X \equiv \mathsf{K}X'Y$. Seja $\mathcal{D}$ uma dedução de $X \in \alpha$ a partir da base $\mathcal{B}$. Devido à natureza de $\mathcal{B}$, o primeiro K em X não pode ser parte de um sujeito em $\mathcal{B}$, portanto ele tem que corresponder a uma instância do esquema de axioma ($\rightarrow$ K). Logo, usando a correspondência entre deduções e construções de termos, $\mathcal{D}$ tem que ter a forma

$$\dfrac{\dfrac{\mathsf{K} \in \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ X' \in \alpha\end{matrix}}{\mathsf{K}X' \in \beta \rightarrow \alpha}(\rightarrow \mathrm{e}) \qquad \begin{matrix}\mathrm{D}_2\\ Y \in \beta\end{matrix}}{\mathsf{K}X'Y \in \alpha.}(\rightarrow \mathrm{e})$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do Teorema da redução-de-sujeito

Demonstração.

Vamos nos restringir ao caso da redução fraca. Pelo lema da substituição de sujeitos, basta analisar o caso em que X é uma redex e X' é seu *contractum*.

Caso 1: $X \equiv \mathsf{K}X'Y$. Seja $\mathcal{D}$ uma dedução de $X \in \alpha$ a partir da base $\mathcal{B}$. Devido à natureza de $\mathcal{B}$, o primeiro K em X não pode ser parte de um sujeito em $\mathcal{B}$, portanto ele tem que corresponder a uma instância do esquema de axioma ($\rightarrow$ K). Logo, usando a correspondência entre deduções e construções de termos, $\mathcal{D}$ tem que ter a forma

$$\dfrac{\dfrac{\mathsf{K} \in \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ X' \in \alpha\end{matrix}}{\mathsf{K}X' \in \beta \rightarrow \alpha}(\rightarrow \mathrm{e}) \qquad \begin{matrix}\mathsf{D}_2 \\ Y \in \beta\end{matrix}}{\mathsf{K}X'Y \in \alpha.}(\rightarrow \mathrm{e})$$

Então $\mathcal{D}_1$ é a dedução desejada.

(continua...) □

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do Teorema da redução-de-sujeito (cont.)

Demonstração.

(Continuação)

Caso 2: $X \equiv SUVW$ e $X' \equiv UW(VW)$.

Atribuição de Tipos a Combinadores
Prova do Teorema da redução-de-sujeito (cont.)

Demonstração.

(Continuação)
Caso 2: $X \equiv SUVW$ e $X' \equiv UW(VW)$. Pelo argumento do caso anterior,

Atribuição de Tipos a Combinadores
Prova do Teorema da redução-de-sujeito (cont.)

Demonstração.

(Continuação)
Caso 2: $X \equiv SUVW$ e $X' \equiv UW(VW)$. Pelo argumento do caso anterior, a dedução de $X \in \alpha$ tem que ter a seguinte forma:

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do Teorema da redução-de-sujeito (cont.)

Demonstração.

(Continuação)

Caso 2: $X \equiv SUVW$ e $X' \equiv UW(VW)$. Pelo argumento do caso anterior, a dedução de $X \in \alpha$ tem que ter a seguinte forma:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathsf{S}\in(\gamma\to\beta\to\alpha)\to(\gamma\to\beta)\to(\gamma\to\alpha) \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ U\in\gamma\to\beta\to\alpha\end{array}}{SU\in(\gamma\to\beta)\to(\gamma\to\alpha)}(\to\mathrm{e}) \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ V\in\gamma\to\beta\end{array}}{SUV\in\gamma\to\alpha}(\to\mathrm{e}) \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_3\\ W\in\gamma\end{array}}{SUVW\in\alpha}(\to\mathrm{e})$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do Teorema da redução-de-sujeito (cont.)

Demonstração.

(Continuação)

Caso 2: $X \equiv SUVW$ e $X' \equiv UW(VW)$. Pelo argumento do caso anterior, a dedução de $X \in \alpha$ tem que ter a seguinte forma:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathsf{S}\in(\gamma\to\beta\to\alpha)\to(\gamma\to\beta)\to(\gamma\to\alpha) \quad \begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ U\in\gamma\to\beta\to\alpha\end{array}}{SU\in(\gamma\to\beta)\to(\gamma\to\alpha)}\,(\to\mathrm{e}) \quad \begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ V\in\gamma\to\beta\end{array}}{SUV\in\gamma\to\alpha}\,(\to\mathrm{e}) \quad \begin{array}{c}\mathcal{D}_3\\ W\in\gamma\end{array}}{SUVW\in\alpha}\,(\to\mathrm{e})$$

Dela podemos construir uma dedução de $X' \in \alpha$ da seguinte forma:

Atribuição de Tipos a Combinadores

Prova do Teorema da redução-de-sujeito (cont.)

Demonstração.

(Continuação)

Caso 2: $X \equiv SUVW$ e $X' \equiv UW(VW)$. Pelo argumento do caso anterior, a dedução de $X \in \alpha$ tem que ter a seguinte forma:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{S\in(\gamma\to\beta\to\alpha)\to(\gamma\to\beta)\to(\gamma\to\alpha) \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ U\in\gamma\to\beta\to\alpha\end{array}}{SU\in(\gamma\to\beta)\to(\gamma\to\alpha)}\,(\to\mathrm{e}) \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ V\in\gamma\to\beta\end{array}}{SUV\in\gamma\to\alpha}\,(\to\mathrm{e}) \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_3\\ W\in\gamma\end{array}}{SUVW\in\alpha}\,(\to\mathrm{e})$$

Dela podemos construir uma dedução de $X' \in \alpha$ da seguinte forma:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ U\in\gamma\to\beta\to\alpha\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_3\\ W\in\gamma\end{array}}{UW\in\beta\to\alpha}\,(\to\mathrm{e}) \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ V\in\gamma\to\beta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_3\\ W\in\gamma\end{array}}{VW\in\beta}\,(\to\mathrm{e})}{UW(VW)\in\alpha}\,(\to\mathrm{e})$$

$\square$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Termos estratificados: definição

Definição

Para cada termo puro Y^{α} da Lógica Combinatória,

Atribuição de Tipos a Combinadores

Termos estratificados: definição

Definição

Para cada termo puro Y^α da Lógica Combinatória, defina $|Y^\alpha|$ como sendo termo não-tipado obtido substituindo-se cada varável tipada em Y^α pela variável não tipada correspondente,

Atribuição de Tipos a Combinadores

Termos estratificados: definição

Definição

Para cada termo puro Y^α da Lógica Combinatória, defina $|Y^\alpha|$ como sendo termo não-tipado obtido substituindo-se cada varável tipada em Y^α pela variável não tipada correspondente, e removendo-se todos os expoentes-tipo de Y^α.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Termos estratificados: definição

Definição

Para cada termo puro Y^α da Lógica Combinatória, defina $|Y^\alpha|$ como sendo termo não-tipado obtido substituindo-se cada varável tipada em Y^α pela variável não tipada correspondente, e removendo-se todos os expoentes-tipo de Y^α. Mais especificamente, defina

Atribuição de Tipos a Combinadores

Termos estratificados: definição

Definição

Para cada termo puro Y^α da Lógica Combinatória, defina $|Y^\alpha|$ como sendo termo não-tipado obtido substituindo-se cada varável tipada em Y^α pela variável não tipada correspondente, e removendo-se todos os expoentes-tipo de Y^α. Mais especificamente, defina

$$|\mathsf{S}_{\alpha,\beta,\gamma}| \equiv \mathsf{S}, \qquad |\mathsf{K}_{\alpha,\beta}| \equiv \mathsf{K}.$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Termos estratificados: definição (cont.)

Definição (Termos estratificados da Lógica Combinatória)

Seja X um termo qualquer da LC,

Atribuição de Tipos a Combinadores

Termos estratificados: definição (cont.)

Definição (Termos estratificados da Lógica Combinatória)

Seja X um termo qualquer da LC, com $VL(X) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ $(n \geq 0)$.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Termos estratificados: definição (cont.)

Definição (Termos estratificados da Lógica Combinatória)

Seja X um termo qualquer da LC, com $VL(X) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ $(n \geq 0)$.
(a) Para um termo puro fechado X:

Atribuição de Tipos a Combinadores

Termos estratificados: definição (cont.)

Definição (Termos estratificados da Lógica Combinatória)

Seja X um termo qualquer da LC, com $VL(X) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ $(n \geq 0)$.
(a) Para um termo puro fechado X: dizemos que X é estratificado *sse existe um esquema de tipo α tal que*

Atribuição de Tipos a Combinadores

Termos estratificados: definição (cont.)

Definição (Termos estratificados da Lógica Combinatória)

Seja X um termo qualquer da LC, com $VL(X) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ($n \geq 0$).

(a) Para um termo puro fechado X: dizemos que X é estratificado *sse existe um esquema de tipo α tal que*

$$\vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha.$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Termos estratificados: definição (cont.)

Definição (Termos estratificados da Lógica Combinatória)

Seja X um termo qualquer da LC, com $VL(X) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ $(n \geq 0)$.

(a) Para um termo puro fechado X: dizemos que X é estratificado *sse existe um esquema de tipo α tal que*

$$\vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha.$$

(b) Para qualquer termo puro X:

Atribuição de Tipos a Combinadores

Termos estratificados: definição (cont.)

Definição (Termos estratificados da Lógica Combinatória)

Seja X um termo qualquer da LC, com $VL(X) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ $(n \geq 0)$.

(a) Para um termo puro fechado X: dizemos que X é estratificado *sse existe um esquema de tipo α tal que*

$$\vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha.$$

(b) Para qualquer termo puro X: dizemos que X é estratificado *sse existe $\delta_1, \ldots, \delta_n$,*

Atribuição de Tipos a Combinadores

Termos estratificados: definição (cont.)

Definição (Termos estratificados da Lógica Combinatória)

Seja X um termo qualquer da LC, com $VL(X) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ $(n \geq 0)$.
(a) Para um termo puro fechado X: dizemos que X é estratificado *sse existe um esquema de tipo α tal que*

$$\vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha.$$

(b) Para qualquer termo puro X: dizemos que X é estratificado *sse existe $\delta_1, \ldots, \delta_n$, α*

Atribuição de Tipos a Combinadores

Termos estratificados: definição (cont.)

Definição (Termos estratificados da Lógica Combinatória)

Seja X um termo qualquer da LC, com $VL(X) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ $(n \geq 0)$.

(a) Para um termo puro fechado X: dizemos que X é estratificado *sse existe um esquema de tipo α tal que*

$$\vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha.$$

(b) Para qualquer termo puro X: dizemos que X é estratificado *sse existe $\delta_1, \ldots, \delta_n$, α tais que*

Atribuição de Tipos a Combinadores

Termos estratificados: definição (cont.)

Definição (Termos estratificados da Lógica Combinatória)

Seja X um termo qualquer da LC, com $VL(X) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ $(n \geq 0)$.

(a) Para um termo puro fechado X: dizemos que X é estratificado *sse existe um esquema de tipo α tal que*

$$\vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha.$$

(b) Para qualquer termo puro X: dizemos que X é estratificado *sse existe $\delta_1, \ldots, \delta_n$, α tais que*

$$x_1 \in \delta_1, \ldots, x_n \in \delta_n \quad \vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha.$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Termos estratificados: definição (cont.)

Definição (Termos estratificados da Lógica Combinatória)

Seja X um termo qualquer da LC, com $VL(X) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ $(n \geq 0)$.
(a) Para um termo puro fechado X: dizemos que X é estratificado *sse existe um esquema de tipo α tal que*

$$\vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha.$$

(b) Para qualquer termo puro X: dizemos que X é estratificado *sse existe $\delta_1, \ldots, \delta_n$, α tais que*

$$x_1 \in \delta_1, \ldots, x_n \in \delta_n \quad \vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha.$$

(c) Para qualquer termo X:

Atribuição de Tipos a Combinadores

Termos estratificados: definição (cont.)

Definição (Termos estratificados da Lógica Combinatória)

Seja X um termo qualquer da LC, com $VL(X) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ($n \geq 0$).

(a) Para um termo puro fechado X: dizemos que X é estratificado *sse existe um esquema de tipo α tal que*

$$\vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha.$$

(b) Para qualquer termo puro X: dizemos que X é estratificado *sse existe $\delta_1, \ldots, \delta_n$, α tais que*

$$x_1 \in \delta_1, \ldots, x_n \in \delta_n \quad \vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha.$$

(c) Para qualquer termo X: dizemos que X é estratificado relativo a uma base $\mathcal{B}$ *sse $x_1, \ldots, x_n$ não ocorre em qualquer dos sujeitos de $\mathcal{B}$*

Atribuição de Tipos a Combinadores

Termos estratificados: definição (cont.)

Definição (Termos estratificados da Lógica Combinatória)

Seja X um termo qualquer da LC, com $VL(X) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ $(n \geq 0)$.

(a) Para um termo puro fechado X: dizemos que X é estratificado *sse existe um esquema de tipo α tal que*

$$\vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha.$$

(b) Para qualquer termo puro X: dizemos que X é estratificado *sse existe $\delta_1, \ldots, \delta_n$, α tais que*

$$x_1 \in \delta_1, \ldots, x_n \in \delta_n \quad \vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha.$$

(c) Para qualquer termo X: dizemos que X é estratificado relativo a uma base *$\mathcal{B}$ sse $x_1, \ldots, x_n$ não ocorre em qualquer dos sujeitos de $\mathcal{B}$ e existe $\delta_1, \ldots, \delta_n$,*

Atribuição de Tipos a Combinadores

Termos estratificados: definição (cont.)

Definição (Termos estratificados da Lógica Combinatória)

Seja X um termo qualquer da LC, com $VL(X) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ $(n \geq 0)$.

(a) Para um termo puro fechado X: dizemos que X é estratificado *sse existe um esquema de tipo α tal que*

$$\vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha.$$

(b) Para qualquer termo puro X: dizemos que X é estratificado *sse existe $\delta_1, \ldots, \delta_n$, α tais que*

$$x_1 \in \delta_1, \ldots, x_n \in \delta_n \quad \vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha.$$

(c) Para qualquer termo X: dizemos que X é estratificado relativo a uma base *$\mathcal{B}$ sse $x_1, \ldots, x_n$ não ocorre em qualquer dos sujeitos de $\mathcal{B}$ e existe $\delta_1, \ldots, \delta_n$, α*

Atribuição de Tipos a Combinadores

Termos estratificados: definição (cont.)

Definição (Termos estratificados da Lógica Combinatória)

Seja X um termo qualquer da LC, com $VL(X) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ $(n \geq 0)$.

(a) Para um termo puro fechado X: dizemos que X é estratificado *sse existe um esquema de tipo α tal que*

$$\vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha.$$

(b) Para qualquer termo puro X: dizemos que X é estratificado *sse existe $\delta_1, \ldots, \delta_n$, α tais que*

$$x_1 \in \delta_1, \ldots, x_n \in \delta_n \quad \vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha.$$

(c) Para qualquer termo X: dizemos que X é estratificado relativo a uma base *$\mathcal{B}$ sse $x_1, \ldots, x_n$ não ocorre em qualquer dos sujeitos de $\mathcal{B}$ e existe $\delta_1, \ldots, \delta_n$, α tais que*

Atribuição de Tipos a Combinadores

Termos estratificados: definição (cont.)

Definição (Termos estratificados da Lógica Combinatória)

Seja X um termo qualquer da LC, com $VL(X) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ $(n \geq 0)$.

(a) Para um termo puro fechado X: dizemos que X é estratificado *sse existe um esquema de tipo α tal que*

$$\vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha.$$

(b) Para qualquer termo puro X: dizemos que X é estratificado *sse existe $\delta_1, \ldots, \delta_n$, α tais que*

$$x_1 \in \delta_1, \ldots, x_n \in \delta_n \quad \vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha.$$

(c) Para qualquer termo X: dizemos que X é estratificado relativo a uma base *$\mathcal{B}$ sse $x_1, \ldots, x_n$ não ocorre em qualquer dos sujeitos de $\mathcal{B}$ e existe $\delta_1, \ldots, \delta_n$, α tais que*

$$\mathcal{B}, \quad x_1 \in \delta_1, \ldots, x_n \in \delta_n \quad \vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha.$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Termos estratificados: definição (cont.)

Definição (Termos estratificados da Lógica Combinatória)

Seja X um termo qualquer da LC, com $VL(X) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ $(n \geq 0)$.

(a) Para um termo puro fechado X: dizemos que X é estratificado *sse existe um esquema de tipo α tal que*

$$\vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha.$$

(b) Para qualquer termo puro X: dizemos que X é estratificado *sse existe $\delta_1, \ldots, \delta_n$, α tais que*

$$x_1 \in \delta_1, \ldots, x_n \in \delta_n \quad \vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha.$$

(c) Para qualquer termo X: dizemos que X é estratificado relativo a uma base *$\mathcal{B}$ sse $x_1, \ldots, x_n$ não ocorre em qualquer dos sujeitos de $\mathcal{B}$ e existe $\delta_1, \ldots, \delta_n$, α tais que*

$$\mathcal{B}, \quad x_1 \in \delta_1, \ldots, x_n \in \delta_n \quad \vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha.$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Termos estratificados: exemplos

Exemplo (Termos estratificados)

Os seguintes termos são estratificados:

Atribuição de Tipos a Combinadores

Termos estratificados: exemplos

Exemplo (Termos estratificados)

Os seguintes termos são estratificados:

$$\mathsf{K},$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Termos estratificados: exemplos

Exemplo (Termos estratificados)

Os seguintes termos são estratificados:

$$\mathsf{K}, \mathsf{S},$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Termos estratificados: exemplos

Exemplo (Termos estratificados)

Os seguintes termos são estratificados:

$$\mathsf{K}, \mathsf{S}, \mathsf{I},$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Termos estratificados: exemplos

Exemplo (Termos estratificados)

Os seguintes termos são estratificados:

$$K, S, I, B,$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Termos estratificados: exemplos

Exemplo (Termos estratificados)

Os seguintes termos são estratificados:

$$\mathsf{K}, \mathsf{S}, \mathsf{I}, \mathsf{B}, \mathsf{C},$$

Atribuição de Tipos a Combinadores
Termos estratificados: exemplos

Exemplo (Termos estratificados)

Os seguintes termos são estratificados:

$$\mathsf{K}, \mathsf{S}, \mathsf{I}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{W},$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Termos estratificados: exemplos

Exemplo (Termos estratificados)

Os seguintes termos são estratificados:

$$\mathsf{K}, \mathsf{S}, \mathsf{I}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{W}, \mathsf{KK},$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Termos estratificados: exemplos

Exemplo (Termos estratificados)

Os seguintes termos são estratificados:

$$\mathsf{K}, \mathsf{S}, \mathsf{I}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{W}, \mathsf{KK}, \mathsf{SB},$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Termos estratificados: exemplos

Exemplo (Termos estratificados)

Os seguintes termos são estratificados:

$$\mathsf{K}, \mathsf{S}, \mathsf{I}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{W}, \mathsf{KK}, \mathsf{SB}, \mathsf{Z}_n,$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Termos estratificados: exemplos

Exemplo (Termos estratificados)

Os seguintes termos são estratificados:

$$\mathrm{K}, \mathrm{S}, \mathrm{I}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{W}, \mathrm{KK}, \mathrm{SB}, \mathrm{Z}_n, \mathrm{D},$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Termos estratificados: exemplos

Exemplo (Termos estratificados)

Os seguintes termos são estratificados:

$$\mathsf{K}, \mathsf{S}, \mathsf{I}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{W}, \mathsf{KK}, \mathsf{SB}, \mathsf{Z}_n, \mathsf{D}, \mathsf{R}_{\text{Bernays}}.$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Termos estratificados: caracterização

Lema

Seja X um termo puro da LC:

Atribuição de Tipos a Combinadores

Termos estratificados: caracterização

Lema

Seja X um termo puro da LC:
(a) X é estratificado sse cada subtermo de X for estratificado.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Termos estratificados: caracterização

Lema

Seja X um termo puro da LC:
(a) X é estratificado sse cada subtermo de X for estratificado.
(b) X é estratificado sse existem tipos (não apenas esquemas de tipo) $\delta_1, \ldots, \delta_n, \alpha$ satisfazendo ao item (b) da Definição de termo estratificado.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Termos estratificados: caracterização

Lema

Seja X um termo puro da LC:
(a) X é estratificado sse cada subtermo de X for estratificado.
(b) X é estratificado sse existem tipos (não apenas esquemas de tipo) $\delta_1, \ldots, \delta_n, \alpha$ satisfazendo ao item (b) da Definição de termo estratificado.
(c) X é estratificado sse $X \equiv |Y^\alpha|$ para algum tipo tipado puro Y^α.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Termos estratificados: caracterização

Lema

Seja X um termo puro da LC:
(a) X é estratificado sse cada subtermo de X for estratificado.
(b) X é estratificado sse existem tipos (não apenas esquemas de tipo) $\delta_1, \ldots, \delta_n, \alpha$ satisfazendo ao item (b) da Definição de termo estratificado.
(c) X é estratificado sse $X \equiv |Y^\alpha|$ para algum tipo tipado puro Y^α.
(d) O conjunto de todos os termos puros estratificados da Lógica Combinatória é fechado sob redução forte e sob redução fraca,

Atribuição de Tipos a Combinadores

Termos estratificados: caracterização

Lema

Seja X um termo puro da LC:
(a) X é estratificado sse cada subtermo de X for estratificado.
(b) X é estratificado sse existem tipos (não apenas esquemas de tipo) $\delta_1, \ldots, \delta_n, \alpha$ satisfazendo ao item (b) da Definição de termo estratificado.
(c) X é estratificado sse $X \equiv |Y^\alpha|$ para algum tipo tipado puro Y^α.
(d) O conjunto de todos os termos puros estratificados da Lógica Combinatória é fechado sob redução forte e sob redução fraca, mas não sob expansão.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Termos estratificados: caracterização

Lema

Seja X um termo puro da LC:
(a) X é estratificado sse cada subtermo de X for estratificado.
(b) X é estratificado sse existem tipos (não apenas esquemas de tipo) $\delta_1, \ldots, \delta_n, \alpha$ satisfazendo ao item (b) da Definição de termo estratificado.
(c) X é estratificado sse $X \equiv |Y^\alpha|$ para algum tipo tipado puro Y^α.
(d) O conjunto de todos os termos puros estratificados da Lógica Combinatória é fechado sob redução forte e sob redução fraca, mas não sob expansão.
(e) O conjunto de todos os termos puros estratificados da Lógica Combinatória é fechado sob abstração (λ^*),

Atribuição de Tipos a Combinadores

Termos estratificados: caracterização

Lema

Seja X um termo puro da LC:
(a) X é estratificado sse cada subtermo de X for estratificado.
(b) X é estratificado sse existem tipos (não apenas esquemas de tipo) $\delta_1, \ldots, \delta_n, \alpha$ satisfazendo ao item (b) da Definição de termo estratificado.
(c) X é estratificado sse $X \equiv |Y^\alpha|$ para algum tipo tipado puro Y^α.
(d) O conjunto de todos os termos puros estratificados da Lógica Combinatória é fechado sob redução forte e sob redução fraca, mas não sob expansão.
(e) O conjunto de todos os termos puros estratificados da Lógica Combinatória é fechado sob abstração (λ^*), mas não sob aplicação.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Esquema de tipo principal: definição

Definição (Esquema de tipo principal)

Seja X um termo qualquer da Lógica Combinatória,

Atribuição de Tipos a Combinadores
Esquema de tipo principal: definição

Definição (Esquema de tipo principal)

Seja X um termo qualquer da Lógica Combinatória, com $VL(X) = \{x_1, \dots, x_n\}$ ($n \geq 0$).

Atribuição de Tipos a Combinadores

Esquema de tipo principal: definição

Definição (Esquema de tipo principal)

Seja X um termo qualquer da Lógica Combinatória, com $VL(X) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ $(n \geq 0)$.
(a) Para um termo puro fechado X:

Atribuição de Tipos a Combinadores

Esquema de tipo principal: definição

Definição (Esquema de tipo principal)

Seja X um termo qualquer da Lógica Combinatória, com $VL(X) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ($n \geq 0$).
(a) Para um termo puro fechado $X : \alpha$ é um esquema de tipo principal

Atribuição de Tipos a Combinadores

Esquema de tipo principal: definição

Definição (Esquema de tipo principal)

Seja X um termo qualquer da Lógica Combinatória, com $VL(X) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ $(n \geq 0)$.
(a) Para um termo puro fechado $X : \alpha$ é um esquema de tipo principal *(em inglês "*principal type-scheme*")*

Atribuição de Tipos a Combinadores

Esquema de tipo principal: definição

Definição (Esquema de tipo principal)

Seja X um termo qualquer da Lógica Combinatória, com $VL(X) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ($n \geq 0$).
(a) Para um termo puro fechado X: α é um esquema de tipo principal *(em inglês "*principal type-scheme*") de X sse*

Atribuição de Tipos a Combinadores

Esquema de tipo principal: definição

Definição (Esquema de tipo principal)

Seja X um termo qualquer da Lógica Combinatória, com $VL(X) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ $(n \geq 0)$.

(a) Para um termo puro fechado $X : \alpha$ é um esquema de tipo principal *(em inglês "*principal type-scheme*") de X sse*

$$\vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha'$$

se verifica para um esquema de tipo α' quando e somente quando α' for uma instância de substituição de α.

Atribuição de Tipos a Combinadores
Esquema de tipo principal: definição

Definição (Esquema de tipo principal)

Seja X um termo qualquer da Lógica Combinatória, com $VL(X) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ $(n \geq 0)$*.*
(a) Para um termo puro fechado $X : \alpha$ *é um* esquema de tipo principal *(em inglês "*principal type-scheme*") de X sse*

$$\vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha'$$

se verifica para um esquema de tipo α' *quando e somente quando* α' *for uma instância de substituição de* α*. (Como* α *é uma instância de substituição de si próprio,*

Atribuição de Tipos a Combinadores
Esquema de tipo principal: definição

Definição (Esquema de tipo principal)

Seja X um termo qualquer da Lógica Combinatória, com $VL(X) = \{x_1, \dots, x_n\}$ ($n \geq 0$).
(a) Para um termo puro fechado X: α é um esquema de tipo principal *(em inglês "*principal type-scheme*") de X sse*

$$\vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha'$$

se verifica para um esquema de tipo α' quando e somente quando α' for uma instância de substituição de α. (Como α é uma instância de substituição de si próprio, α é um esquema de tipo principal de X somente se $\vdash X \in \alpha$.)
(continua...)

Atribuição de Tipos a Combinadores

Esquema de tipo principal: definição (cont.)

Definição (Esquema de tipo principal (cont.))

(b) Para qualquer X puro:

Atribuição de Tipos a Combinadores

Esquema de tipo principal: definição (cont.)

Definição (Esquema de tipo principal (cont.))

(b) Para qualquer X puro: primeiro, uma $VL(X)$-base é qualquer base $\mathcal{B}$ com a forma

Atribuição de Tipos a Combinadores

Esquema de tipo principal: definição (cont.)

Definição (Esquema de tipo principal (cont.))

(b) Para qualquer X puro: primeiro, uma $VL(X)$-base é qualquer base $\mathcal{B}$ com a forma

$$\mathcal{B} = \{x_1 \in \delta, \ldots, x_n \in \delta_n\}.$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Esquema de tipo principal: definição (cont.)

Definição (Esquema de tipo principal (cont.))

(b) Para qualquer X puro: primeiro, uma $VL(X)$-base é qualquer base $\mathcal{B}$ com a forma

$$\mathcal{B} = \{x_1 \in \delta, \ldots, x_n \in \delta_n\}.$$

Um par $\langle \mathcal{B}, \alpha \rangle$ é um par principal *(*p.p.*) de X,*

Atribuição de Tipos a Combinadores
Esquema de tipo principal: definição (cont.)

Definição (Esquema de tipo principal (cont.))

(b) Para qualquer X puro: primeiro, uma $VL(X)$-base é qualquer base $\mathcal{B}$ com a forma

$$\mathcal{B} = \{x_1 \in \delta, \ldots, x_n \in \delta_n\}.$$

Um par $\langle \mathcal{B}, \alpha \rangle$ é um par principal *(*p.p.*) de X, e α é um esquema de tipo principal de X,*

Atribuição de Tipos a Combinadores

Esquema de tipo principal: definição (cont.)

Definição (Esquema de tipo principal (cont.))

(b) Para qualquer X puro: primeiro, uma $VL(X)$-base é qualquer base $\mathcal{B}$ com a forma

$$\mathcal{B} = \{x_1 \in \delta, \ldots, x_n \in \delta_n\}.$$

Um par $\langle \mathcal{B}, \alpha \rangle$ é um par principal *(*p.p.*) de X, e α é um esquema de tipo principal de X, sse $\mathcal{B}$ é uma $VL(X)$-base e a relação*

Atribuição de Tipos a Combinadores

Esquema de tipo principal: definição (cont.)

Definição (Esquema de tipo principal (cont.))

(b) Para qualquer X puro: primeiro, uma $VL(X)$-base é qualquer base $\mathcal{B}$ com a forma

$$\mathcal{B} = \{x_1 \in \delta, \ldots, x_n \in \delta_n\}.$$

Um par $\langle \mathcal{B}, \alpha \rangle$ é um par principal *(*p.p.*) de X, e α é um esquema de tipo principal de X, sse $\mathcal{B}$ é uma $VL(X)$-base e a relação*

$$\mathcal{B}' \quad \vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha'$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Esquema de tipo principal: definição (cont.)

Definição (Esquema de tipo principal (cont.))

(b) Para qualquer X puro: primeiro, uma $VL(X)$-base é qualquer base $\mathcal{B}$ com a forma

$$\mathcal{B} = \{x_1 \in \delta, \ldots, x_n \in \delta_n\}.$$

Um par $\langle \mathcal{B}, \alpha \rangle$ é um par principal *(p.p.) de X, e α é um* esquema de tipo principal *de X, sse $\mathcal{B}$ é uma $VL(X)$-base e a relação*

$$\mathcal{B}' \quad \vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha'$$

se verifica para uma $VL(X)$-base $\mathcal{B}'$ e um esquema de tipo α' quando e somente quando $\langle \mathcal{B}', \alpha' \rangle$ for uma instância de substituição de $\langle \mathcal{B}, \alpha \rangle$.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Esquema de tipo principal: definição (cont.)

Definição (Esquema de tipo principal (cont.))

(b) Para qualquer X puro: primeiro, uma $VL(X)$-base é qualquer base $\mathcal{B}$ com a forma

$$\mathcal{B} = \{x_1 \in \delta, \ldots, x_n \in \delta_n\}.$$

Um par $\langle \mathcal{B}, \alpha \rangle$ é um par principal *(p.p.) de X, e α é um esquema de tipo principal de X, sse $\mathcal{B}$ é uma $VL(X)$-base e a relação*

$$\mathcal{B}' \quad \vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha'$$

se verifica para uma $VL(X)$-base $\mathcal{B}'$ e um esquema de tipo α' quando e somente quando $\langle \mathcal{B}', \alpha' \rangle$ for uma instância de substituição de $\langle \mathcal{B}, \alpha \rangle$.

(continua...)

Atribuição de Tipos a Combinadores
Esquema de tipo principal: definição (cont.)

Definição (Esquema de tipo principal (cont.))

(c) Para qualquer X:

Atribuição de Tipos a Combinadores

Esquema de tipo principal: definição (cont.)

Definição (Esquema de tipo principal (cont.))

(c) Para qualquer X*: suponha que* $\mathcal{B}_0$ *seja uma base qualquer cujos sujeitos não contenham nenhum dos* $x_1, \ldots, x_n$*;*

Atribuição de Tipos a Combinadores

Esquema de tipo principal: definição (cont.)

Definição (Esquema de tipo principal (cont.))

(c) Para qualquer X*: suponha que* $\mathcal{B}_0$ *seja uma base qualquer cujos sujeitos não contenham nenhum dos* $x_1, \ldots, x_n$*; um par* $\langle \mathcal{B}, \alpha \rangle$ *é um par principal,*

Atribuição de Tipos a Combinadores

Esquema de tipo principal: definição (cont.)

Definição (Esquema de tipo principal (cont.))

(c) Para qualquer X: suponha que $\mathcal{B}_0$ seja uma base qualquer cujos sujeitos não contenham nenhum dos $x_1, \ldots, x_n$; um par $\langle \mathcal{B}, \alpha \rangle$ é um par principal, e α é um esquema de tipo principal,

Atribuição de Tipos a Combinadores

Esquema de tipo principal: definição (cont.)

Definição (Esquema de tipo principal (cont.))

(c) Para qualquer X: suponha que $\mathcal{B}_0$ seja uma base qualquer cujos sujeitos não contenham nenhum dos $x_1, \ldots, x_n$; um par $\langle \mathcal{B}, \alpha \rangle$ é um par principal, e α é um esquema de tipo principal, de X relativo a $\mathcal{B}_0$,

Atribuição de Tipos a Combinadores

Esquema de tipo principal: definição (cont.)

Definição (Esquema de tipo principal (cont.))

(c) Para qualquer X: suponha que $\mathcal{B}_0$ seja uma base qualquer cujos sujeitos não contenham nenhum dos $x_1, \ldots, x_n$; um par $\langle \mathcal{B}, \alpha \rangle$ é um par principal, e α é um esquema de tipo principal, de X relativo a *$\mathcal{B}_0$, sse $\mathcal{B}$ for uma $VL(X)$-base e*

Atribuição de Tipos a Combinadores

Esquema de tipo principal: definição (cont.)

Definição (Esquema de tipo principal (cont.))

(c) Para qualquer X: suponha que $\mathcal{B}_0$ seja uma base qualquer cujos sujeitos não contenham nenhum dos $x_1, \ldots, x_n$; um par $\langle \mathcal{B}, \alpha \rangle$ é um par principal, e α é um esquema de tipo principal, de X relativo a $\mathcal{B}_0$*, sse $\mathcal{B}$ for uma $VL(X)$-base e*

$$\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}' \quad \vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha'$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Esquema de tipo principal: definição (cont.)

Definição (Esquema de tipo principal (cont.))

(c) Para qualquer X: suponha que $\mathcal{B}_0$ seja uma base qualquer cujos sujeitos não contenham nenhum dos $x_1, \ldots, x_n$; um par $\langle \mathcal{B}, \alpha \rangle$ é um par principal, e α é um esquema de tipo principal, de X relativo a *$\mathcal{B}_0$, sse $\mathcal{B}$ for uma $VL(X)$-base e*

$$\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}' \quad \vdash_{AT_C} \quad X \in \alpha'$$

se verifica para uma $VL(X)$-base $\mathcal{B}'$ e um esquema de tipo α' quando e somente quando $\langle \mathcal{B}', \alpha' \rangle$ for uma instância de substituição de $\langle \mathcal{B}, \alpha \rangle$.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Exemplo

O combinador I *tem esquema de tipo principal* $a \to a$.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

Por definição, $\mathsf{I} \equiv \mathsf{SKK}$, e sua árvore de construção é a seguinte

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

Por definição, $\mathsf{I} \equiv \mathsf{SKK}$, e sua árvore de construção é a seguinte

$$\dfrac{\dfrac{\mathsf{S} \qquad \mathsf{K}}{\mathsf{SK}} \qquad \mathsf{K}}{\mathsf{SKK}}$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

Por definição, $\mathsf{I} \equiv \mathsf{SKK}$, e sua árvore de construção é a seguinte

$$\dfrac{\dfrac{\mathsf{S} \qquad \mathsf{K}}{\mathsf{SK}} \qquad \mathsf{K}}{\mathsf{SKK}}$$

Se pudermos deduzir $\mathsf{SKK} \in \theta$ para algum θ,

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

Por definição, $\mathsf{I} \equiv \mathsf{SKK}$, e sua árvore de construção é a seguinte

$$\dfrac{\dfrac{\mathsf{S} \qquad \mathsf{K}}{\mathsf{SK}} \qquad \mathsf{K}}{\mathsf{SKK}}$$

Se pudermos deduzir $\mathsf{SKK} \in \theta$ para algum θ, então isso tem que ser a conclusão de uma inferência pela regra $(\rightarrow \mathrm{e})$,

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

Por definição, $\mathsf{I} \equiv \mathsf{SKK}$, e sua árvore de construção é a seguinte

$$\dfrac{\dfrac{\mathsf{S} \qquad \mathsf{K}}{\mathsf{SK}} \qquad \mathsf{K}}{\mathsf{SKK}}$$

Se pudermos deduzir $\mathsf{SKK} \in \theta$ para algum θ, então isso tem que ser a conclusão de uma inferência pela regra $(\rightarrow \mathrm{e})$, para a qual as premissas são

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

Por definição, $\mathsf{I} \equiv \mathsf{SKK}$, e sua árvore de construção é a seguinte

$$\dfrac{\dfrac{\mathsf{S} \qquad \mathsf{K}}{\mathsf{SK}} \qquad \mathsf{K}}{\mathsf{SKK}}$$

Se pudermos deduzir $\mathsf{SKK} \in \theta$ para algum θ, então isso tem que ser a conclusão de uma inferência pela regra $(\rightarrow \mathrm{e})$, para a qual as premissas são

$$\mathsf{SK} \in \rho \rightarrow \theta, \qquad \mathsf{K} \in \rho,$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

Por definição, $\mathsf{I} \equiv \mathsf{SKK}$, e sua árvore de construção é a seguinte

$$\dfrac{\dfrac{\mathsf{S} \qquad \mathsf{K}}{\mathsf{SK}} \qquad \mathsf{K}}{\mathsf{SKK}}$$

Se pudermos deduzir $\mathsf{SKK} \in \theta$ para algum θ, então isso tem que ser a conclusão de uma inferência pela regra $(\rightarrow \mathrm{e})$, para a qual as premissas são

$$\mathsf{SK} \in \rho \rightarrow \theta, \qquad \mathsf{K} \in \rho,$$

para algum ρ.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

Por definição, $\mathsf{I} \equiv \mathsf{SKK}$, e sua árvore de construção é a seguinte

$$\dfrac{\dfrac{\mathsf{S} \qquad \mathsf{K}}{\mathsf{SK}} \qquad \mathsf{K}}{\mathsf{SKK}}$$

Se pudermos deduzir $\mathsf{SKK} \in \theta$ para algum θ, então isso tem que ser a conclusão de uma inferência pela regra $(\rightarrow \mathrm{e})$, para a qual as premissas são

$$\mathsf{SK} \in \rho \rightarrow \theta, \qquad \mathsf{K} \in \rho,$$

para algum ρ. Esta última deve ser uma instância do esquema de axioma $(\rightarrow \mathsf{K})$,

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

Por definição, I $\equiv$ SKK, e sua árvore de construção é a seguinte

$$\dfrac{\dfrac{\mathsf{S} \qquad \mathsf{K}}{\mathsf{SK}} \qquad \mathsf{K}}{\mathsf{SKK}}$$

Se pudermos deduzir SKK $\in \theta$ para algum θ, então isso tem que ser a conclusão de uma inferência pela regra $(\rightarrow \mathrm{e})$, para a qual as premissas são

$$\mathsf{SK} \in \rho \rightarrow \theta, \qquad \mathsf{K} \in \rho,$$

para algum ρ. Esta última deve ser uma instância do esquema de axioma $(\rightarrow \mathsf{K})$, enquanto que a primeira tem que ser a conclusão de uma inferência para a qual as premissas são

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

Por definição, $\mathsf{I} \equiv \mathsf{SKK}$, e sua árvore de construção é a seguinte

$$\dfrac{\dfrac{\mathsf{S} \qquad \mathsf{K}}{\mathsf{SK}} \qquad \mathsf{K}}{\mathsf{SKK}}$$

Se pudermos deduzir $\mathsf{SKK} \in \theta$ para algum θ, então isso tem que ser a conclusão de uma inferência pela regra $(\rightarrow \mathrm{e})$, para a qual as premissas são

$$\mathsf{SK} \in \rho \rightarrow \theta, \qquad \mathsf{K} \in \rho,$$

para algum ρ. Esta última deve ser uma instância do esquema de axioma $(\rightarrow \mathsf{K})$, enquanto que a primeira tem que ser a conclusão de uma inferência para a qual as premissas são

$$\mathsf{S} \in \sigma \rightarrow \rho \rightarrow \theta, \qquad \mathsf{K} \in \sigma,$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

Por definição, $\mathsf{I} \equiv \mathsf{SKK}$, e sua árvore de construção é a seguinte

$$\dfrac{\dfrac{\mathsf{S} \qquad \mathsf{K}}{\mathsf{SK}} \qquad \mathsf{K}}{\mathsf{SKK}}$$

Se pudermos deduzir $\mathsf{SKK} \in \theta$ para algum θ, então isso tem que ser a conclusão de uma inferência pela regra $(\rightarrow \mathrm{e})$, para a qual as premissas são

$$\mathsf{SK} \in \rho \rightarrow \theta, \qquad \mathsf{K} \in \rho,$$

para algum ρ. Esta última deve ser uma instância do esquema de axioma $(\rightarrow \mathsf{K})$, enquanto que a primeira tem que ser a conclusão de uma inferência para a qual as premissas são

$$\mathsf{S} \in \sigma \rightarrow \rho \rightarrow \theta, \qquad \mathsf{K} \in \sigma,$$

para algum σ.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

Por definição, $\mathsf{I} \equiv \mathsf{SKK}$, e sua árvore de construção é a seguinte

$$\dfrac{\dfrac{\mathsf{S} \qquad \mathsf{K}}{\mathsf{SK}} \qquad \mathsf{K}}{\mathsf{SKK}}$$

Se pudermos deduzir $\mathsf{SKK} \in \theta$ para algum θ, então isso tem que ser a conclusão de uma inferência pela regra $(\rightarrow \mathrm{e})$, para a qual as premissas são

$$\mathsf{SK} \in \rho \rightarrow \theta, \qquad \mathsf{K} \in \rho,$$

para algum ρ. Esta última deve ser uma instância do esquema de axioma $(\rightarrow \mathsf{K})$, enquanto que a primeira tem que ser a conclusão de uma inferência para a qual as premissas são

$$\mathsf{S} \in \sigma \rightarrow \rho \rightarrow \theta, \qquad \mathsf{K} \in \sigma,$$

para algum σ.

(continua...) $\square$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

(Continuação)

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

(Continuação)
Essas duas últimas fórmulas têm que ser instâncias dos esquemas de axioma ($\rightarrow$ S) e ($\rightarrow$ K) respectivamente.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

(Continuação)
Essas duas últimas fórmulas têm que ser instâncias dos esquemas de axioma ($\rightarrow$ S) e ($\rightarrow$ K) respectivamente. Para chegar a uma instância de ($\rightarrow$ S), precisamos de

Atribuição de Tipos a Combinadores
Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

(Continuação)
Essas duas últimas fórmulas têm que ser instâncias dos esquemas de axioma ($\rightarrow$ S) e ($\rightarrow$ K) respectivamente. Para chegar a uma instância de ($\rightarrow$ S), precisamos de

(*a*) $\sigma \equiv \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma,$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

(Continuação)
Essas duas últimas fórmulas têm que ser instâncias dos esquemas de axioma ($\rightarrow$ S) e ($\rightarrow$ K) respectivamente. Para chegar a uma instância de ($\rightarrow$ S), precisamos de

(*a*) $\sigma \equiv \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$,
(*b*) $\rho \equiv \alpha \rightarrow \beta$,

Atribuição de Tipos a Combinadores
Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

(Continuação)
Essas duas últimas fórmulas têm que ser instâncias dos esquemas de axioma ($\rightarrow$ S) e ($\rightarrow$ K) respectivamente. Para chegar a uma instância de ($\rightarrow$ S), precisamos de

(*a*) $\sigma \equiv \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$,
(*b*) $\rho \equiv \alpha \rightarrow \beta$,
(*c*) $\theta \equiv \alpha \rightarrow \gamma$,

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

(Continuação)
Essas duas últimas fórmulas têm que ser instâncias dos esquemas de axioma ($\rightarrow$ S) e ($\rightarrow$ K) respectivamente. Para chegar a uma instância de ($\rightarrow$ S), precisamos de

(*a*) $\sigma \equiv \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$,
(*b*) $\rho \equiv \alpha \rightarrow \beta$,
(*c*) $\theta \equiv \alpha \rightarrow \gamma$,

para esquemas apropriados α, β, γ.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

(Continuação)
Essas duas últimas fórmulas têm que ser instâncias dos esquemas de axioma ($\rightarrow$ S) e ($\rightarrow$ K) respectivamente. Para chegar a uma instância de ($\rightarrow$ S), precisamos de

(*a*) $\sigma \equiv \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$,
(*b*) $\rho \equiv \alpha \rightarrow \beta$,
(*c*) $\theta \equiv \alpha \rightarrow \gamma$,

para esquemas apropriados α, β, γ. Para fazer com que as fórmulas K $\in \rho$ e K $\in \sigma$ sejam instâncias do esquema ($\rightarrow$ K), precisamos de

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

(Continuação)
Essas duas últimas fórmulas têm que ser instâncias dos esquemas de axioma ($\rightarrow$ S) e ($\rightarrow$ K) respectivamente. Para chegar a uma instância de ($\rightarrow$ S), precisamos de

(*a*) $\sigma \equiv \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$,
(*b*) $\rho \equiv \alpha \rightarrow \beta$,
(*c*) $\theta \equiv \alpha \rightarrow \gamma$,

para esquemas apropriados α, β, γ. Para fazer com que as fórmulas K $\in \rho$ e K $\in \sigma$ sejam instâncias do esquema ($\rightarrow$ K), precisamos de

(*c*) $\beta \equiv \delta \rightarrow \alpha$,

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

(Continuação)
Essas duas últimas fórmulas têm que ser instâncias dos esquemas de axioma ($\rightarrow$ S) e ($\rightarrow$ K) respectivamente. Para chegar a uma instância de ($\rightarrow$ S), precisamos de

(*a*) $\sigma \equiv \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$,
(*b*) $\rho \equiv \alpha \rightarrow \beta$,
(*c*) $\theta \equiv \alpha \rightarrow \gamma$,

para esquemas apropriados α, β, γ. Para fazer com que as fórmulas K $\in \rho$ e K $\in \sigma$ sejam instâncias do esquema ($\rightarrow$ K), precisamos de

(*c*) $\beta \equiv \delta \rightarrow \alpha$,
(*d*) $\gamma \equiv \alpha$,

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

(Continuação)
Essas duas últimas fórmulas têm que ser instâncias dos esquemas de axioma ($\rightarrow$ S) e ($\rightarrow$ K) respectivamente. Para chegar a uma instância de ($\rightarrow$ S), precisamos de

(*a*) $\sigma \equiv \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$,
(*b*) $\rho \equiv \alpha \rightarrow \beta$,
(*c*) $\theta \equiv \alpha \rightarrow \gamma$,

para esquemas apropriados α, β, γ. Para fazer com que as fórmulas K $\in \rho$ e K $\in \sigma$ sejam instâncias do esquema ($\rightarrow$ K), precisamos de

(*c*) $\beta \equiv \delta \rightarrow \alpha$,
(*d*) $\gamma \equiv \alpha$,

para algum δ.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

(Continuação)
Essas duas últimas fórmulas têm que ser instâncias dos esquemas de axioma ($\rightarrow$ S) e ($\rightarrow$ K) respectivamente. Para chegar a uma instância de ($\rightarrow$ S), precisamos de

(*a*) $\sigma \equiv \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$,
(*b*) $\rho \equiv \alpha \rightarrow \beta$,
(*c*) $\theta \equiv \alpha \rightarrow \gamma$,

para esquemas apropriados α, β, γ. Para fazer com que as fórmulas K $\in \rho$ e K $\in \sigma$ sejam instâncias do esquema ($\rightarrow$ K), precisamos de

(*c*) $\beta \equiv \delta \rightarrow \alpha$,
(*d*) $\gamma \equiv \alpha$,

para algum δ. Agora $\theta \equiv \alpha \rightarrow \alpha$ segue de (c) e (e).

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

(Continuação)
Essas duas últimas fórmulas têm que ser instâncias dos esquemas de axioma ($\rightarrow$ S) e ($\rightarrow$ K) respectivamente. Para chegar a uma instância de ($\rightarrow$ S), precisamos de

(*a*) $\sigma \equiv \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$,
(*b*) $\rho \equiv \alpha \rightarrow \beta$,
(*c*) $\theta \equiv \alpha \rightarrow \gamma$,

para esquemas apropriados α, β, γ. Para fazer com que as fórmulas K $\in \rho$ e K $\in \sigma$ sejam instâncias do esquema ($\rightarrow$ K), precisamos de

(*c*) $\beta \equiv \delta \rightarrow \alpha$,
(*d*) $\gamma \equiv \alpha$,

para algum δ. Agora $\theta \equiv \alpha \rightarrow \alpha$ segue de (c) e (e). Portanto, todo esquema de tipo para I tem que ser uma instância de $a \rightarrow a$.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

(Continuação)
Essas duas últimas fórmulas têm que ser instâncias dos esquemas de axioma ($\rightarrow$ S) e ($\rightarrow$ K) respectivamente. Para chegar a uma instância de ($\rightarrow$ S), precisamos de

(*a*) $\sigma \equiv \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$,
(*b*) $\rho \equiv \alpha \rightarrow \beta$,
(*c*) $\theta \equiv \alpha \rightarrow \gamma$,

para esquemas apropriados α, β, γ. Para fazer com que as fórmulas K $\in \rho$ e K $\in \sigma$ sejam instâncias do esquema ($\rightarrow$ K), precisamos de

(*c*) $\beta \equiv \delta \rightarrow \alpha$,
(*d*) $\gamma \equiv \alpha$,

para algum δ. Agora $\theta \equiv \alpha \rightarrow \alpha$ segue de (c) e (e). Portanto, todo esquema de tipo para I tem que ser uma instância de *a* $\rightarrow$ *a*. A recíproca é o exercício 14.6 □

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Exemplo

O combinador SII *não é estratificado.*

Atribuição de Tipos a Combinadores
Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

Se pudéssemos deduzir

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

Se pudéssemos deduzir

$$\mathsf{SII} \in \eta$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

Se pudéssemos deduzir

$$\mathsf{SII} \in \eta$$

para algum esquema de tipo η,

Atribuição de Tipos a Combinadores
Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

Se pudéssemos deduzir

$$\mathsf{SII} \in \eta$$

para algum esquema de tipo η, então isso tem que ser a conclusão de uma inferência por $(\rightarrow \mathrm{e})$,

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

Se pudéssemos deduzir

$$\mathsf{SII} \in \eta$$

para algum esquema de tipo η, então isso tem que ser a conclusão de uma inferência por $(\rightarrow \mathrm{e})$, cujas premissas são

Atribuição de Tipos a Combinadores
Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

Se pudéssemos deduzir

$$\mathsf{SII} \in \eta$$

para algum esquema de tipo η, então isso tem que ser a conclusão de uma inferência por $(\to \mathrm{e})$, cujas premissas são

$$\mathsf{SI} \in \xi \to \eta, \qquad \mathsf{I} \in \xi,$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

Se pudéssemos deduzir

$$\mathsf{SII} \in \eta$$

para algum esquema de tipo η, então isso tem que ser a conclusão de uma inferência por $(\rightarrow \mathrm{e})$, cujas premissas são

$$\mathsf{SI} \in \xi \rightarrow \eta, \qquad \mathsf{I} \in \xi,$$

para algum ξ.

Atribuição de Tipos a Combinadores
Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

Se pudéssemos deduzir

$$\mathsf{SII} \in \eta$$

para algum esquema de tipo η, então isso tem que ser a conclusão de uma inferência por $(\rightarrow \mathrm{e})$, cujas premissas são

$$\mathsf{SI} \in \xi \rightarrow \eta, \qquad \mathsf{I} \in \xi,$$

para algum ξ. Pela segunda fórmula e pelo exemplo anterior,

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

Se pudéssemos deduzir

$$\mathsf{SII} \in \eta$$

para algum esquema de tipo η, então isso tem que ser a conclusão de uma inferência por $(\rightarrow \mathrm{e})$, cujas premissas são

$$\mathsf{SI} \in \xi \rightarrow \eta, \qquad \mathsf{I} \in \xi,$$

para algum ξ. Pela segunda fórmula e pelo exemplo anterior, temos que ter

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

Se pudéssemos deduzir

$$\mathsf{SII} \in \eta$$

para algum esquema de tipo η, então isso tem que ser a conclusão de uma inferência por $(\rightarrow \mathrm{e})$, cujas premissas são

$$\mathsf{SI} \in \xi \rightarrow \eta, \qquad \mathsf{I} \in \xi,$$

para algum ξ. Pela segunda fórmula e pelo exemplo anterior, temos que ter

(*a*) $\xi \equiv \zeta \rightarrow \zeta$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

Se pudéssemos deduzir

$$\mathsf{SII} \in \eta$$

para algum esquema de tipo η, então isso tem que ser a conclusão de uma inferência por $(\rightarrow \mathrm{e})$, cujas premissas são

$$\mathsf{SI} \in \xi \rightarrow \eta, \qquad \mathsf{I} \in \xi,$$

para algum ξ. Pela segunda fórmula e pelo exemplo anterior, temos que ter

(*a*) $\quad \xi \equiv \zeta \rightarrow \zeta$

para algum ξ.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

Se pudéssemos deduzir

$$\mathsf{SII} \in \eta$$

para algum esquema de tipo η, então isso tem que ser a conclusão de uma inferência por $(\rightarrow \mathrm{e})$, cujas premissas são

$$\mathsf{SI} \in \xi \rightarrow \eta, \qquad \mathsf{I} \in \xi,$$

para algum ξ. Pela segunda fórmula e pelo exemplo anterior, temos que ter

(*a*) $\quad \xi \equiv \zeta \rightarrow \zeta$

para algum ξ. Daí, a primeira dessas premissas é

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

Se pudéssemos deduzir

$$\mathsf{SII} \in \eta$$

para algum esquema de tipo η, então isso tem que ser a conclusão de uma inferência por $(\rightarrow \mathrm{e})$, cujas premissas são

$$\mathsf{SI} \in \xi \rightarrow \eta, \qquad \mathsf{I} \in \xi,$$

para algum ξ. Pela segunda fórmula e pelo exemplo anterior, temos que ter

(*a*) $\xi \equiv \zeta \rightarrow \zeta$

para algum ξ. Daí, a primeira dessas premissas é

$$\mathsf{SI} \in (\zeta \rightarrow \zeta) \rightarrow \eta.$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

Se pudéssemos deduzir

$$\mathsf{SII} \in \eta$$

para algum esquema de tipo η, então isso tem que ser a conclusão de uma inferência por $(\to \mathrm{e})$, cujas premissas são

$$\mathsf{SI} \in \xi \to \eta, \qquad \mathsf{I} \in \xi,$$

para algum ξ. Pela segunda fórmula e pelo exemplo anterior, temos que ter

(*a*) $\quad \xi \equiv \zeta \to \zeta$

para algum ξ. Daí, a primeira dessas premissas é

$$\mathsf{SI} \in (\zeta \to \zeta) \to \eta.$$

Isso, por sua vez,

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

Se pudéssemos deduzir

$$\mathsf{SII} \in \eta$$

para algum esquema de tipo η, então isso tem que ser a conclusão de uma inferência por $(\rightarrow \mathrm{e})$, cujas premissas são

$$\mathsf{SI} \in \xi \rightarrow \eta, \qquad \mathsf{I} \in \xi,$$

para algum ξ. Pela segunda fórmula e pelo exemplo anterior, temos que ter

(*a*) $\quad \xi \equiv \zeta \rightarrow \zeta$

para algum ξ. Daí, a primeira dessas premissas é

$$\mathsf{SI} \in (\zeta \rightarrow \zeta) \rightarrow \eta.$$

Isso, por sua vez, tem que ser a conclusão de uma inferência cujas premissas são

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

Se pudéssemos deduzir

$$\mathsf{SII} \in \eta$$

para algum esquema de tipo η, então isso tem que ser a conclusão de uma inferência por $(\to \mathrm{e})$, cujas premissas são

$$\mathsf{SI} \in \xi \to \eta, \qquad \mathsf{I} \in \xi,$$

para algum ξ. Pela segunda fórmula e pelo exemplo anterior, temos que ter

(*a*) $\xi \equiv \zeta \to \zeta$

para algum ξ. Daí, a primeira dessas premissas é

$$\mathsf{SI} \in (\zeta \to \zeta) \to \eta.$$

Isso, por sua vez, tem que ser a conclusão de uma inferência cujas premissas são

$$\mathsf{S} \in \theta \to (\zeta \to \zeta) \to \eta, \qquad \mathsf{I} \in \theta,$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

Se pudéssemos deduzir

$$\mathsf{SII} \in \eta$$

para algum esquema de tipo η, então isso tem que ser a conclusão de uma inferência por $(\rightarrow \mathrm{e})$, cujas premissas são

$$\mathsf{SI} \in \xi \rightarrow \eta, \qquad \mathsf{I} \in \xi,$$

para algum ξ. Pela segunda fórmula e pelo exemplo anterior, temos que ter

(*a*) $\quad \xi \equiv \zeta \rightarrow \zeta$

para algum ξ. Daí, a primeira dessas premissas é

$$\mathsf{SI} \in (\zeta \rightarrow \zeta) \rightarrow \eta.$$

Isso, por sua vez, tem que ser a conclusão de uma inferência cujas premissas são

$$\mathsf{S} \in \theta \rightarrow (\zeta \rightarrow \zeta) \rightarrow \eta, \qquad \mathsf{I} \in \theta,$$

para algum θ.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

Se pudéssemos deduzir

$$\mathsf{SII} \in \eta$$

para algum esquema de tipo η, então isso tem que ser a conclusão de uma inferência por $(\to \mathrm{e})$, cujas premissas são

$$\mathsf{SI} \in \xi \to \eta, \qquad \mathsf{I} \in \xi,$$

para algum ξ. Pela segunda fórmula e pelo exemplo anterior, temos que ter

(*a*) $\xi \equiv \zeta \to \zeta$

para algum ξ. Daí, a primeira dessas premissas é

$$\mathsf{SI} \in (\zeta \to \zeta) \to \eta.$$

Isso, por sua vez, tem que ser a conclusão de uma inferência cujas premissas são

$$\mathsf{S} \in \theta \to (\zeta \to \zeta) \to \eta, \qquad \mathsf{I} \in \theta,$$

para algum θ.

(continua...) $\square$

Atribuição de Tipos a Combinadores
Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

(Continuação)

Atribuição de Tipos a Combinadores
Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

(Continuação)
Pela segunda das premissas anteriores,

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

(Continuação)
Pela segunda das premissas anteriores, e pelo Exemplo do combinador I,

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

(Continuação)
Pela segunda das premissas anteriores, e pelo Exemplo do combinador I, temos que ter

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

(Continuação)
Pela segunda das premissas anteriores, e pelo Exemplo do combinador I, temos que ter

$$\theta \equiv \delta \to \delta$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

(Continuação)
Pela segunda das premissas anteriores, e pelo Exemplo do combinador I, temos que ter

$$\theta \equiv \delta \to \delta$$

para algum δ.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

(Continuação)
Pela segunda das premissas anteriores, e pelo Exemplo do combinador I, temos que ter

$$\theta \equiv \delta \to \delta$$

para algum δ. Logo, a primeira dessas premissas é

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

(Continuação)
Pela segunda das premissas anteriores, e pelo Exemplo do combinador I, temos que ter

$$\theta \equiv \delta \to \delta$$

para algum δ. Logo, a primeira dessas premissas é

$$\mathsf{S} \in (\delta \to \delta) \to (\zeta \to \zeta) \to \eta.$$

Atribuição de Tipos a Combinadores
Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

(Continuação)
Pela segunda das premissas anteriores, e pelo Exemplo do combinador I, temos que ter

$$\theta \equiv \delta \to \delta$$

para algum δ. Logo, a primeira dessas premissas é

$$\mathsf{S} \in (\delta \to \delta) \to (\zeta \to \zeta) \to \eta.$$

Mas isso tem que ser uma instância do esquema de axioma ($\to$ S).

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

(Continuação)
Pela segunda das premissas anteriores, e pelo Exemplo do combinador I, temos que ter

$$\theta \equiv \delta \to \delta$$

para algum δ. Logo, a primeira dessas premissas é

$$\mathsf{S} \in (\delta \to \delta) \to (\zeta \to \zeta) \to \eta.$$

Mas isso tem que ser uma instância do esquema de axioma ($\to$ S). Logo, tem que haver esquemas de tipo α, β, tais que

Atribuição de Tipos a Combinadores
Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

(Continuação)
Pela segunda das premissas anteriores, e pelo Exemplo do combinador I, temos que ter

$$\theta \equiv \delta \to \delta$$

para algum δ. Logo, a primeira dessas premissas é

$$\mathsf{S} \in (\delta \to \delta) \to (\zeta \to \zeta) \to \eta.$$

Mas isso tem que ser uma instância do esquema de axioma ($\to$ S). Logo, tem que haver esquemas de tipo α, β, tais que

$$\delta \to \delta \quad \equiv \quad \alpha \to \beta \to \gamma,$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

(Continuação)
Pela segunda das premissas anteriores, e pelo Exemplo do combinador I, temos que ter

$$\theta \equiv \delta \to \delta$$

para algum δ. Logo, a primeira dessas premissas é

$$\mathsf{S} \in (\delta \to \delta) \to (\zeta \to \zeta) \to \eta.$$

Mas isso tem que ser uma instância do esquema de axioma ($\to$ S). Logo, tem que haver esquemas de tipo α, β, tais que

$$\begin{array}{rcl} \delta \to \delta & \equiv & \alpha \to \beta \to \gamma, \\ \zeta \to \zeta & \equiv & \alpha \to \beta, \end{array}$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

(Continuação)
Pela segunda das premissas anteriores, e pelo Exemplo do combinador I, temos que ter

$$\theta \equiv \delta \to \delta$$

para algum δ. Logo, a primeira dessas premissas é

$$\mathsf{S} \in (\delta \to \delta) \to (\zeta \to \zeta) \to \eta.$$

Mas isso tem que ser uma instância do esquema de axioma ($\to$ S). Logo, tem que haver esquemas de tipo α, β, tais que

$$\begin{aligned} \delta \to \delta &\equiv \alpha \to \beta \to \gamma, \\ \zeta \to \zeta &\equiv \alpha \to \beta, \\ \eta &\equiv \alpha \to \gamma. \end{aligned}$$

Atribuição de Tipos a Combinadores
Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

(Continuação)
Pela segunda das premissas anteriores, e pelo Exemplo do combinador I, temos que ter

$$\theta \equiv \delta \to \delta$$

para algum δ. Logo, a primeira dessas premissas é

$$\mathsf{S} \in (\delta \to \delta) \to (\zeta \to \zeta) \to \eta.$$

Mas isso tem que ser uma instância do esquema de axioma ($\to$ S). Logo, tem que haver esquemas de tipo α, β, tais que

$$\begin{array}{rcl} \delta \to \delta & \equiv & \alpha \to \beta \to \gamma, \\ \zeta \to \zeta & \equiv & \alpha \to \beta, \\ \eta & \equiv & \alpha \to \gamma. \end{array}$$

Segue que

Atribuição de Tipos a Combinadores
Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

(Continuação)
Pela segunda das premissas anteriores, e pelo Exemplo do combinador I, temos que ter

$$\theta \equiv \delta \to \delta$$

para algum δ. Logo, a primeira dessas premissas é

$$\mathsf{S} \in (\delta \to \delta) \to (\zeta \to \zeta) \to \eta.$$

Mas isso tem que ser uma instância do esquema de axioma ($\to$ S). Logo, tem que haver esquemas de tipo α, β, tais que

$$\begin{array}{rcl} \delta \to \delta & \equiv & \alpha \to \beta \to \gamma, \\ \zeta \to \zeta & \equiv & \alpha \to \beta, \\ \eta & \equiv & \alpha \to \gamma. \end{array}$$

Segue que

$$\beta \equiv \zeta$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

(Continuação)
Pela segunda das premissas anteriores, e pelo Exemplo do combinador I, temos que ter

$$\theta \equiv \delta \to \delta$$

para algum δ. Logo, a primeira dessas premissas é

$$\mathsf{S} \in (\delta \to \delta) \to (\zeta \to \zeta) \to \eta.$$

Mas isso tem que ser uma instância do esquema de axioma ($\to$ S). Logo, tem que haver esquemas de tipo α, β, tais que

$$\begin{array}{rcl} \delta \to \delta & \equiv & \alpha \to \beta \to \gamma, \\ \zeta \to \zeta & \equiv & \alpha \to \beta, \\ \eta & \equiv & \alpha \to \gamma. \end{array}$$

Segue que

$$\beta \equiv \zeta \equiv \alpha$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

(Continuação)
Pela segunda das premissas anteriores, e pelo Exemplo do combinador I, temos que ter

$$\theta \equiv \delta \to \delta$$

para algum δ. Logo, a primeira dessas premissas é

$$\mathsf{S} \in (\delta \to \delta) \to (\zeta \to \zeta) \to \eta.$$

Mas isso tem que ser uma instância do esquema de axioma ($\to$ S). Logo, tem que haver esquemas de tipo α, β, tais que

$$\begin{aligned} \delta \to \delta &\equiv \alpha \to \beta \to \gamma, \\ \zeta \to \zeta &\equiv \alpha \to \beta, \\ \eta &\equiv \alpha \to \gamma. \end{aligned}$$

Segue que

$$\beta \equiv \zeta \equiv \alpha \equiv \delta$$

Atribuição de Tipos a Combinadores
Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

(Continuação)
Pela segunda das premissas anteriores, e pelo Exemplo do combinador I, temos que ter

$$\theta \equiv \delta \to \delta$$

para algum δ. Logo, a primeira dessas premissas é

$$\mathsf{S} \in (\delta \to \delta) \to (\zeta \to \zeta) \to \eta.$$

Mas isso tem que ser uma instância do esquema de axioma ($\to$ S). Logo, tem que haver esquemas de tipo α, β, tais que

$$\begin{array}{rcl} \delta \to \delta & \equiv & \alpha \to \beta \to \gamma, \\ \zeta \to \zeta & \equiv & \alpha \to \beta, \\ \eta & \equiv & \alpha \to \gamma. \end{array}$$

Segue que

$$\beta \equiv \zeta \equiv \alpha \equiv \delta \equiv \beta \to \gamma,$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

(Continuação)
Pela segunda das premissas anteriores, e pelo Exemplo do combinador I, temos que ter

$$\theta \equiv \delta \to \delta$$

para algum δ. Logo, a primeira dessas premissas é

$$\mathsf{S} \in (\delta \to \delta) \to (\zeta \to \zeta) \to \eta.$$

Mas isso tem que ser uma instância do esquema de axioma ($\to$ S). Logo, tem que haver esquemas de tipo α, β, tais que

$$\begin{aligned} \delta \to \delta &\equiv \alpha \to \beta \to \gamma, \\ \zeta \to \zeta &\equiv \alpha \to \beta, \\ \eta &\equiv \alpha \to \gamma. \end{aligned}$$

Segue que

$$\beta \equiv \zeta \equiv \alpha \equiv \delta \equiv \beta \to \gamma,$$

e $\beta \equiv \beta \to \gamma$ é impossível. $\square$

Atribuição de Tipos a Combinadores
Exemplos de esquemas de tipo principal

Exemplo

O termo xx é não–estratificado.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

Como a única variável livre em xx é x,

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

Como a única variável livre em *xx* é *x*, segue da definição que *xx* é estratificado se e somente se existem esquemas de tipo α e β tais que

Atribuição de Tipos a Combinadores
Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

Como a única variável livre em xx é x, segue da definição que xx é estratificado se e somente se existem esquemas de tipo α e β tais que

$$x \in \alpha \quad \vdash_{AT_C} \quad xx \in \beta.$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

Como a única variável livre em xx é x, segue da definição que xx é estratificado se e somente se existem esquemas de tipo α e β tais que

$$x \in \alpha \quad \vdash_{AT_C} \quad xx \in \beta.$$

Se existir uma dedução disso, a última inferência tem que ser por $(\rightarrow \mathrm{e})$,

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

Como a única variável livre em xx é x, segue da definição que xx é estratificado se e somente se existem esquemas de tipo α e β tais que

$$x \in \alpha \quad \vdash_{AT_C} \quad xx \in \beta.$$

Se existir uma dedução disso, a última inferência tem que ser por $(\rightarrow \mathrm{e})$, e as premissas têm que ser

Atribuição de Tipos a Combinadores
Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

Como a única variável livre em xx é x, segue da definição que xx é estratificado se e somente se existem esquemas de tipo α e β tais que

$$x \in \alpha \quad \vdash_{AT_C} \quad xx \in \beta.$$

Se existir uma dedução disso, a última inferência tem que ser por $(\rightarrow \mathrm{e})$, e as premissas têm que ser

$$x \in \gamma \rightarrow \beta, \qquad x \in \gamma,$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

Como a única variável livre em xx é x, segue da definição que xx é estratificado se e somente se existem esquemas de tipo α e β tais que

$$x \in \alpha \quad \vdash_{AT_C} \quad xx \in \beta.$$

Se existir uma dedução disso, a última inferência tem que ser por $(\rightarrow \mathrm{e})$, e as premissas têm que ser

$$x \in \gamma \rightarrow \beta, \qquad x \in \gamma,$$

para algum esquema de tipo γ.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

Como a única variável livre em *xx* é *x*, segue da definição que *xx* é estratificado se e somente se existem esquemas de tipo α e β tais que

$$x \in \alpha \quad \vdash_{AT_C} \quad xx \in \beta.$$

Se existir uma dedução disso, a última inferência tem que ser por $(\rightarrow \mathrm{e})$, e as premissas têm que ser

$$x \in \gamma \rightarrow \beta, \qquad x \in \gamma,$$

para algum esquema de tipo γ. Mas isso implica que

Atribuição de Tipos a Combinadores
Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

Como a única variável livre em *xx* é *x*, segue da definição que *xx* é estratificado se e somente se existem esquemas de tipo α e β tais que

$$x \in \alpha \quad \vdash_{AT_C} \quad xx \in \beta.$$

Se existir uma dedução disso, a última inferência tem que ser por $(\rightarrow \mathrm{e})$, e as premissas têm que ser

$$x \in \gamma \rightarrow \beta, \qquad x \in \gamma,$$

para algum esquema de tipo γ. Mas isso implica que

$$\gamma \rightarrow \beta \equiv \alpha$$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

Como a única variável livre em xx é x, segue da definição que xx é estratificado se e somente se existem esquemas de tipo α e β tais que

$$x \in \alpha \quad \vdash_{AT_C} \quad xx \in \beta.$$

Se existir uma dedução disso, a última inferência tem que ser por $(\rightarrow \mathrm{e})$, e as premissas têm que ser

$$x \in \gamma \rightarrow \beta, \qquad x \in \gamma,$$

para algum esquema de tipo γ. Mas isso implica que

$$\gamma \rightarrow \beta \equiv \alpha \equiv \gamma,$$

Atribuição de Tipos a Combinadores
Exemplos de esquemas de tipo principal

Demonstração.

Como a única variável livre em *xx* é *x*, segue da definição que *xx* é estratificado se e somente se existem esquemas de tipo α e β tais que
$$x \in \alpha \quad \vdash_{AT_C} \quad xx \in \beta.$$
Se existir uma dedução disso, a última inferência tem que ser por $(\rightarrow \mathrm{e})$, e as premissas têm que ser
$$x \in \gamma \rightarrow \beta, \qquad x \in \gamma,$$
para algum esquema de tipo γ. Mas isso implica que
$$\gamma \rightarrow \beta \equiv \alpha \equiv \gamma,$$
o que é impossível. $\square$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Teorema do esquema de tipo principal

Teorema (Esquema de tipo principal)

(a) Todo termo puro estratificado da Lógica Combinatória tem um esquema de tipo principal e um par principal.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Teorema do esquema de tipo principal

Teorema (Esquema de tipo principal)

(a) Todo termo puro estratificado da Lógica Combinatória tem um esquema de tipo principal e um par principal.
(b) Se $\mathcal{B}_0$ for uma base mono-esquemática,

Atribuição de Tipos a Combinadores

Teorema do esquema de tipo principal

Teorema (Esquema de tipo principal)

(a) Todo termo puro estratificado da Lógica Combinatória tem um esquema de tipo principal e um par principal.
(b) Se $\mathcal{B}_0$ for uma base mono-esquemática, então todo termo estratificado relativo a $\mathcal{B}_0$ tem um esquema de tipo principal e um par principal relativo a $\mathcal{B}_0$.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Decidibilidade do conjunto de termos estratificados

Teorema

O conjunto de todos os termos puros estraitificados da Lógica Combinatória é recursivamente decidível.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Teorema da normalizacção forte para termos estratificados

Teorema (normalização forte para termos estratificados)

(a) Todo termo puro estratificado da Lógica Combinatória é fortemente normalizável com respeito a $\triangleright_w$.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Teorema da normalizacção forte para termos estratificados

Teorema (normalização forte para termos estratificados)

(a) Todo termo puro estratificado da Lógica Combinatória é fortemente normalizável com respeito a $\triangleright_w$.
(b) Todo termo da Lógica Combinatória que é estratificado com respeito a uma base mono-esquemática ou de sujeitos fracamente normais é fortemente normalizável com respeito a $\triangleright_w$.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Teorema da normalizacção forte para termos estratificados

Teorema (normalização forte para termos estratificados)

(a) Todo termo puro estratificado da Lógica Combinatória é fortemente normalizável com respeito a $\triangleright_w$.
(b) Todo termo da Lógica Combinatória que é estratificado com respeito a uma base mono-esquemática ou de sujeitos fracamente normais é fortemente normalizável com respeito a $\triangleright_w$.

Demonstração.

(a): pelo item (b) para a base vazia.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Teorema da normalizacção forte para termos estratificados

Teorema (normalização forte para termos estratificados)

(a) Todo termo puro estratificado da Lógica Combinatória é fortemente normalizável com respeito a $\triangleright_w$.
(b) Todo termo da Lógica Combinatória que é estratificado com respeito a uma base mono-esquemática ou de sujeitos fracamente normais é fortemente normalizável com respeito a $\triangleright_w$.

Demonstração.

(a): pelo item (b) para a base vazia. (b): por um corolário adiante, que diz que se $\mathcal{B}$ for uma base de sujeitos fracamente normais, e $\mathcal{B} \vdash_{AT_C} X \in \alpha$, então X é fortemente normalizável com respeito à redução fraca. $\square$

Atribuição de Tipos a Combinadores

Corolário do teorema da normalizacção forte para termos estratificados

Corolário (Teorema da normalização para termos estratificados)

(a) Todo termo puro estratificado da Lógica Combinatória tem uma forma normal fraca.

Atribuição de Tipos a Combinadores

Corolário do teorema da normalizacção forte para termos estratificados

Corolário (Teorema da normalização para termos estratificados)

(a) Todo termo puro estratificado da Lógica Combinatória tem uma forma normal fraca.
(b) Se $\mathcal{B}$ for uma base mono-esquemática ou uma base de sujeitos fracamente normais,

Atribuição de Tipos a Combinadores

Corolário do teorema da normalizacção forte para termos estratificados

Corolário (Teorema da normalização para termos estratificados)

(a) Todo termo puro estratificado da Lógica Combinatória tem uma forma normal fraca.
(b) Se $\mathcal{B}$ for uma base mono-esquemática ou uma base de sujeitos fracamente normais, então todo termo da Lógica Combinatória que é estratificado com respeito a $\mathcal{B}$ tem uma forma normal.