Lambda-Cáculo (Aula 5)

Ruy de Queiroz & Anjolina de Oliveira

Centro de Informática, UFPE

2007.2

Conteúdo

O Poder do λ e dos Combinadores

λ e combinadores

Definição (Combinador)

Um combinador *é (em λ) um termo fechado que não contém átomos constantes, e (em LC) um termo cujos únicos átomos são* S *e* K*. No λ-cálculo, três combinadores recebem nomes especiais:*

$$\mathsf{S} \equiv \lambda xyz.xz(yz), \quad \mathsf{K} \equiv \lambda xy.x, \quad \mathsf{I} \equiv \lambda x.x.$$

O Poder do λ e dos Combinadores

Ponto-Fixo

Tanto no λ-cálculo quanto em lógica combinatória restrita a combinadores puros, todo operador tem um ponto-fixo. Isto é, para cada termo X existe um termo P tal que

$$XP =_{\beta,w} P.$$

Além do mais, existe um combinador Y que encontra esses pontos-fixos, i.e. tal que $\mathsf{Y}X$ é um ponto-fixo de X para todo X.

Teorema (Ponto-fixo)

Tanto no λ-cálculo quanto na lógica combinatória, existe um combinador Y *tal que*

(a) $$\mathsf{Y}x =_{\beta,w} x(\mathsf{Y}x).$$

Existe um Y *com a propriedade mais forte*

(b) $$\mathsf{Y}x \triangleright_{\beta,w} x(\mathsf{Y}x).$$

O Poder do λ e dos Combinadores

Combinadores de Ponto-Fixo

Observação

Y *não é único: Curry e Turing cada um deu seus próprios examplos de um* Y*.*

Definição (Dois combinadores de ponto-fixo)

Defina

$$\begin{array}{rclcrcl} \mathrm{Y}_{\text{Curry}} & \equiv & \lambda y.VV, & \quad & V & \equiv & \lambda y.x(yy); \\ \mathrm{Y}_{\text{Turing}} & \equiv & ZZ, & & Z & \equiv & \lambda zx.x(zzx). \end{array}$$

O Poder do λ e dos Combinadores
Combinadores de Ponto-Fixo

Do Teorema.

Suponha que Y seja $\mathrm{Y}_{\mathrm{Turing}}$. Então Y satisfaz (b), pois

$$
\begin{array}{lcll}
\mathrm{Y}x & \equiv & (\lambda z.(\lambda x.x(zzx)))Zx & \text{pela def. de } Z \\
 & \triangleright_{\beta,w} & ([Z/z](\lambda x.x(zzx)))x & \text{pela Def. 1.22 ou Teorema 2.15} \\
 & \equiv & (\lambda x.x(ZZx))x & \text{pela Def. 1.11 ou Lema 2.21(c)} \\
 & & & \quad \text{(Obs. } VL(Z) \text{ é vazio.)} \\
 & \triangleright_{\beta,w} & x(ZZx) & \text{pela Def. 1.22 ou Teo 2.15} \\
 & \equiv & x(\mathrm{Y}x). &
\end{array}
$$

□

O Poder do λ e dos Combinadores

Combinadores de Ponto-Fixo

Corolário

Tanto no λ quanto na CL, para quaisquer Z e $n \geq 0$, a equação

$$xy_1 \dots y_n = Z$$

pode ser resolvida para x. Ou seja, existe um termo X tal que

$$Xy_1 \dots y_n =_{\beta,w} [X/x]Z$$

Demonstração.

Set $X \equiv \mathsf{Y}(\lambda xy_1 \dots y_n.Z)$. $\square$

Observação

Note que Z pode conter quaisquer ou nenhuma das vari aveis $x, y_1, \dots, y_n$.

O Poder do λ e dos Combinadores

Combinadores de Ponto-Fixo

Corolário (Duplo ponto-fixo)

Tanto no λ quanto na CL, para quaisquer X, Y existem P, Q tais que:

$$XPQ =_{\beta,w} P, \qquad YPQ =_{\beta,w} Q.$$

Demonstração.

O corolário anterior pode ser estendido para todo conjunto finito de equações simultâneas da forma

$$\begin{array}{rcl} x_1 y_1 \ldots y_n & = & Z_1 \\ & \vdots & (n \geq 0, k \geq 1) \\ x_k y_1 \ldots y_n & = & Z_k \end{array}$$

Agora, com $n = k = 2$, existe X_1, X_2 tais que

$$X_i y_1 y_2 =_{\beta,w} y_i (X_1 y_1 y_2)(X_2 y_1 y_2) \qquad \text{para } i = 1, 2.$$

O Poder do λ e dos Combinadores

Formas normais

Os membros de uma classe significativa de formas normais podem ser distingüidas umas das outras de uma maneira bem poderosa.

Definição (Formas $\beta\eta$-normais)

Um λ-termo X que não contém β-redex e nenhuma parte da forma

(i) $$\lambda x.Ux, \qquad x \notin VL(U),$$

é chamado de uma forma $\beta\eta$-normal *(ou um* termo em forma $\beta\eta$-normal*). A classe de todos os tais λ-termos é chamada de* $\beta\eta$-fn *ou de* $\lambda\beta\eta$-fn.

Exemplo

O λ-termo $\lambda ux.ux$ (i.e. $\lambda u.(\lambda u.ux)$) está em β-fn mas não em $\beta\eta$-fn.

O Poder do λ e dos Combinadores

Formas normais fortes

Definição (Formas normais fortes)

Para CL-termos, a classe fn forte *é definida indutivamente da seguinte maneira. Seus membros são chamados* formas normais fortes*, ou* termos em forma normal forte*.*
(a) Todos os átomos não-redex estão em fn forte;
(b) se $X_1, \ldots, X_n$ *estiverem em fn forte, e a for qualquer átomo não-redex, então* $aX_1 \ldots X_n$ *está em fn forte;*
(c) se X *estiver em fn forte, então o mesmo acontece com* $\lambda^* x.X$*.*

O Poder do λ e dos Combinadores
Formas normais fortes

Lema
Todo CL-termo em forma normal forte também está em forma normal fraca.

Demonstração.
Indução sobre a Definição 3.7. □

Observação
A recíproca desse lema é falsa, a propósito. Por exemplo, os combinadores de ponto-fixo Y_{Curry} *e* Y_{Turing} *estão ambos em fn fraca, mas não podem estar em fn forte (Exercício 3.11(a)).*

O Poder do λ e dos Combinadores

Teorema de Böhm

Teorema (Böhm)

Sejam M e N combinadores, ou em forma $\beta\eta$-normal (em λ-cálculo) ou em forma normal forte (em CL). Se $M \not\equiv N$, então existe $n \geq 0$ e combinadores $L_1, \ldots, L_n$ tais que

$$ML_1 \ldots L_n xy \quad \triangleright_{\beta,w} \quad x,$$

$$NL_1 \ldots L_n xy \quad \triangleright_{\beta,w} \quad y.$$

Observação

O teorema diz que alimentando M e N com argumentos apropriados, os mesmo para ambos, eles podem ser levados a se comportar como seletores diferentes.

O Poder do λ e dos Combinadores

Corolário do Teorema de Böhm

Corolário

Sejam M, N combinadores, ou em forma $\beta\eta$-normal (em λ) ou em forma normal forte (in CL), e suponha que $M \not\equiv N$. Se adicionarmos a equação $M = N$ como um novo axioma às definições de $=_\beta$ ou $=_w$, então todos os termos se tornam iguais.

Demonstração.

Para quaisquer X, Y temos

$$\begin{array}{llll} X & =_{\beta,w} & ML_1 \ldots L_n XY & \text{pelo teorema de Böhm,} \\ & =_{\beta,w} & NL_1 \ldots L_n XY & \text{pelo novo axioma } M = N, \\ & =_{\beta,w} & Y. & \end{array}$$

$\square$

O Poder do λ e dos Combinadores

Teorema da Padronização

Teorema (Padronização (Curry))

Se X reduz para Y, então existe uma redução de X para Y com uma forma particularmente simples, chamada de redução padrão*.*

Aplicação. (i) Provar que 'X não reduz para Y'.
(ii) Na prova do teorema de Böhm.
Uma conseqüência importante: o *teorema da redução-quasi-mais-à-esquerda*, que pode ser usado para mostrar que termos não têm forma normal.

O Poder do λ e dos Combinadores

Teorema da Padronização

Definição (Contrações e reduções)

Tanto no λ-cálculo quanto na CL, uma contração *é uma tripla ordenada $\langle X, R, Y\rangle$ onde X é um termo, R é uma ocorrência de uma redex em X, e Y é o resultado de se contrair R em X. Ao invés de '$\langle X, R, Y\rangle$' escrevemos:*

$$X \rhd_R Y.$$

Uma redução *ρ é uma série finita ou infinita de contrações da forma*

$$X_1 \rhd_{R_1} X_2 \rhd_{R_2} X_3 \rhd_{R_3} \cdots \ .$$

Seu comprimento *é o número de suas contrações (finito ou infinito). Se o comprimento é finito, digamos n, então X_{n+1} chamado de* terminus *de ρ.*

O Poder do λ e dos Combinadores

Reduções Maximais

Definição

Uma reduç ao ρ tem comprimento maximal *sse ou ρ é infinita ou seu terminus não contém redex (i.e. sse ρ continua até que não haja redexes a serem contraídas).*

Exemplo

(a) (Cada R_i está $\underbrace{\text{sublinhada}}$*):*

$$
\begin{aligned}
\mathsf{S}(\mathsf{K}x)\mathsf{I}y \quad & \equiv \quad \underbrace{\mathsf{S}(\mathsf{K}x)(\mathsf{SKK})y} \\
& \triangleright_{1w} \quad \mathsf{K}xy(\underbrace{\mathsf{SKK}y}) \\
& \triangleright_{1w} \quad \mathsf{K}xy(\underbrace{\mathsf{K}y(\mathsf{K}y)}) \\
& \triangleright_{1w} \quad \mathsf{K}xyy.
\end{aligned}
$$

O comprimento da redução é 3, *e ela não é maximal. Para torná-la maximal precisamos adicionar a contração* $\mathsf{K}xyy \triangleright_{1w} xy$.

O Poder do λ e dos Combinadores

Reduções Maximais

Definição

Uma ocorrência R de uma redex em X é chamada de maximal *sse ela não estiver contida em nenhuma outra ocorrência de redex em X. Ela é* maximal mais-à-esquerda *sse ela for a mais à esquerda da das ocorrências maximais em X. Por exemplo, as ocorrências de redexes maximais em*

$$\mathsf{SS}(\mathsf{K}x(\mathsf{K}yz)(\mathsf{K}uv))$$

são $\mathsf{K}x(\mathsf{K}yz)$ *e* $\mathsf{K}uv$. *Uma redução ρ tal que para cada i, R_i é a ocorrência de redex maximal mais à esquerda em X_i, e que tem comprimento maximal, é chamada de* normal *ou* redução mais-à-esquerda *de X. (Ela é univocamente determinada, dado X.)*

O Poder do λ e dos Combinadores

Reduções Maximais Quasi-Mais-à-Esquerda

Definição

Uma redução quasi-mais-à-esquerda *de X é uma reduç ao ρ com comprimento maximal e tal que para cada i, se X_i não é o terminus então existe $j \geq i$ tal que R_j é maximal mais-à-esquerda.*
Uma ρ infinita é quasi-mais-à-esquerda sse uma infinidade de suas R_i são maximais-mais-à-esquerda (e é mais-à-esquerda sse elas todas o forem). No Exemplo 3.16(a), a segunda redex contraída não é maximal mais-à-esquerda; daí a redução
$\mathsf{S}(\mathsf{K}x)\mathsf{I}y \triangleright_{1w} \mathsf{K}xy(\mathsf{I}y) \triangleright_{1w} \mathsf{K}xy(\mathsf{K}y(\mathsf{K}y)) \triangleright_{1w} \mathsf{K}xyy \triangleright_{1w} xy$
é quasi-mais-à-esquerda mas não é mais-à-esquerda. Por outro lado, a redução
$\mathsf{S}(\mathsf{K}x)\mathsf{I}y \triangleright_{1w} \mathsf{K}xy(\mathsf{I}y) \triangleright_{1w} x(\mathsf{I}y) \triangleright_{1w} x(\mathsf{K}y(\mathsf{K}y)) \triangleright_{1w} xy$
é maximal mais-à-esquerda.

O Poder do λ e dos Combinadores

Reduções Maximais Quasi-Mais-à-Esquerda

Teorema (Redução quasi-mais-à-esquerda)

Para λ-termos e $\triangleright_\beta$, ou CL-termos e $\triangleright_w$: se X tem uma forma normal X^*, então toda redução quasi-mais-à-esquerda de X é finita e termina em X^*.

Corolário

Para λ-termos e $\triangleright_\beta$, ou CL-termos e $\triangleright_w$: X não tem forma normal sse alguma redução quasi-mais-à-esquerda de X for infinita.

Observação

O corolário diz que para mostrar que um termo X não tem uma forma normal é suficiente mostrar que uma redução quasi-mais-à-esquerda pode ser continuada para sempre.