Lambda-Cáculo (Aula 2)

Ruy de Queiroz & Anjolina de Oliveira

Centro de Informática, UFPE

2007.2

Conteúdo

Lambda-Cálculo

Definições básicas

Definição (λ-termos)

(a) Toda variável e toda constante são λ-termos (chamados átomos*).*
(b) Se M e N são λ-termos, então (MN) é um λ-termo. (APLICAÇÃO)
(c) Se M é um λ-termo e x é uma variável, então $(\lambda x.M)$ é um λ-termo. (ABSTRAÇÃO)

Lambda-Cálculo

Definições básicas

Exemplo

$(\lambda x.(xy))$, $((\lambda y.y)(\lambda x.(xy)))$, $(x(\lambda x.(\lambda x.x)))$, $(\lambda x.(yz))$.

Notação

Identidade sintática: $M \equiv N$.

Lambda-Cálculo
Definições básicas

Definição (comprimento de um termo)

O comprimento *de um termo M é dado pelo número total de átomos em M. Isto é,*
(a) $compr(a) = 1$ *para átomos a.*
(b) $compr(MN) = compr(M) + compr(N)$*;*
(c) $compr(\lambda x.M) = 1 + compr(M)$*.*

Lambda-Cálculo

Definições básicas

Definição

A relação "P ocorre em *Q"(ou "P* é um subtermo de *Q", ou "Q* contém *P") é definida por indução sobre a complexidade de Q:*
(a) P ocorre em P;
(b) se P ocorre em M ou em N, então P ocorre em (MN)*;*
(c) se P ocorre em M ou $P \equiv x$*, então P ocorre em* $(\lambda x.M)$*.*

Lambda-Cálculo
Definições básicas

Definição (escopo)

Dado um termo P e uma ocorrência específica de $\lambda x.M$ em P, M é chamado de escopo *da ocorrência de λ.*

Exemplo

Seja $P \equiv (\lambda y.yx(\lambda x.y(\lambda y.z)x))vw$. O escopo do primeiro λ é $yx(\lambda x.y(\lambda y.z)x)$, enquanto que o escopo do λ seguinte é $y(\lambda y.z)x$.

Lambda-Cálculo

Definições básicas

Definição (Variáveis livres)

$$
\begin{array}{rcl}
VL(x) & = & \{x\} \\
VL(MN) & = & VL(M) \cup VL(N) \\
VL(\lambda x.M) & = & VL(M) - \{x\}
\end{array}
$$

Lambda-Cálculo
Definições básicas

Definição (Substituição)

Seja M um termo, e suponha que x seja uma variável. O termo $[N/x]M$ resultando de se colocar o termo N no lugar de toda ocorrência livre de x em M é definido indutivamente como:

$$
\begin{array}{rcl}
[N/x]x & \equiv & N; \\
[N/x]a & \equiv & a \quad \text{para todo átomo } a \not\equiv x; \\
[N/x](PQ) & \equiv & ([N/x]P\ [N/x]Q); \\
[N/x](\lambda x.P) & \equiv & \lambda x.P; \\
[N/x](\lambda y.P) & \equiv & \lambda y.[N/x]P \quad \text{se } y \not\equiv x, \text{ e} \\
 & & \qquad\qquad y \notin VL(N) \text{ ou } x \notin VL(P); \\
[N/x](\lambda y.P) & \equiv & \lambda z.[N/x][z/y]P \quad \text{se } y \not\equiv x \text{ e} \\
 & & \qquad\qquad y \in VL(N) \text{ e } x \in VL(P).
\end{array}
$$

Lambda-Cálculo
Definições básicas

Lema

(a) $[x/x]M \equiv M$;
(b) $x \notin VL(M) \quad \Rightarrow \quad [N/x]M \equiv M$;
(c) $x \in VL(M) \quad VL([N/x]M) = VL(N) \cup (VL(M) - \{x\})$;
(d) $compr([y/x]M) = compr(M)$.

Lambda-Cálculo
Substituição

Lema

Sejam x, y, v variáveis distintas, e suponha que nenhuma variável ligada em M esteja livre em vPQ. Então
(a) $v \notin VL(M) \quad \Rightarrow \quad [P/v][v/x]M \equiv [P/x]M;$
(b) $v \notin VL(M) \quad \Rightarrow \quad [x/v][v/x]M \equiv M;$
(c) $y \notin VL(P) \quad \Rightarrow \quad [P/x][Q/y]M \equiv [([P/x]Q)/y][P/x]M;$
(d) $y \notin VL(P), x \notin VL(Q) \;\Rightarrow\; [P/x][Q/y]M \equiv [Q/y][P/x]M;$
(e) $[P/x][Q/x]M \equiv [([P/x]Q)/x]M.$

Lambda-Cálculo
Substituição

Definição (Troca de variáveis ligadas, congruência, α-conversão)

Suponha que o termo P contém uma ocorrência de $\lambda x.M$, e assma que $y \notin VL(M)$. O procedimento de substituir tal $\lambda x.M$ por

$$\lambda y.[y/x]M$$

é chamado de uma troca de variável ligada *em P. Diremos que P* é congruente a *Q, ou que P* α-converte para *Q, ou*

$$P \equiv_\alpha Q,$$

sse Q tenha sido obtido a partir de P por meio de uma série finita (talvez vazia) de trocas de variáveis ligadas.

Lambda-Cálculo
Substituição

Lema

(a) Se $P \equiv_\alpha Q$ *então* $VL(P) = VL(Q)$*.*
(b) Para qualquer P *e quaisquer* $x_1, \ldots x_n$*, existe* P' *tal que* $P \equiv_\alpha P'$ *e nenhuma das* $x_1, \ldots, x_n$ *está ligada em* P'*.*
(c) A relação $\equiv_\alpha$ *é uma relação de equivalência.*

Lambda-Cálculo

Prova do lema da substituição

Demonstração.

(a) Segue do Lema 2.7(c).
(b) Por indução sobre a estrutura de P.
(c) Simetria: vamos provar que se $y \notin VL(M)$ (e $y \not\equiv x$) então $\lambda y.[y/x]M \equiv_\alpha \lambda x.M$.
Agora, $x \notin VL([y/x]M)$ pelo Lema 2.7(c), portanto $\lambda y.[y/x]M \equiv_\alpha \lambda x.[x/y][y/x]M$.
Temos que mostrar que
$[x/y][y/x]M \equiv_\alpha M$.
Basta uma indução sobre a estrutura de M, cf. Lema 2.8(b). □

Lambda-Cálculo

Prova do lema da substituição

Lema

Se retirarmos a condição sobre variáveis ligadas em M do Lema 2.8 e substituirmos '$\equiv$' por '$\equiv_\alpha$', o enunciado permanece verdadeiro.

Demonstração.

Por indução sobre a estrutura de M (Curry & Feys 1958). $\square$

Lema

Se $M \equiv_\alpha M'$ e $N \equiv_\alpha N'$, então $[N/x]M \equiv_\alpha [N'/x]M'$.

Lambda-Cálculo

Contração, redução

Definição (β-contração, β-redução)

Qualquer termo da forma
$(\lambda x.M)N$
é chamado de β-redex, *e o termo correspondente*
$[N/x]M$
é chamado de seu contractum. *Se um termo P contém uma ocorrência de $(\lambda x.M)N$ e substituirmos essa ocorrência por $[N/x]M$, e o resultado for P', dizemos que* contraímos *a ocorrência de redex em P, ou que P* β-contrai para P'. *Em símbolos:*
$P \rhd_{1\beta} P'$.
Dizemos que P β-reduz para *Q, ou, em símbolos,*
$P \rhd_{\beta} Q$,
se Q for obtido a partir de P por uma seqüência finita (talvez vazia) de β-contrações e mudanças de variáveis ligadas.

Lambda-Cálculo

Contração, redução: Exemplos

Exemplo

(a) $(\lambda x.x(xy))N \triangleright_{1\beta} N(Ny)$.

(b) $(\lambda x.y)N \triangleright_{1\beta} y$.

(c) $(\lambda x.(\lambda y.yx)z)v \triangleright_{1\beta} [v/x]((\lambda y.yx)z) \equiv (\lambda y.yv)z$
$\triangleright_{1\beta} [z/y](yv) \equiv zv$.

(d) $(\lambda x.xxy)(\lambda x.xxy) \triangleright_{1\beta} (\lambda x.xxy)(\lambda x.xxy)y \triangleright_{1\beta}$
$(\lambda x.xxy)(\lambda x.xxy)yy \triangleright_{1\beta} \ldots$

Lambda-Cálculo
Forma normal

Definição

Um termo Q que não contém nenhuma β-redex é chamado de uma forma β-normal *(ou um* termo em forma β-normal*). A classe de todas as formas β-normais é chamada β-fn ou $\lambda\beta$-fn. Se um termo P β-reduz a um termo Q em β-fn, então Q é chamado de uma* forma β-normal de *P.*

Lambda-Cálculo

Forma normal: Exemplos

Exemplo

(a) No Exemple 3.2(c), zv é uma forma β-normal de $(\lambda x.(\lambda y.yx)z)v$.
(b) Seja $L \equiv (\lambda x.xxy)(\lambda x.xxy)$. Então
$L \rhd_{1\beta} Ly \rhd_{1\beta} Lyy \rhd_{1\beta} \ldots$
(c) Seja $P \equiv (\lambda u.v)L$ para o termo L acima. Então:
$P \equiv (\lambda u.v)L \rhd_{1\beta} [L/u]v \equiv v$.
Portanto,

$$\begin{array}{lll} P & \rhd_{1\beta} & (\lambda u.v)(Ly) \text{ by contracting } L \\ & \rhd_{1\beta} & (\lambda u.v)(Lyy) \text{ by contracting } L \\ & \ldots & \end{array}$$

Daí, P tem uma forma normal v, mas também tem uma redução infinita.

Lambda-Cálculo
Forma normal: confluência

Observação

Seja $P \equiv (\lambda x.(\lambda y.yx)z)v$. *Então:*

$$
\begin{array}{lll}
P & \triangleright_{1\beta} & (\lambda y.yv)z \text{ contraindo } P \\
 & \triangleright_{1\beta} & zv \text{ contraindo } (\lambda y.yv)z
\end{array}
$$

e

$$
\begin{array}{lll}
P & \triangleright_{1\beta} & (\lambda x.zx)v \text{ contraindo } (\lambda y.yx)z \\
 & \triangleright_{1\beta} & zv
\end{array}
$$

Ambas as reduções atingem a mesma forma normal. Será que é sempre assim?

Lambda-Cálculo

Forma normal: Exemplos

Lema

Se $P \equiv_\alpha P'$, $Q \equiv_\alpha Q'$ *e* $P \triangleright_\beta Q$, *então* $P' \triangleright_\beta Q'$.

Demonstração.

$\triangleright_\beta$ inclui $\equiv_\alpha$, e essa última relação é simétrica. $\square$

Lambda-Cálculo

Lema da Substituição para β-redução

Lema (Lema da Substituição para β-redução)

(a) Se $P \triangleright_\beta Q$ *então (*$v \notin VL(P)$ *implica* $v \notin VL(Q)$*);*
(b) Se $P \triangleright_\beta Q$ *então* $[P/x]M \triangleright_\beta [Q/x]M$*;*
(c) Se $P \triangleright_\beta Q$ *então* $[N/x]P \triangleright_\beta [N/x]Q$*.*

Lambda-Cálculo

Teorema de Church–Rosser

Teorema (Church–Rosser para β-redução)

Se
$P \triangleright_\beta M \quad e \quad P \triangleright_\beta N$
então existe um termo T tal que
$M \triangleright_\beta T \quad e \quad N \triangleright_\beta T.$

Demonstração.

(Próxima aula.) $\square$

Lambda-Cálculo
Teorema de Church–Rosser

Corolário

Se P tem formas β-normais M e N, então M é congruente a N.

Lema

A classe de β-fn é a menor classe de termos tal que
(a) todo átomo pertence a β-fn;
(b) se $M_1, \ldots, M_n$ pertencem a β-fn e a é um átomo qualquer, então
$aM_1 \ldots M_n \in \beta$-*fn*
(c) se $M \in \beta$-fn, então $\lambda x.M \in \beta$-fn.

Lambda-Cálculo
Igualdade

Definição

P é β-igual *ou* β-conversível *a Q (notação: $P =_\beta Q$) sse Q é obtido a partir de P por uma seqüência finita (talvez vazia) de β-contrações e β-contrações reversas e troca de variáveis ligadas. Ou seja, $P =_\beta Q$ sse existe $P_0, \ldots, P_n$ ($n \geq 0$) tal que*
$P_0 \equiv P, \qquad P_n \equiv Q,$
Para todo $i \leq n-1$, ou $P_i \rhd_{1\beta} P_{i+1}$ ou $P_{i+1} \rhd_{1\beta} P_i$ ou $P_i \equiv_\alpha P_{i+1}$.

Lambda-Cálculo
Igualdade (cont.)

Lema

Se $P \equiv_\alpha P'$, $Q \equiv_\alpha Q'$ e $P =_\beta Q$, então $P' =_\beta Q'$.

Lema (Substituição para β-igualdade)

(a) Se $P =_\beta Q$ então $[P/x]M =_\beta [Q/x]M$.
(b) Se $P =_\beta Q$ então $[N/x]P =_\beta [N/x]Q$.

Lambda-Cálculo
Igualdade (cont.)

Teorema (Church–Rosser para β-igualdade)

Se $P =_\beta Q$, então exist um termo T tal que
$P \triangleright_\beta T \quad e \quad Q \triangleright_\beta T$.

Lambda-Cálculo
Igualdade (cont.)

Demonstração.

Por indução sobre o comprimento da seqüência de contrações mencionada na Definição 4.1.
Caso Base ($n = 0$). Trivial.
Passo Indutivo. Assuma que
$P =_\beta P_n; \quad P \triangleright_{1\beta} P_{n+1} \quad \text{ou} \quad P_{n+1} \triangleright_{1\beta} P_n$
e a hipótese da indução dá um termo T_n tal que
$P \triangleright_\beta T_n, \quad P_n \triangleright_\beta T_n.$
Precisamos de um termo T tal que $P \triangleright_\beta T$ e $P_{n+1} \triangleright_\beta T$.Se $P_{n+1} \triangleright_{1\beta} P_n$, escolha $T \equiv T_n$. Se $P_n \triangleright_{1\beta} P_{n+1}$, aplique o Teorema 3.8 (Church–Rosser para β-redução) a P_n, T_n, P_{n+1}. □

Lambda-Cálculo
Igualdade (cont.)

Corolário

Se $P =_\beta Q$ e Q está na forma β-normal, então $P \triangleright_\beta Q$.

Demonstração.

Pelo teorema de Church–Rosser, P e Q ambos reduzem a algum T. Mas Q não contém redex, portanto $Q \equiv_\alpha T$. Daí$P \triangleright_\beta Q$. $\square$

Lambda-Cálculo

Igualdade (cont.)

Corolário

Se P $=_\beta$ Q, então ou P e Q não têm forma β-normal, ou P e Q ambos têm as memas formas β-normais.

Corolário

Dois termos β-iguais em forma β-normal têm que ser congruentes.

Lambda-Cálculo
Igualdade (cont.)

Observação

Isso significa que a relação $=_\beta$ é não-trivial, i.e. existem P e Q tais que $P \neq_\beta Q$.

Corolário

Um termo pode ser β-igual a no máximo uma forma β-normal, modulo congruência.

Lambda-Cálculo

Igualdade (cont.)

Corolário

Se $xM_1 \ldots M_m =_\beta yN_1 \ldots N_n$*, então* $x \equiv y$ *e* $m = n$ *e* $M_i =_\beta N_i$ *para todo* i*.*

Demonstração.

Pelo teorema de Church–Rosser, ambos os termos reduzem a algum termo T. Mas cada β-redex em $xM_1 \ldots M_m$ tem que estar em um M_i, logo T tem que ter a forma $xT_1 \ldots T_m$, onde $M_i \rhd_\beta T_i$ para $i = 1, \ldots, m$. Igualmente, $T \equiv yT'_1, \ldots T'_n$ onde $N_j \rhd_\beta T'_j$ para $j = 1, \ldots, n$. $\square$