Teoria dos Conjuntos (Aula 9)

Ruy J. G. B. de Queiroz

Centro de Informática, UFPE

2007.1

Conteúdo

1 Conjuntos Contáveis

Definição

Um conjunto S é countável *se* $|S| = |\mathbb{N}|$. *Um conjunto S é* no máximo *contável se* $|S| \leq |\mathbb{N}|$.

Teorema

Um subconjunto infinito de um conjunto contável é contável.

Demonstração.

Seja A um conjunto contável, e suponha que $B \subseteq A$ seja infinito. Existe uma seqüência um-para-um infinita $\langle a_n \rangle_{n=0}^{\infty}$, cujo contradomínio é A. Seja $b_0 = a_{k_0}$, onde k_0 é o menor k tal que $a_k \in B$. Uma vez que construímos b_n, vamos definir como construir b_{n+1}: $b_{n+1} = a_{k_{n+1}}$, onde k_{n+1} é o menor k tal que $a_k \in B$ e $a_k \neq b_i$ para todo $i \leq n$. Tal k existe pois B é infinito. A existência da seqüência $\langle b_n \rangle_{n=0}^{\infty}$ segue do teorema da recursão. É fácil ver que $B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e que $\langle b_n \rangle_{n=0}^{\infty}$ é um-para-um. Logo, B é contável. $\square$

Corolário

Um conjunto é no máximo contável se e somente se ele for finito ou contável.

Teorema

O contradomínio de uma seqüência infinita $\langle a_n \rangle_{n=0}^{\infty}$ é no máximo contável, i.e., ou finito ou contável. (Em outras palavras, a imagem de um conjunto contável sob qualquer mapeamento é no máximo contável.)

Demonstração.

Por recursão, construimos uma seqüência $\langle b_n \rangle$ (com domínio finito ou infinito) que é um-para-um e tem o mesmo contradomínio que $\langle a_n \rangle_{n=0}^{\infty}$. Seja $b_0 = a_0$. Assumindo que construimos b_n, mostramos como construir b_{n+1}: $b_{n+1} = a_{k_{n+1}}$, onde k_{n+1} é o menor k tal que $a_k \neq b_i$ para todo $i \leq n$. (Caso nenhum tal k exista, então consideramos a seqüência finita $\langle b_i \mid i \leq n \rangle$.) A seqüência $\langle b_i \rangle$ assim construída é um-para-um e seu contradomínio é $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. $\square$

Teorema

A união de dois conjuntos contáveis é um conjunto contável.

Demonstração.

Sejam $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Vamos construir uma seqüência $\langle c_n \rangle_{n=0}^{\infty}$ da seguinte maneira:

$$\begin{cases} c_{2k} &= a_k \\ c_{2k+1} &= b_k \end{cases}$$

Então $A \cup B = \{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, e como esse conjunto é infinito, ele é contável. $\square$

Corolário

A união de um sistema finito de conjuntos contáveis é contável.

Teorema

Se A e B são contáveis, então $A \times B$ é contável.

Corolário

O produto cartesiano de uma quantidade finita de conjuntos contáveis é contável. Conseqüentemente, $\mathbb{N}^m$ é contável, para todo every $m > 0$.

Teorema

Suponha que $\langle A_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ *seja um sistema contável de conjuntos no máximo contáveis, e que* $\langle a_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ *seja um sistema de enumerações de* A_n*; i.e., para cada* $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \langle a_n(k) \mid k \in \mathbb{N} \rangle$ *é uma seqüência infinita, e* $A_n = \{a_n(k) \mid k \in \mathbb{N}\}$*. Então* $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ *é no máximo contável.*

Teorema

Se A for contável, então o conjunto $\mathrm{Seq}(A)$ *se todas as seqüências finitas de elementos de A é contável.*

Corolário

O conjunto de todos os subconjuntos finitos de um conjunto contável é contável.

Teorema

O conjunto de todos os inteiros $\mathbb{Z}$ e o conjunto de todos os números racionais $\mathbb{Q}$ são contáveis.

Teorema

Uma relação de equivalência sobre um conjunto contável tem no máximo uma quantidade contável de classes de equivalência.

Definição

$|A| = \mathbb{N}$ *para todos os conjuntos contáveis A.*
Notação: $\aleph_0$ *(alef-zero) é o símbolo usado para denotar o número cardinal de conjuntos contáveis*

Resumo (Resultados)

(a) $\aleph_0 > n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$;
se $\aleph_0 \geq \kappa$ *para algum cardinal* κ, *então* $\kappa = \aleph_0$ *ou* $\kappa = n$ *para algum* $n \in \mathbb{N}$.

(b) *Se* $|A| = \aleph_0$, $|B| = \aleph_0$, *então* $|A \cup B| = \aleph_0$, $|A \times B| = \aleph_0$.

(c) *Se* $|A| = \aleph_0$, *então* $|\mathrm{Seq}(A)| = \aleph_0$.