CIn–UFPE
Teoria Axiomática dos Conjuntos
2008.1
Lista de Exercícios 4
Entrega: 6ª feira, 04/04/2008

Exercise 1 (2.1 (Cap. 3) (1,0)) Seja $n \in \mathbb{N}$. Mostre que não existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n < k < n + 1$.

Exercise 2 (2.2 (Cap. 3) (2,0)) Use o exercício anterior para provar que para todo $m, n \in \mathbb{N}$: se $m < n$, então $m+1 \leq n$. Conclua que $m < n$ implica $m+1 < n+1$ e que portanto o successor $S(n) = n + 1$ define uma função um-para-um em $\mathbb{N}$.

Exercise 3 (2.4 (Cap. 3) (2,0)) Prove para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0, 1$, existe um único $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = (k + 1) + 1$.

Exercise 4 (3.1 (Cap. 3) (2,0)) Seja f uma seqüência infinita de elementos de A, onde A é ordenado por $\prec$. Assuma que $f_n \prec f_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que $n < m$ implica $f(n) \prec f(m)$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$. [*Dica:* Use induÇão sobre m na forma do Exercício 2.11 do livro-texto, com $k = n + 1$.]

Exercise 5 (3.2 (Cap. 3) (3,0)) Seja $(A, \prec)$ um conjunto linearmente ordenado e $p, q \in A$. Dizemos que q é um *sucessor* de p se $p \prec q$ e não existe $r \in A$ tal que $p \prec r \prec q$. Note cada $p \in A$ pode ter no máximo um sucessor. Assuma que $(A, \prec)$ é não-vazio e que tem as seguintes propriedades:

(a) Todo $p \in A$ tem um sucessor.

(b) Todo subconjunto não-vazio de A tem um elemento $\prec$-mínimo.

(c) Se $p \in A$ não for o elemento $\prec$-mínimo de A, então p é um sucessor de algum $q \in A$.

Prove que $(A, \prec)$ é isomorfo a $(\mathbb{N}, <)$. Mostre que a conclusão não necessariamente se sustenta se uma das condições (a)–(c) for omitida.