

Lambda-Cálculo (Aula 7)

Ruy de Queiroz & Anjolina de Oliveira

Centro de Informática, UFPE

2007.2

Conteúdo

1 Termos Tipados

Teorema da Normalização Forte para Tipos

Termos fortemente normalizáveis

Definição (Termos fortemente normalizáveis (FN))

Um termo X tipado ou não-tipado é fortemente normalizável com respeito a um dado conceito de redução, sse todas as reduções iniciando em X são finitas. Ele é normalizável sse ele reduz a uma forma normal.

Teorema da Normalização Forte para Tipos

Termos fortemente computáveis

Definição (Termos fortemente computáveis (FC))

Computabilidade forte é definida por indução sobre o número de ocorrências de ' $\rightarrow$ ' no tipo do termo:

- (a) um termo de tipo atômico é FC sse ele for FN;
- (b) um termo de tipo $X^{\alpha \rightarrow \beta}$ é FC sse, para todo termo FC Y^α , o termo $(XY)^\beta$ for FC.

Teorema da Normalização Forte para Tipos

Teorema da redução para λ -termos tipados

Teorema

No sistema de λ -termos tipados, não existe β -redução infinita.

Teorema da Normalização Forte para Tipos

Teorema da redução para λ -termos tipados

Demonstração.

Vamos considerar 'termo' como significando ' λ -termo tipado'. Então o teorema diz que todos os termos são FN (com respeito a $\triangleright_\beta$). Vamos provar que

- (i) todo termo FC é FN,
- (ii) todo termo é FC.

A prova consistirá de cinco observações simples e três lemas, e o último lema será equivalente ao teorema.

Observação

Cada tipo α pode ser escrito de uma forma única na forma $\alpha_1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_n \rightarrow \theta$, onde θ é atômico.



Teorema da Normalização Forte para Tipos

Teorema da redução para λ -termos tipados

Demonstração.

(Continuação)

Observação

Segue imediatamente da definição de termo tipado composto FC que se

$$\alpha \equiv \alpha_1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_n \rightarrow \theta$$

onde θ é um tipo atômico, então X^α é FC sse, para todos termos FC

$$X_1^{\alpha_1}, \dots, X_n^{\alpha_n},$$

$(XX_1 \dots X_n)^\theta$ for FC. E, pela definição de termo tipado atômico FC, $(XX_1 \dots X_n)^\theta$ é FC sse ele for FN.



Teorema da Normalização Forte para Tipos

Teorema da redução para λ -termos tipados

Demonstração.

(Continuação)

Observação

Se X^α for FC, então todo termo que difere de X^α somente por mudanças de variáveis ligadas é FC. E o mesmo se verifica para FN.

Observação

Pela definição de termo tipado composto FC, se $X^{\alpha \rightarrow \beta}$ for FC e Y^α for FC, então $(XY)^\beta$ é FC.

Observação

Se X^α for FN, então todo subtermo de X^α é FN, pois qualquer redução infinita a partir de um subtermo de X dá origem a uma redução infinita a partir de X .

Teorema da Normalização Forte para Tipos

Teorema da redução para λ -termos tipados

Demonstração.

(Continuação)

Lema

Seja α um tipo qualquer:

- (a) *Todo termo $(aX_1 \dots X_n)^\alpha$, onde a é um átomo e $X_1, \dots, X_n$ são todos FN, é FC.*
- (b) *Todo termo FC de tipo α é FN.*



Teorema da Normalização Forte para Tipos

Teorema da redução para λ -termos tipados

Demonstração.

(Continuação)

Demonstração.

(do Lema) Por indução sobre a complexidade do tipo α :

Caso Base: α é um tipo atômico.

(a) Como $X_1, \dots, X_n$ são FN, $(\lambda X_1 \dots X_n)$ tem que ser FN. Logo, ele também é FC pela definição de termo tipado atômico FC.

(b) Pela definição de termo tipado atômico FC. ☐



Teorema da Normalização Forte para Tipos

Teorema da redução para λ -termos tipados

Demonstração.

(Continuação)

Demonstração.

(do Lema (cont.))

Caso indutivo: α é da forma $\beta \rightarrow \gamma$.

(a) Suponha que Y^β seja FC. Pela hipótese da indução (b), Y^β é FN. Usando a hipótese da indução (a), obtemos que o termo $(aX_1 \dots X_n Y)^\gamma$ é FC. Logo, o mesmo acontece com

$(aX_1 \dots X_n)^\alpha$, pela definição de termo tipado composto FC.

(b) Suponha que X^α seja FC, e suponha que x^β não ocorre (livre ou ligada) em X^α . Pela hipótese da indução (a) com $n = 0$, x é FC. Logo, pela observação 4 acima, $(Xx)^\gamma$ é FC. Pela hipótese da indução (b), $(Xx)^\gamma$ é FN. Mas então pela observação 5 acima, X^α é FN também.



Teorema da Normalização Forte para Tipos

Teorema da redução para λ -termos tipados

Demonstração.

(Continuação)

Lema

Se $[N^\alpha / x^\alpha]M^\beta$ for FC, então o mesmo acontece com $(\lambda x^\alpha. M^\beta)N^\alpha$; desde que N^α seja FC se x^α não esteja livre em M^β .

Observação

Esse lema diz que se o contractum de uma redex tipada R for FC, e se todos os termos (caso haja algum) que forem cancelados quando R for contraída forem FC, então R é FC.



Teorema da Normalização Forte para Tipos

Teorema da redução para λ -termos tipados

Demonstração.

(Continuação)

Demonstração.

(do Lema) Seja $\beta \equiv \beta_1 \rightarrow \dots \rightarrow \beta_n \rightarrow \theta$, onde θ é atômica, e faça

$$M_1^{\beta_1}, \dots, M_n^{\beta_n}$$

sejam termos FC. Como $[N^\alpha/x^\alpha]M^\beta$ for FC, segue da observação 2 acima que

$$(1) \quad (([N/x]M)M_1 \dots M_n)^\theta$$

é FN. O lema vai ser uma decorrência da observação 2, se pudermos provar que

$$(2) \quad ((\lambda x.M)NM_1 \dots M_n)^\theta$$

é FN. □

Teorema da Normalização Forte para Tipos

Teorema da redução para λ -termos tipados

Demonstração.

(Continuação)

Demonstração.

(do Lema (cont.))

Agora como (1) é FN, o mesmo acontece com todos os seus subtermos; aí incluídos $[N/x]M$, $M_1, \dots, M_n$. Também, pela hipótese e pelo lema precedente, N é FN se ele não ocorre em $[N/x]M$. Por conseguinte, uma redução infinita a partir de (2) não pode consistir inteiramente de contrações em M , N , $M_1, \dots, M_n$. Logo, tal redução tem que ter a forma

$$\begin{array}{lll}
 (\lambda x.M)NM_1 \dots M_n & \triangleright_{\beta} & (\lambda x.M')N'M'_1 \dots M'_n \quad (M \triangleright M', \text{ etc.}) \\
 & \triangleright_{1\beta} & ([N'/x]M')M'_1 \dots M'_n \\
 & \triangleright_{\beta} & \dots \quad .
 \end{array}$$



Teorema da Normalização Forte para Tipos

Teorema da redução para λ -termos tipados

Demonstração.

(Continuação)

Demonstração.

(do Lema (cont.))

Das reduções $M \triangleright M'$ e $N \triangleright N'$ obtemos $[N/x]M \triangleright [N'/x]M'$; daí, podemos construir uma redução infinita a partir de (1):

$$\begin{array}{ccc}
 ([N/x]M)M_1 \dots M_n & \triangleright_{\beta} & ([N'/x]M')M'_1 \dots M'_n \\
 & \triangleright_{\beta} & \dots
 \end{array}$$

Isso contradiz o fato de que (1) é FN. Daí, (2) tem que ser FN.



Teorema da Normalização Forte para Tipos

Teorema da redução para λ -termos tipados

Demonstração.

(Continuação)

Lema

Para todo termo tipado M^β :

- (a) M^β é FC.*
- (b) Para todos $x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n}$ e todos os termos FC $N_1^{\alpha_1}, \dots, N_n^{\alpha_n}$, o termo $M^{*\beta} \equiv [N_1/x_1] \dots [N_n/x_n]M$ é FC.*



Teorema da Normalização Forte para Tipos

Teorema da redução para λ -termos tipados

Demonstração.

(Continuação)

Demonstração.

(do Lema) A parte (a) é tudo do que precisamos para provar o teorema, mas o poder adicional da parte (b) é necessário para fazer com que a prova funcione. (A parte (a) é um caso especial de (b), a saber $N_i \equiv x_i$).

Provamos (b) por indução sobre a estrutura de M .

Caso base. M é atômico.

Subcaso 1. M é uma variável x_i e $\beta \equiv \alpha_i$. Então M^* é N_i e o resultado é imediato.

Subcaso 2. M é um átomo diferente de $x_1, \dots, x_n$. Então

$$M^* \equiv M,$$

que é FC pelo Lema 1.



Teorema da Normalização Forte para Tipos

Teorema da redução para λ -termos tipados

Demonstração.

(Continuação)

Demonstração.

(do Lema (cont.))

Casos Indutivos

Subcaso 3. M é um termo composto da forma $M_1 M_2$. Então

$$M^* \equiv M_1^* M_2^*.$$

Pela hipótese da indução, M_1^* e M_2^* são FC, e portanto M^* é FC pela observação 4.

Subcaso 4. M^β é um termo composto da forma $(\lambda x^\gamma. M_1^\delta)$, onde β é da forma $\gamma \rightarrow \delta$. Então

$$M^* \equiv \lambda x. M_1^*$$

se desconsiderarmos mudanças em variáveis ligadas.

Para mostrar que M^* é FC, temos que provar que para todos os termos FC N^γ , o termo $M^* N$ é FC.



Teorema da Normalização Forte para Tipos

Teorema da redução para λ -termos tipados

Demonstração.

(Continuação)

Demonstração.

(do Lema (cont.))

Mas

$$M^* N \equiv (\lambda x. M_1^*) N$$

$$\triangleright_{1\beta} [N/x] M_1^*.$$

que é FC pela hipótese da indução aplicada com $n + 1$ ao invés de n . Então $M^* N$ é FC pelo Lema 2. ☐



Teorema da Normalização Forte para Tipos

Teorema da redução para λ -termos tipados

Teorema

No sistema de λ -termos tipados, não existem $\beta\eta$ -reduções infinitas.

Teorema da Normalização Forte para Tipos

Teorema da redução para λ -termos tipados

Demonstração.

A mesma do teorema anterior, exceto que no Lema 2, próximo ao final da prova, precisamos levar em conta a possibilidade de que uma redução infinita de $(\lambda x.M)NM_1 \dots M_n$ tenha a forma

$$\begin{aligned}
 (\lambda x.M)NM_1 \dots M_n &\triangleright_{\beta\eta} (\lambda x.M')N'M'_1 \dots M'_n \quad (M \triangleright M', \text{ etc.}) \\
 &\equiv (\lambda x.Px)N'M'_1 \dots M'_n \quad (x \notin VL(P)) \\
 &\triangleright_{1\eta} PN'M'_1 \dots M'_n \\
 &\triangleright_{\beta\eta} \dots
 \end{aligned}$$

Mas nesse caso podemos construir uma redução infinita a partir de $([N/x]M)M_1 \dots M_n$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 ([N/x]M)M_1 \dots M_n &\triangleright_{\beta\eta} ([N'/x]M')M'_1 \dots M'_n \\
 &\equiv PN'M'_1 \dots M'_n \\
 &\triangleright_{\beta\eta} \dots
 \end{aligned}$$

E isso contradiz o fato de que (1) é FN.

