Teoria Axiomática dos Conjuntos, 2007.1
Lista de Exercícios 1

Exercício 1 (2,0) Suponha que S seja um conjunto. Assuma que $T = \{x \in S \mid x \notin x\}$. Prove que T existe e é único. Mostre que T *não* é um elemento de S. [*Obs.:* Isso mostra que não existe conjunto universal (ou seja, conjunto contendo tudo).]

Exercício 2 (2,0) Um conjunto B é chamado de *unitário* caso $B = \{x\}$ para algum x. Mostre que não existe um conjunto B que contém todos os conjuntos unitários.. [*Dica:* prove que se existisse tal conjunto A, então existiria um conjunto universal.]

Exercício 3 (3.2 (Cap. 1) (2,0)) Substitua o Axioma de Existência pelos seguintes postulados mais fracos:

Axioma Fraco de Existência   Algum conjunto existe.

Prove o Axioma da Existência usando o Axioma Fraco de Existência e o Esquema da Compreensão. [*Dica:* Seja A um conjunto que sabe-se que existe; considere $\{x \in A \mid x \neq x\}$.]

Exercício 4 (3.6 (Cap. 1) (2,0)) Mostre que $\mathcal{P}(X) \subseteq X$ é falso para qualquer X. Em particular, $\mathcal{P}(X) \neq X$ para qualquer X. Isso prova que um "conjunto de todos os conjuntos" não existe. [*Dica:* Seja $Y = \{u \in X \mid u \notin u\}$; $Y \in \mathcal{P}(X)$ mas $Y \notin X$.]

Exercício 5 (4.2 (Cap. 1) (2,0)) Prove:

(i) $A \subseteq B$ se e somente se $A \cap B = A$ se e somente se $A \cup B = B$ se e somente se $A - B = \varnothing$.

(ii) $A \subseteq B \cap C$ se e somente se $A \subseteq B$ e $A \subseteq C$.

(iii) $A - B = (A \cup B) - B = A - (A \cap B)$.

(iv) $A = B$ se e somente se $A \triangle B = \varnothing$.