

Lambda-Cálculo (Aula 4)

Ruy de Queiroz & Anjolina de Oliveira

Centro de Informática, UFPE

2007.2

Conteúdo

- 1 Combinadores, redução fraca, igualdade
- 2 Redução fraca
- 3 Abstração
- 4 Igualdade fraca

Lógica Combinatória

Combinadores

Combinadores:

I	identidade	$Ix = x$
B	composição à esquerda	$Bxyz = x(yz)$
B'	composição à direita	$B'xyz = y(xz)$
C	permutação	$Cxyz = (xz)y$
S	composição geral	$Sxyz = (xz)(yz)$
K	constante	$Kxy = x$

Lógica Combinatória

Combinadores

Definição (CL-termos)

Assuma que nos é dada uma seqüência infinita de símbolos chamados variáveis, e uma seqüência finita ou infinita de símbolos chamados de constantes, incluindo duas chamadas de combinadores básicos: K, S. (Se K e S forem as únicas constantes, o sistema será chamado de puro, caso contrário, aplicado.) O conjunto de expressões chamado CL-termos é definido indutivamente da seguinte forma:

- (a) Toda variável e toda constante, incluindo K e S, são CL-termos.*
 - (b) Se X e Y forem CL-termos, então o mesmo acontece com (XY).*
- Um átomo é uma variável ou uma constante. Um átomo não-redex é um átomo que não seja K, S. (O mesmo para constantes.) Um termo fechado é um termo que não contém variáveis. Um combinador é um termo cujo único átomo é K ou S.*

Lógica Combinatória

Combinadores

Definição

O comprimento de X ($\text{compr}(X)$) é o número de ocorrências de átomos em X :

- (a) $\text{compr}(a) = 1$ para átomos a ;
- (b) $\text{compr}(UV) = \text{compr}(U) + \text{lgh}(V)$.

Lógica Combinatória

Combinadores

Definição

A relação “ X ocorre em Y ” é definida indutivamente da seguinte forma:

(a) X ocorre em X ;

(b) se X ocorre em U ou em V , então X ocorre em (UV) .

O conjunto de todas as variáveis ocorrendo em Y é chamado de $VL(Y)$.

Lógica Combinatória

Combinadores

Definição (Substituição)

$[U/x]Y$ é definido como sendo o resultado de se substituir U por toda ocorrência de x em Y :

- (a) $[U/x]x \equiv U$,
- (b) $[U/x]a \equiv a$ para átomosa $a \neq x$,
- (c) $[U/x](VW) \equiv ([U/x]V [U/x]W)$.

Para quaisquer $U_1, \dots, U_n$ e $x_1, \dots, x_n$ (mutuamente distintos), defina

$[U_1/x_1, \dots, U_n/x_n]Y$

como sendo o resultado de se substituir simultaneamente U_1 por x_1 , U_2 por x_2 , ..., U_n por x_n , em Y .

Lógica Combinatória

Redução fraca

Definição (Redução fraca)

Qualquer termo KXY ou $SXYZ$ é chamado de redex (fraca). Contrair uma ocorrência de uma redex num termo U significa substituir uma ocorrência de

KXY por X ,

$SXYZ$ por $XZ(YZ)$.

Se isso muda U para U' , dizemos que U (fracamente) contracte para U' , ou

$U \triangleright_{1w} U'$.

Dizemos que U (fracamente) reduz para V , ou

$U \triangleright_w V$,

se V for obtido de U por meio de uma seqüência finita (talvez vazia) de contrações fracas.

Lógica Combinatória

Redução fraca

Definição

Uma forma normal fraca (ou termo em forma normal fraca) é um termo que não contém redexes. Se U fracamente reduz a uma forma normal fraca X , então X é chamado de forma normal fraca de U .

Lógica Combinatória

Redução fraca

Exemplo

Defina $B \equiv S(KS)K$.

Então $BXYZ \triangleright_w X(YZ)$, porque

$BXYZ \equiv S(KS)KXYZ$

$\triangleright_{1w} KSX(KX)YZ$ *contraindo $S(KS)KX$ para $KSX(KX)$,*

$\triangleright_{1w} S(KX)YZ$ *contraindo KSX para S ,*

$\triangleright_{1w} KXZ(YZ)$ *contraindo $S(KX)YZ$,*

$\triangleright_{1w} X(YZ)$ *contraindo KXZ .*

Lógica Combinatória

Redução fraca

Exemplo

Defina $C \equiv S(BBS)(KK)$.

Então $CXYZ \triangleright_w XZY$, porque

$CXYZ \equiv S(BBS)(KK)XYZ$

$\triangleright_{1w}$	$BBSX(KKX)YZ$	<i>contraindo $S(BBS)(KK)X$,</i>
$\triangleright_{1w}$	$BBSXKYZ$	<i>contraindo KKX,</i>
$\triangleright_w$	$B(SX)KYZ$	<i>por 2.9,</i>
$\triangleright_w$	$SX(KY)Z$	<i>por 2.9,</i>
$\triangleright_{1w}$	$XZ(KYZ)$	<i>contraindo $SX(KY)Z$,</i>
$\triangleright_{1w}$	XZY	<i>contraindo KYZ.</i>

Lógica Combinatória

Lema da Substituição

Lema (Substituição para redução fraca)

- (a) Se $X \triangleright_w Y$ então $(v \notin FV(X) \text{ implica } v \notin FV(Y))$;
- (b) se $X \triangleright_w Y$ então $[X/v]Z \triangleright_w [Y/v]Z$;
- (c) se $X \triangleright_w Y$ então
 $[U_1/x_1, \dots, U_n/x_n]X \triangleright_w [U_1/x_1, \dots, U_n/x_n]Y$.

Lógica Combinatória

Prova do Lema da Substituição

Demonstração.

- (a) Se $v \notin FV(KXY)$ então $v \notin FV(X)$; se $v \notin FV(SXYZ)$ então $v \notin FV(XZ(YZ))$.
- (b) Quaisquer contrações em X podem também ser feitas em $[X/v]Z$.
- (c) Se R for uma redex e contrair para T , então $[U_1/x_1, \dots, U_n/x_n]R$ também é uma redex e contrai para $[U_1/x_1, \dots, U_n/x_n]T$.



Lógica Combinatória

Church–Rosser para Redução Fraca

Teorema (Church–Rosser para redução fraca)

Se $U \triangleright_w X$ e $U \triangleright_w Y$, então existe um Z tal que $X \triangleright_w Z$ and $Y \triangleright_w Z$.

Lógica Combinatória

Church–Rosser para Redução Fraca

Demonstração.

Apêndice 1, A1.10.



Corolário

Um CL-termo pode ter no máximo uma forma normal fraca.

Lógica Combinatória

Simulando Abstração

Objetivo: “simular” abstração usando combinadores. Ou seja, queremos dispor de uma operação ‘derivada’ $[x].U$

(significando “abstraia x de U ”), tal que

$$([x].U)T \triangleright_w [T/x]U.$$

Será uma operação derivada porque não faz parte das operações básicas da LC. A notação “ $[x].U$ ” vem do trabalho original de Curry & Feys (1958). No livro-texto, a notação será “ $\lambda^*x.U$ ”.

Lógica Combinatória

Simulando Abstração

Definição (Abstração)

*Para cada CL-termo M e cada variável x , um CL-termo chamado $\lambda^*x.M$ é definido por indução sobre a estrutura de M , da seguinte forma:*

$$(a) \quad \lambda^*x.M \equiv KM \quad \text{se } x \notin FV(M);$$

$$(b) \quad \lambda^*x.x \equiv I \quad \text{onde } I \equiv SKK;$$

$$(c) \quad \lambda^*x.Ux \equiv U \quad \text{se } x \notin FV(U);$$

$$(f) \quad \lambda^*x.UV \equiv S(\lambda^*x.U)(\lambda^*x.V) \quad \text{se nem (a) nem (c) se aplica.}$$

(A numeração '(a)'–'(f)' vem de Curry & Feys 1958, e é hoje padrão.)

Lógica Combinatória

Simulando Abstração

Exemplo

$$\begin{aligned}\lambda^* x.xy &\equiv S(\lambda^* x.x)(\lambda^* x.y) && \text{por (f)} \\ &\equiv SI(Ky) && \text{por (b) e (a).}\end{aligned}$$

Lógica Combinatória

Simulando Abstração

Teorema

$(\lambda^ x.M)N$ se comporta como uma β -redex, i.e.*

$$(\lambda^* x.M)N \triangleright_w [N/x]M.$$

Lógica Combinatória

Simulando Abstração

Demonstração.

Pelo Lema 2.12(c) é suficiente provar que

$$(\lambda^* x.M)x \triangleright_w M.$$

Isso é feito por indução sobre a estrutura de M .
(continua...)



Lógica Combinatória

Simulando Abstração

Demonstração.

Caso 1. $M \equiv x$. Então a Definição 2.14(b) se aplica, e

$$\begin{aligned}(\lambda^* x. x)x &\equiv Ix \equiv SKKx \\ &\triangleright_w Kx(Kx) \\ &\triangleright_w x.\end{aligned}$$



Lógica Combinatória

Simulando Abstração

Demonstração.

Caso 2. M é um átomo e $M \not\equiv x$. Então a Definição 2.14(a) se aplica, e

$$(\lambda^* x.M)x \equiv KMx \triangleright_w M.$$



Lógica Combinatória

Simulando Abstração

Demonstração.

Caso 3. M é um termo aplicação, digamos UV . Pela hipótese indutiva, podemos assumir que

$$(\lambda^*x.U)x \triangleright_w U, \quad (\lambda^*x.V)x \triangleright_w V.$$

Subcaso (i). $x \notin FV(M)$. Semelhante ao Caso 2. □

Lógica Combinatória

Simulando Abstração

Demonstração.

Subcaso (ii). $x \notin FV(U)$ e $V \equiv x$. Então a Definição 2.14(c) se aplica, e

$$\begin{aligned}(\lambda^* x.M)x &\equiv (\lambda^* x.Ux)x \\ &\equiv Ux \\ &\equiv M.\end{aligned}$$

Subcaso (iii). Nenhum dos casos acima se aplica. Então

$$\begin{aligned}(\lambda^* x.M)x &\equiv S(\lambda^* x.U)(\lambda^* x.V)x && \text{por 2.14(f)} \\ \triangleright_w &(\lambda^* x.U)x((\lambda^* x.V)x) \\ \triangleright_w &UV && \text{pela hipótese indutiva} \\ \equiv &M.\end{aligned}$$



Lógica Combinatória

Simulando Abstração

Definição

Para quaisquer $x_1, \dots, x_n$ (não necessariamente distintos),

$$\lambda^* x_1 \dots x_n. M \equiv \lambda^* x_1. (\lambda^* x_2. (\dots (\lambda^* x_n. M) \dots)).$$

Lógica Combinatória

Simulando Abstração

Exemplo

$$\begin{aligned}(a) \quad \lambda^*xy.x &\equiv \lambda^*x.(\lambda^*y.x) \\ &\equiv \lambda^*x.(Kx) && \text{pela Definição 2.14(a)} \\ &\equiv K && \text{pela Definição 2.14(c).}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(b) \quad \lambda^*xyz.xz(yz) &\equiv \lambda^*x.(\lambda^*y.(\lambda^*z.xz(yz))) \\ &\equiv \lambda^*x.(\lambda^*y.(S(\lambda^*z.xz)(\lambda^*z.yz))) && \text{por 2.14(f)} \\ &\equiv \lambda^*x.(\lambda^*y.Sxy) && \text{por 2.14(c)} \\ &\equiv \lambda^*x.Sx && \text{por 2.14(c)} \\ &\equiv S && \text{por 2.14(c).}\end{aligned}$$

Lógica Combinatória

Simulando Abstração

Teorema

Para quaisquer $x_1, \dots, x_n$ (mutuamente distintos),

$$(\lambda^* x_1 \dots x_n. M) U_1 \dots U_n \triangleright_w [U_1/x_1, \dots, U_n/x_n] M.$$

Demonstração.

Pelo Lema 2.12(c) basta provar o caso no qual $U_i \equiv x_i$ for all i .
E isso vem do Teorema 2.15 por uma indução sobre n . □

Lógica Combinatória

Simulando Abstração

Lema (Substituição e abstração)

- (a) $VL(\lambda^*x.M) = VL(M) - \{x\};$
- (b) $\lambda^*y.[y/x]M \equiv \lambda^*x.M \quad \text{se } y \notin VL(M);$
- (c) $[N/x](\lambda^*y.M) \equiv \lambda^*y.[N/x]M \quad \text{se } y \notin VL(xN).$

Demonstração.

Indução sobre M .



Lógica Combinatória

Simulando Abstração

Observação

A parte (b) mostra o análogo de $\equiv_\alpha$: identidade. A parte (c) é o análogo da operação de substituição sobre um λ -termo quando a variável sendo substituída não é a mesma que aquela ligada pela abstração.

Lógica Combinatória

Igualdade fraca

Definição (Igualdade fraca / convertibilidade fraca)

Diremos que X é fracamente igual ou fracamente conversível a Y , or

$$X =_w Y,$$

sse Y puder ser obtido a partir de X por meio de uma seqüência finita (talvez vazia) de contrações fracas e contrações fracas invertidas. Ou seja, $X =_w Y$ sse existe $X_0, \dots, X_n$ ($n \geq 0$) tal que

$$X_0 \equiv X, \quad X_n \equiv Y,$$

Para todo $i \leq n - 1$ ($X_i \triangleright_{1w} X_{i+1}$ ou $X_{i+1} \triangleright_{1w} X_i$).

Lógica Combinatória

Igualdade fraca

Lema

(a) Se $X =_w Y$ então $[X/v]Z =_w [Y/v]Z$;

(b) Se $X =_w Y$ então

$[U_1/x_1, \dots, U_n/x_n]X =_w [U_1/x_1, \dots, U_n/x_n]Y$.

Teorema (Church–Rosser para igualdade fraca)

Se $X =_w Y$ então existe um Z tal que

$$X \triangleright_w Z \quad e \quad Y \triangleright_w Z.$$

Lógica Combinatória

Igualdade fraca

Corolário

Se $X =_w Y$ e Y está na forma normal fraca, então $X \triangleright_w Y$.

Corolário

Se $X =_w Y$, então ou X e Y não têm formas normais fracas, ou eles ambos têm a mesma forma normal.

Lógica Combinatória

Igualdade fraca

Corolário

Se X e Y são formas normais fracas distintas, então $X \neq_w Y$; em particular, $S \neq_w K$. Daí $=_w$ é não-trivial no sentido de que nem todos os termos são iguais.

Corolário

Um termo pode ser fracamente igual a no máximo uma forma normal fraca.

Corolário

Se $xX_1 \dots X_m =_w yY_1 \dots Y_n$, então $x \equiv y$ e $m = n$ e $X_i =_w Y_i$ para todo i .

Lógica Combinatória

Igualdade fraca

Observação

Pelos resultados acima, redução fraca e igualdade fraca são paralelos íntimos de $\lambda\beta$ -redução e igualdade. Mas os dois sistemas não correspondem exatamente. A principal diferença é que a $\lambda\beta$ -igualdade tem a propriedade que Curry & Feys (1958) chama de (ξ) , a saber

(ξ) Se $X =_{\beta} Y$ então $\lambda x.X =_{\beta} \lambda x.Y$.

$((\xi)$ se verifica pois qualquer contração ou mudança de variáveis ligadas feita em X pode também ser feita em $\lambda x.X$.)

Quando traduzida para a linguagem combinatória, (ξ) se torna

Se $X =_w Y$ então $\lambda^ x.X =_w \lambda^* x.Y$.*

Mas para CL-termos λ^ não é parte da sintaxe, e (ξ) falha.*

Lógica Combinatória

Igualdade fraca

Exemplo

Tome

$$X \equiv Sxyz, \quad Y \equiv xz(yz);$$

então $X =_w Y$, *mas*

$$\lambda^*x.X \equiv S(SS(Ky))(Kz),$$

$$\lambda^*x.Y \equiv S(SI(Kz))(K(yz)).$$