# *Lambda-Cáculo* (Aula 1)

Ruy José Guerra Barretto de Queiroz

Centro de Informática, UFPE

2007.2

# Conteúdo

# Lambda-Cálculo

## Respostas ao *Entscheidungsproblem*

### Fato (Ponto de partida)

*“Existe uma classe de problemas da teoria elementar dos números que pode ser enunciada sob a forma de que se deseja encontrar uma função efetivamente calculável $f$ de $n$ inteiros positivos, tal que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 2$ seja uma condição necessária e suficiente para a verdade de uma certa proposição da teoria elementar dos números envolvendo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ como variáveis livres. (...) [Por exemplo,] $f(n)$ é igual a 2 se e somente se existem inteiros positivos $x, y, z$, tais que $x^n + y^n = z^n$. Claramente a condição de que a função $f$ seja efetivamente calculável é uma parte essencial do problema, pois sem ela o problema torna-se trivial.”*

# Lambda-Cálculo
## Estratégia de Church

**Passo 1.** Definir o conjunto de $\lambda$-fórmulas. **Passo 2.** Definir uma codificação de números em $\lambda$-fórmulas.
**Passo 3.** Definir *conversão*: $\alpha$ e $\beta$ (e $\beta^{-1}$).
**Passo 4.** Definir *conversível* e *imediatamente conversível*.
**Passo 5.** Definir *redução*: conversões com apenas $\beta$.

# Lambda-Cálculo
## Estratégia de Church (cont.)

**Passo 6.** Definir *forma normal*
**Passo 7.** Definir *forma normal principal*.
**Passo 8.** Provar:
(1) se uma fórmula está na forma normal então nenhuma redução dela é possível;
(2) (a) formas normais são únicas a menos de $\alpha$-conversão; (b) confluência (Rosser);
(3) se uma fórmula tem uma forma normal então todas as suas subfórmulas têm uma forma normal.

# Lambda-Cálculo

## Estratégia de Church (cont.)

**Passo 9.** Definir ‘função $\lambda$-definível’.
**Passo 10.** Definir a representação de Gödel de fórmulas.
**Passo 11.** Definir as funções recursivas
- equações elementares
- equações derivadas
- funções recursivas
- funções potencialmente recursivas

# Lambda-Cálculo

## Estratégia de Church (cont.)

**Passo 12.** Provar:
(1) a propriedade de um inteiro positivo de que existe uma fórmula bem-formada da qual ele é a representação de Gödel é recursiva;
(2) o conjunto de fbf's é recursivamente enumerável;
(3) a função de duas variáveis cujo valor, quando tomado da fbf's $F$ e $X$, é o $FX$, é recursiva;
(4) a função, cujo valor para cada uma das fórmulas $1, 2, 3, \ldots$ é a fórmula correspondente $1, 2, 3, \ldots$, é recursivo;
(5) a função identidade é recursiva; a função constante é recursiva; sucessor é recursiva;
(6) a relação de convertibilidade imediata é recursiva;

# Lambda-Cálculo
## Estratégia de Church (cont.)

**Passo 12 (cont.).** Provar:
(7) enumeração do conjunto de fórmulas obtidas por conversão é recursivo;
(8) a propriedade de 'está na forma normal principal' é recursiva;
(9) o conjunto de fbf's que estão na forma normal principal é recursivamente enumerável;
(10) o conjunto de fbf's que têm uma forma normal é recursivamente enumerável;
(11) toda função recursiva é $\lambda$-definível;
(12) toda função $\lambda$-definível é recursiva.

# Lambda-Cálculo

## Estratégia de Church (cont.)

**Passo 13.** Defina *efetivamente calculável* **Passo 14.** Investigar *invariantes de conversão* (invariante trivial: o conjunto de variáveis livres)
**Objetivo:** provar que *não existe conjunto completo de invariantes efetivamente calculáveis de conversão*.
**Conseqüências:** Juntamente com os resultados de Kleene (1935), se o problema de se encontrar um conjunto completo de invariantes efetivamente calculáveis de conversão fossem resolvidos, a maioria dos problemas não-resolvidos habituais da teoria elementar dos números teriam sido consequentemente resolvidos. Isso também implicaria na solução do *Entscheidungsproblem*.

# Lambda-Cálculo

## Estratégia de Church (cont.)

**Passo 15.** Provar que encontrar uma função recursiva de duas fórmulas $A$ e $B$ cujo valor é 0 ou 1 conforme $A$ converta a $B$ ou não, é equivalente ao problema de se encontrar uma função recursiva de uma fórmula $C$ cujo valor é 0 ou 1 conforme $C$ tenha ou não uma forma normal.

**Passo 16.** Provar que não existe função recursiva de uma fórmula $C$, cujo valor é 0 ou 1 conforme $C$ tenha ou não uma forma normal.

# Lambda-Cálculo

## Estratégia de Church (cont.)

**Passo 17.** Provar que *o conjunto de fórmulas bem-formadas que não têm forma normal não é recursivamente enumerável*.
**Passo 18.** Provar que existe uma função não-recursiva de inteiros positivos: *suponha que uma função $F$ de um inteiro positivo seja definida pela regra que diz que $F(n)$ será igual a* 1 *ou* 0 *conforme $n$ esteja ou não na representação de Gödel de uma fórmula que tem forma normal. Então $F$ (se válida) é um exemplo de uma função não-recursiva de inteiros positivos*.

# Lambda-Cálculo

## Estratégia de Church (cont.)

**Passo 19.** Prove que *Não existe função recursiva de duas fórmulas A e B, cujo valor é* 0 *ou* 1 *conforme A converte ou não a B*. (Segue dos passos 17 e 18.)