Lambda-Cáculo (Aula 2)

Ruy de Queiroz & Anjolina de Oliveira

Centro de Informática, UFPE

2007.2

Conteúdo

Notação

- Considere a expressão $x - y$
- Podemos definir duas funções para lidar com essa expressão:
  - $f: \quad x \rightarrow x - y \ (f(x) = x - y)$
  - $g: \quad y \rightarrow x - y \ (g(y) = x - y)$
- No caso do lambda-cálculo há uma maneira sistemática de construir essas duas funções:
  - $f = \lambda x.x - y$ e $g = \lambda y.x - y$

Notação

- Considere as equações:
  - $f(0) = 0 - y$ e $f(1) = 1 - y$;
- Na notação λ elas ficam:
  - $(\lambda x.x - y)(0) = 0 - y$
  - $(\lambda x.x - y)(1) = 1 - y$

- A notação lambda pode ser extendida para funções com mais de uma variável:
  - $h(x, y) = x - y$ e $k(y, x) = x - y$
- Com a notação λ:
  - $h = \lambda xy.x - y$
  - $k = \lambda yx.x - y$

Funções como argumento

- Podemos abolir o uso de funções com várias variáveis;
- usamos funções cujos valores não são números, mas outras funções:
    - a função $h = \lambda xy.x - y$ fica $h^* = \lambda x.(\lambda y.x - y)$
    - para cada número a temos $h^*(a) = \lambda y.a - y$
    - para cada par de números a, b temos $(h^*(a))(b) = (\lambda y.a - y)(b)$
    - $= a - b = h(a, b)$
- A partir de agora as funções serão definidas com apenas uma variável.

Lambda-Cálculo: Definições básicas

Definição (λ-termos)

(a) Toda variável e toda constante são λ-termos (chamados átomos*).*
(b) Se M e N são λ-termos, então (MN) é um λ-termo. (APLICAÇÃO) (usualmente temos $M(N)$, mas em λ-cálculo (MN) se tornou padrão).
(c) Se M é um λ-termo e x é uma variável, então $(\lambda x.M)$ é um λ-termo. (ABSTRAÇÃO)

Lambda-Cálculo
Definições básicas

Exemplo

$(\lambda x.(xy))$, $((\lambda y.y)(\lambda x.(xy)))$, $(x(\lambda x.(\lambda x.x)))$, $(\lambda x.(yz))$.

Notação

- *Letras maiúsculas: denotam λ-termos arbitrários;*
- *Letras x, y, z, u, v, w: denotam variáveis;*
- *Parênteses: quando omitidos a convenção é usar associação à esquerda.*
  - $MNPQ$ *denota* $(((MN)P)Q)$ $\lambda x.PQ$ *é* $(\lambda x.(PQ))$
  - $\lambda x_1 \ldots x_n.M$ *é* $(\lambda x_1.(\lambda x_2.(\ldots(\lambda x_n.M)\ldots)))$.

Exemplo

- MNP significa $((MN)P)$
- $\lambda xy.M$ significa $(\lambda x.(\lambda y.M))$
- $\lambda xyz.M$ significa $(\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.M)))$
- $\lambda xy.soma\ y\ x$ significa $(\lambda x.(\lambda y.((soma\ y)x)))$

Entendendo a notação

- Em geral se M é interpretado como uma função ou operador, então (MN) denota o resultado de aplicar M ao argumento N.
- O termo $(\lambda x.M)$ representa o operador cujo valor para um argumento N é calculado substituindo x por N em M.

Exemplo

$\lambda x.x(xy)$ representa a operação de aplicar uma função duas vezes a um objeto denotado por y.
Assim, $(\lambda x.x(xy))N = N(Ny)$.

Exemplo

$\lambda x.y$ representa a função constante que toma o valor y para qualquer argumento. Assim, $(\lambda x.y)N = y$.

Exemplo

$\lambda x.x$ denota a função identidade. Assim $(\lambda x.x)M = M$

Exemplo

$(\lambda x.(\lambda y.(yx)))$ denota a função que quando aplicada a M $((\lambda x.(\lambda y.(yx)))M)$ produz $(\lambda y.(yM))$ que também é uma função que quando aplicada a P $(\lambda y.(yM)P)$ produz (PM).

Identidade sintática

Notação

Identidade sintática: $M \equiv N$. *Significa que* M *é exatamente o mesmo que* N.

Exemplo

- *Se* $MN \equiv PQ$ *então* $M \equiv P$ *e* $N \equiv Q$;
- *Se* $\lambda x.M \equiv \lambda y.P$ *então* $x \equiv y$ *e* $M \equiv P$.

Lambda-Cálculo

Definições básicas

Definição (comprimento de um termo)

O comprimento *de um termo M é dado pelo número total de átomos em M. Isto é,*

(a) $compr(a) = 1$ *para átomos a.*

(b) $compr(MN) = compr(M) + compr(N)$*;*

(c) $compr(\lambda x.M) = 1 + compr(M)$*.*

Lambda-Cálculo

Definições básicas

Definição

A relação "P ocorre em *Q"(ou "P* é um subtermo de *Q", ou "Q* contém *P") é definida por indução sobre a complexidade de Q:*
(a) P ocorre em P;
(b) se P ocorre em M ou em N, então P ocorre em (MN);
(c) se P ocorre em M ou $P \equiv x$, então P ocorre em $(\lambda x.M)$.

Exemplo

O termo $x(yz)$ ocorre em $ux(yz)$? Não, pois $ux(yz)$ é $((ux)(yz))$.

Lambda-Cálculo

Definições básicas

Definição (escopo)

Dado um termo P e uma ocorrência específica de $\lambda x.M$ em P, M é chamado de escopo *da ocorrência de λ.*

Exemplo

Seja $P \equiv (\lambda y.yx(\lambda x.y(\lambda y.z)x))vw$. O escopo do primeiro λ é $yx(\lambda x.y(\lambda y.z)x)$, enquanto que o escopo do λ seguinte é $y(\lambda y.z)x$.

Lambda-Cálculo

Definições básicas

Definição (Variável livre/ligada)

Uma ocorrência de uma variável x em um λ-termo é livre se ela não está no escopo de um λx, caso contrário ela é ligada.

Exemplo

Em $(\lambda x.yx)(\lambda y.xy)$ a primeira ocorrência de y é livre, enquanto que a segunda é ligada. A primeira ocorrência de x é ligada e a segunda é livre.

Definição (Conjunto de variáveis livres)

$$
\begin{aligned}
VL(x) &= \{x\} \\
VL(MN) &= VL(M) \cup VL(N) \\
VL(\lambda x.M) &= VL(M) - \{x\}
\end{aligned}
$$

Definição (Termo fechado)

Um termo fechado é um termo sem variáveis livres.

Definição (Substituição)

Seja M um termo, e suponha que x seja uma variável. O termo $[N/x]M$ resultando de se colocar o termo N no lugar de toda ocorrência livre de x em M é definido indutivamente como:

$$
\begin{array}{llcl}
a) & [N/x]x & \equiv & N; \\
b) & [N/x]a & \equiv & a \quad \textit{para todo átomo } a \not\equiv x; \\
c) & [N/x](PQ) & \equiv & ([N/x]P\ [N/x]Q); \\
d) & [N/x](\lambda x.P) & \equiv & \lambda x.P; \\
e) & [N/x](\lambda y.P) & \equiv & \lambda y.[N/x]P \quad \textit{se } y \not\equiv x, \textit{ e} \\
 & & & \qquad\qquad y \notin VL(N) \textit{ ou } x \notin VL(P); \\
f) & [N/x](\lambda y.P) & \equiv & \lambda z.[N/x][z/y]P \quad \textit{se } y \not\equiv x \textit{ e} \\
 & & & \qquad\qquad y \in VL(N) \textit{ e } x \in VL(P).
\end{array}
$$

Exemplo

- *Avaliando* $[w/x](\lambda y.x)$*. O termo* $\lambda y.x$ *representa a função constante* x*. O resultado da substituição é* $\lambda y.w$*, continuamos com a função constante.*
- *Agora suponha que temos o termo* $\lambda w.x$ *(também é uma função constante* x*).*
- *Pela cláusula* (e)*,* $[w/x](\lambda w.x)$ *é* $\lambda w.w$*, que representa a função identidade e não a função constante.*
- *Com a cláusula* (f) *fazemos a substituição correta:*

$$\begin{array}{rcl} [w/x](\lambda w.x) & = & \lambda z.[w/x][z/w]x \\ & = & \lambda z.[w/x]x \\ & = & \lambda z.w \end{array}$$

Exemplo

Avalie as seguintes λ-expressões:

a) $[(\lambda y.xy)/x](\lambda y.x(\lambda x.x))$

- *Como y não ocorre livre em $\lambda y.xy$, podemos aplicar a cláusula* (*e*)*.*
- $\lambda y.(\lambda y.xy)(\lambda x.x)$

b) $[(\lambda y.vy)/x](y(\lambda v.xv))$

- *Nesse caso, aplicamos a cláusula* (f)*, pois v ocorre livre em $\lambda y.vy$ e x ocorre livre em $\lambda v.xv$.*
- $(y(\lambda z.[(\lambda y.vy)/x][z/v]xv)]$
- $y(\lambda z.[\lambda y.vy/x]xz)$
- $y(\lambda z.(\lambda y.vy)z)$

Lambda-Cálculo
Definições básicas

Lema

(a) $[x/x]M \equiv M$;
(b) $x \notin VL(M) \quad \Rightarrow \quad [N/x]M \equiv M$;
(c) $x \in VL(M) \quad VL([N/x]M) = VL(N) \cup (VL(M) - \{x\})$;
(d) $compr([y/x]M) = compr(M)$.

Lambda-Cálculo

Substituição

Lema

Sejam x, y, v variáveis distintas, e suponha que nenhuma variável ligada em M esteja livre em vPQ. Então

(a) $v \notin VL(M) \quad \Rightarrow \quad [P/v][v/x]M \equiv [P/x]M$;

(b) $v \notin VL(M) \quad \Rightarrow \quad [x/v][v/x]M \equiv M$;

(c) $y \notin VL(P) \quad \Rightarrow \quad [P/x][Q/y]M \equiv [([P/x]Q)/y][P/x]M$;

(d) $y \notin VL(P) \quad \Rightarrow \quad [P/x][Q/y]M \equiv [([P/x]Q)/y][P/x]M$;

(e) $[P/x][Q/x]M \equiv [([P/x]Q)/x]M$.

Demonstração.

Por indução sobre a estrutura de M. $\square$

Lambda-Cálculo: Substituição

Definição (Troca de variáveis ligadas, congruência, α-conversão)

Suponha que o termo P contém uma ocorrência de $\lambda x.M$, e assuma que $y \notin VL(M)$. O procedimento de substituir tal $\lambda x.M$ por

$$\lambda y.[y/x]M$$

é chamado de uma troca de variável ligada *em P. Diremos que P* é congruente a *Q, ou que P* α-converte para *Q, ou*

$$P \equiv_\alpha Q,$$

sse Q tenha sido obtido a partir de P por meio de uma série finita (talvez vazia) de trocas de variáveis ligadas.

Exemplo

$$\begin{array}{rcl}
\lambda xy.x(xy) & \equiv & \lambda x.(\lambda y.(x(xy))) \\
 & \equiv_\alpha & \lambda x.(\lambda v.x(xv)) \\
 & \equiv_\alpha & \lambda u.(\lambda v.u(uv)) \\
 & \equiv & \lambda uv.u(uv)
\end{array}$$

Lema

(a) Se $P \equiv_\alpha Q$ então $VL(P) = VL(Q)$.
(b) Para qualquer P e quaisquer $x_1, \ldots x_n$, existe P' tal que $P \equiv_\alpha P'$ e nenhuma das $x_1, \ldots, x_n$ está ligada em P'.
(c) A relação $\equiv_\alpha$ é uma relação de equivalência.

Lambda-Cálculo

Prova do lema da substituição

Demonstração.

(a) Segue do Lema 3.13(c).
(b) Por indução sobre a estrutura de P.
(c) Simetria: vamos provar que se $y \notin VL(M)$ (e $y \not\equiv x$) então $\lambda y.[y/x]M \equiv_\alpha \lambda x.M$.
Agora, $x \notin VL([y/x]M)$ pelo Lema 3.13(c), portanto $\lambda y.[y/x]M \equiv_\alpha \lambda x.[x/y][y/x]M$.
Temos que mostrar que
$[x/y][y/x]M \equiv_\alpha M$.
Basta uma indução sobre a estrutura de M, cf. Lema 3.14(b). □

Lambda-Cálculo

Prova do lema da substituição

Lema

Se retirarmos a condição sobre variáveis ligadas em M do Lema 3.14 e substituirmos '$\equiv$' por '$\equiv_\alpha$', o enunciado permanece verdadeiro.

Demonstração.

Por indução sobre a estrutura de *M* (Curry & Feys 1958). □

Lema

Se $M \equiv_\alpha M'$ *e* $N \equiv_\alpha N'$, *então* $[N/x]M \equiv_\alpha [N'/x]M'$.

Demonstração.

Por indução sobre M, usando o lema anterior. $\square$

- Um termo da forma $(\lambda x.M)N$ representa um operador $\lambda x.M$ aplicado a um argumento N.
- A interpretação informal dessa expressão nos diz que seu valor é calculado substituindo N por x em M.
- Dessa forma, podemos reduzir $((\lambda x.M)N$ para $[N/x]M$.
- Chamamos essa simplificação de β-redução.

Definição

[β-contração, β-redução] Qualquer termo da forma $(\lambda x.M)N$ é chamado de β-redex*, e o termo correspondente $[N/x]M$ é chamado de seu* contractum*. Se um termo P contém uma ocorrência de $(\lambda x.M)N$ e substituirmos essa ocorrência por $[N/x]M$, e o resultado for P', dizemos que* contraímos *a ocorrência de redex em P, ou que P* β-contrai para *P' (ou β-reduz). Em símbolos:$P \triangleright_{1\beta} P'$.*

Dizemos que P β-reduz para *Q, ou, em símbolos,*

$P \triangleright_{\beta} Q$,

se Q for obtido a partir de P por uma seqüência finita (talvez vazia) de β-contrações e mudanças de variáveis ligadas.

Lambda-Cálculo
Contração, redução: Exemplos

Exemplo

(a) $(\lambda x.x(xy))N \triangleright_{1\beta} N(Ny)$.
(b) $(\lambda x.y)N \triangleright_{1\beta} y$.
(c) $(\lambda x.(\lambda y.yx)z)v \triangleright_{1\beta} [v/x]((\lambda y.yx)z) \equiv (\lambda y.yv)z$
$\triangleright_{1\beta} [z/y](yv) \equiv zv$.
(d) $(\lambda x.xxy)(\lambda x.xxy) \triangleright_{1\beta} (\lambda x.xxy)(\lambda x.xxy)y \triangleright_{1\beta}$
$(\lambda x.xxy)(\lambda x.xxy)yy \triangleright_{1\beta} \ldots$

Lambda-Cálculo

Forma normal

Definição

Um termo Q que não contém nenhuma β-redex é chamado de uma forma β-normal *(ou um* termo em forma β-normal*). A classe de todas as formas β-normal é chamada β-fn ou $\lambda\beta$-fn. Se um termo P β-reduz a um termo Q em β-fn, então Q é chamado de uma* forma β-normal de *P.*

Lambda-Cálculo: forma normal - exemplos

Exemplo

(a) No exemplo anterior, item (c), zv é uma forma β-normal de $(\lambda x.(\lambda y.yx)z)v$.
(b) Seja $L \equiv (\lambda x.xxy)(\lambda x.xxy)$. *Então*
$L \triangleright_{1\beta} Ly \triangleright_{1\beta} Lyy \triangleright_{1\beta} \ldots$
(c) Seja $P \equiv (\lambda u.v)L$ *para o termo L acima. Então:*
$P \equiv (\lambda u.v)L \triangleright_{1\beta} [L/u]v \equiv v$.
Portanto,

$$\begin{array}{lll} P & \triangleright_{1\beta} & (\lambda u.v)(Ly) \text{ contraindo } L \\ & \triangleright_{1\beta} & (\lambda u.v)(Lyy) \text{ contraindo } L \\ & \ldots & \end{array}$$

Daí, P tem uma forma normal v, mas também tem uma redução infinita.

Forma normal: confluência

Observação

Seja $P \equiv (\lambda x.(\lambda y.yx)z)v$. *Então:*

$$
\begin{array}{lll}
P & \triangleright_{1\beta} & (\lambda y.yv)z \text{ contraindo } P \\
 & \triangleright_{1\beta} & zv \text{ contraindo } (\lambda y.yv)z
\end{array}
$$

e

$$
\begin{array}{lll}
P & \triangleright_{1\beta} & (\lambda x.zx)v \text{ contraindo } (\lambda y.yx)z \\
 & \triangleright_{1\beta} & zv
\end{array}
$$

Ambas as reduções atingem a mesma forma normal. Será que é sempre assim?

Lambda-Cálculo

Forma normal: Exemplos

Lema

Se $P \equiv_\alpha P'$, $Q \equiv_\alpha Q'$ e $P \triangleright_\beta Q$, então $P' \triangleright_\alpha Q'$.

Demonstração.

$\triangleright_\beta$ inclui $\equiv_\alpha$, e essa última relação é simétrica. □

Lambda-Cálculo

Lema da Substituição para β-redução

Lema

[Lema da Substituição para β-redução] (a) Se $P \triangleright_\beta Q$ então ($v \notin VL(P)$ implica $v \notin VL(Q)$);
(b) Se $P \triangleright_\beta Q$ então $[P/x]M \triangleright_\beta [Q/x]M$;
(c) Se $P \triangleright_\beta Q$ então $[N/x]P \triangleright_\beta [N/x]Q$.

Lambda-Cálculo

Teorema de Church–Rosser

Teorema

[Church–Rosser para β-redução] Se
$P \triangleright_\beta M \quad and \quad P \triangleright_\beta N$*então existe um termo T tal que*
$M \triangleright_\beta T \quad e \quad N \triangleright_\beta T$.

Demonstração.

(Próxima aula.) □

Lambda-Cálculo

Teorema de Church–Rosser

Corolário

Se P tem formas β-normal M e N, então M é congruente a N.

Lema

A classe de β-fn é a menor classe de termos tal que
(a) todo átomo pertence a β-fn;
(b) se $M_1, \ldots, M_n$ pertencem a β-fn e a é um termo qualquer, então
$aM_1 \ldots M_n \in \beta$*-fn*
(c) se $M \in \beta$-fn, então $\lambda x.M \in \beta$-fn.

Lambda-Cálculo
Igualdade

Definição

P é β-igual ou β-conversível a Q (notação: $P =_\beta Q$) sse Q é obtido a partir de P por uma seqüência finita (talvez vazia) de β-contrações e β-contrações reversas e troca de variáveis ligadas. Ou seja, $P =_\beta Q$ sse existe $P_0, \ldots, P_n$ $(n \geq 0)$ tal que
$P_0 \equiv P, \qquad P_n \equiv Q,$
Para todo $i \leq n-1$, ou $P_i \triangleright_{1\beta} P_{i+1}$ ou $P_{i+1} \triangleright_{1\beta} P_i$ ou $P_i \equiv_\alpha P_{i+1}$.

Lambda-Cálculo
Igualdade (cont.)

Lema

Se $P \equiv_\alpha P'$, $Q \equiv_\alpha Q'$ e $P =_\beta Q$, então $P' =_\beta Q'$.

Lema

[Substituição para β-igualdade] (a) Se $P =_\beta Q$ então $[P/x]M =_\beta [Q/x]M$.
(b) Se $P =_\beta Q$ então $[N/x]P =_\beta [N/x]Q$.

Lambda-Cálculo
Igualdade (cont.)

Teorema

[Church–Rosser para β-igualdade] Se $P =_\beta Q$, então exist um termo T tal que
$P \triangleright_\beta T \quad e \quad Q \triangleright_\beta T$.

Lambda-Cálculo
Igualdade (cont.)

Demonstração.

Por indução sobre o comprimento da seqüência de contrações mencionada na Definição 5.1.
Caso Base ($n = 0$). Trivial.
Passo Indutivo. Assuma que
$P =_\beta P_n; \quad P \triangleright_{1\beta} P_{n+1} \quad \text{ou} \quad P_{n+1} \triangleright_{1\beta} P_n$
e a hipótese da indução dá um termo T_n tal que
$P \triangleright_\beta T_n, \quad P_n \triangleright_\beta T_n.$
Precisamos de um termo T tal que $P \triangleright_\beta T$ e $P_{n+1} \triangleright_\beta T$.Se $P_{n+1} \triangleright_{1\beta} P_n$, escolha $T \equiv T_n$. Se $P_n \triangleright_{1\beta} P_{n+1}$, aplique o Teorema 4.8 (Church–Rosser para β-redução) a P_n, T_n, P_{n+1}. $\square$

Lambda-Cálculo
Igualdade (cont.)

Corolário

Se $P =_\beta Q$ e Q está na forma β-normal, então $P \triangleright_\beta Q$.

Demonstração.

Pelo teorema de Church–Rosser, P e Q ambos reduzem a algum T. Mas Q não contém redex, portanto $Q \equiv_\alpha T$.
Daí$P \triangleright_\beta Q$. □

Lambda-Cálculo

Igualdade (cont.)

Corolário

Se P $=_\beta$ Q, então ou P e Q realmente têm formas β-normal, ou P e Q ambos têm as memas formas β-normal.

Corolário

Dois termos β-iguais em forma β-normal têm que ser congruentes.

Lambda-Cálculo

Igualdade (cont.)

Observação

Isso significa que a relação $=_\beta$ é não-trivial, i.e. existem P e Q tais que $P \neq_\beta Q$.

Corolário

Um termo pode ser β-igual a no máximo uma forma β-normal, modulo congruência.

Lambda-Cálculo

Igualdade (cont.)

Corolário

Se $xM_1 \ldots M_m =_\beta yN_1 \ldots N_n$, então $x \equiv y$ e $m = n$ e $M_i =_\beta N_i$ para todo i.

Demonstração.

Pelo teorema de Church–Rosser, ambos os termos reduzem a algum termo T. Mas cada β-redex em $xM_1 \ldots M_m$ tem que estar em um M_i, logo T tem que ter a forma $xT_1 \ldots T_m$, onde $M_i \triangleright_\beta T_i$ para $i = 1, \ldots, m$. Igualmente, $T \equiv yT'_1, \ldots T'_n$ onde $N_j \triangleright_\beta T'_j$ para $j = 1, \ldots, n$. $\square$