

Teoria dos Conjuntos (Aula 8)

Ruy J. G. B. de Queiroz

Centro de Informática, UFPE

2017.1



Conteúdo

*Teoria dos
Conjuntos
(Aula 8)*

Ruy de
Queiroz

Cardinalidade

Conjuntos
Finitos

1 Cardinalidade



Conteúdo

*Teoria dos
Conjuntos
(Aula 8)*

Ruy de
Queiroz

Cardinalidade

Conjuntos
Finitos

1 Cardinalidade

2 Conjuntos Finitos



Teoria dos Conjuntos

Conjuntos Equipotentes

Teoria dos
Conjuntos
(Aula 8)

Ruy de
Queiroz

Cardinalidade

Conjuntos
Finitos

Definição

Os conjuntos A e B são ditos equipotentes (i.e., têm a mesma cardinalidade) se existe uma função injetora f com domínio A e contradomínio B .

Definição

Os conjuntos A e B são ditos equipotentes (i.e., têm a mesma cardinalidade) se existe uma função injetora f com domínio A e contradomínio B .

Notação: $|A| = |B|$.

Teoria dos Conjuntos

Conjuntos Equipotentes

Teoria dos
Conjuntos
(Aula 8)

Ruy de
Queiroz

Cardinalidade

Conjuntos
Finitos

Definição

Os conjuntos A e B são ditos equipotentes (i.e., têm a mesma cardinalidade) se existe uma função injetora f com domínio A e contradomínio B .

Notação: $|A| = |B|$.

Teorema

(a) *A é equipotente a A .*

Teoria dos Conjuntos

Conjuntos Equipotentes

Teoria dos
Conjuntos
(Aula 8)

Ruy de
Queiroz

Cardinalidade

Conjuntos
Finitos

Definição

Os conjuntos A e B são ditos equipotentes (i.e., têm a mesma cardinalidade) se existe uma função injetora f com domínio A e contradomínio B .

Notação: $|A| = |B|$.

Teorema

- (a) *A é equipotente a A .*
- (b) *Se A for equipotente a B , então B é equipotente a A .*

Teoria dos Conjuntos

Conjuntos Equipotentes

Teoria dos
Conjuntos
(Aula 8)

Ruy de
Queiroz

Cardinalidade

Conjuntos
Finitos

Definição

Os conjuntos A e B são ditos equipotentes (i.e., têm a mesma cardinalidade) se existe uma função injetora f com domínio A e contradomínio B .

Notação: $|A| = |B|$.

Teorema

- (a) A é equipotente a A .
- (b) Se A for equipotente a B , então B é equipotente a A .
- (c) Se A for equipotente a B e B for equipotente a C , então A é equipotente a C .



Teoria dos Conjuntos

Cardinalidade (cont.)

Teoria dos
Conjuntos
(Aula 8)

Ruy de
Queiroz

Cardinalidade

Conjuntos
Finitos

Definição

A cardinalidade de A é menor ou igual à cardinalidade de B (notação: $|A| \leq |B|$) se existe um mapeamento injetor de A em B .

Definição

A cardinalidade de A é menor ou igual à cardinalidade de B (notação: $|A| \leq |B|$) se existe um mapeamento injetor de A em B .

Lema

(a) Se $|A| \leq |B|$ e $|A| = |C|$, então $|C| \leq |B|$.

Definição

A cardinalidade de A é menor ou igual à cardinalidade de B (notação: $|A| \leq |B|$) se existe um mapeamento injetor de A em B .

Lema

- (a) Se $|A| \leq |B|$ e $|A| = |C|$, então $|C| \leq |B|$.
- (b) Se $|A| \leq |B|$ e $|B| = |C|$, então $|A| \leq |C|$.

Definição

A cardinalidade de A é menor ou igual à cardinalidade de B (notação: $|A| \leq |B|$) se existe um mapeamento injetor de A em B .

Lema

- (a) Se $|A| \leq |B|$ e $|A| = |C|$, então $|C| \leq |B|$.
- (b) Se $|A| \leq |B|$ e $|B| = |C|$, então $|A| \leq |C|$.
- (c) $|A| \leq |A|$.
- (d) Se $|A| \leq |B|$ e $|B| \leq |C|$, então $|A| \leq |C|$.

Teoria dos Conjuntos

Teorema de Cantor–Bernstein

Teoria dos
Conjuntos
(Aula 8)

Ruy de
Queiroz

Cardinalidade

Conjuntos
Finitos



Felix Bernstein (1878–1956).

Teorema (Cantor–Bernstein)

Se $|X| \leq |Y|$ e $|Y| \leq |X|$, então $|X| = |Y|$.

Às vezes chamado também de:

Teorema (Cantor–Bernstein–Schröder)

Se $|X| \leq |Y|$ e $|Y| \leq |X|$,

devido à contribuição de:



Ernst Schröder (1841–1902).

Teoria dos Conjuntos

Prova do Teorema de Cantor–Bernstein

Teoria dos
Conjuntos
(Aula 8)

Ruy de
Queiroz

Cardinalidade

Conjuntos
Finitos

Demonstração.

Se $|X| \leq |Y|$ então existe uma função injetora f que mapeia X em Y ;



Teoria dos Conjuntos

Prova do Teorema de Cantor–Bernstein

Teoria dos
Conjuntos
(Aula 8)

Ruy de
Queiroz

Cardinalidade

Conjuntos
Finitos

Demonstração.

Se $|X| \leq |Y|$ então existe uma função injetora f que mapeia X em Y ; se $|Y| \leq |X|$ então existe uma função injetora g que mapeia Y em X .

Teoria dos Conjuntos

Prova do Teorema de Cantor–Bernstein

Teoria dos
Conjuntos
(Aula 8)

Ruy de
Queiroz

Cardinalidade

Conjuntos
Finitos

Demonstração.

Se $|X| \leq |Y|$ então existe uma função injetora f que mapeia X em Y ; se $|Y| \leq |X|$ então existe uma função injetora g que mapeia Y em X . Para mostrar que $|X| = |Y|$ temos que dar uma **bijeção** entre X e Y , i.e.

Demonstração.

Se $|X| \leq |Y|$ então existe uma função injetora f que mapeia X em Y ; se $|Y| \leq |X|$ então existe uma função injetora g que mapeia Y em X . Para mostrar que $|X| = |Y|$ temos que dar uma **bijecção** entre X e Y , i.e. uma função injetora que mapeia X sobre Y .

Demonstração.

Se $|X| \leq |Y|$ então existe uma função injetora f que mapeia X em Y ; se $|Y| \leq |X|$ então existe uma função injetora g que mapeia Y em X . Para mostrar que $|X| = |Y|$ temos que dar uma **bijeção** entre X e Y , i.e. uma função injetora que mapeia X sobre Y .

Vamos compor f com g ; a função $g \circ f$ mapeia X em X e é injetora.

Demonstração.

Se $|X| \leq |Y|$ então existe uma função injetora f que mapeia X em Y ; se $|Y| \leq |X|$ então existe uma função injetora g que mapeia Y em X . Para mostrar que $|X| = |Y|$ temos que dar uma **bijecção** entre X e Y , i.e. uma função injetora que mapeia X sobre Y .

Vamos compor f com g ; a função $g \circ f$ mapeia X em X e é injetora. Claramente, $g[f[X]] \subseteq g[Y] \subseteq X$;

Teoria dos Conjuntos

Prova do Teorema de Cantor–Bernstein

Teoria dos
Conjuntos
(Aula 8)

Ruy de
Queiroz

Cardinalidade

Conjuntos
Finitos

Demonstração.

Se $|X| \leq |Y|$ então existe uma função injetora f que mapeia X em Y ; se $|Y| \leq |X|$ então existe uma função injetora g que mapeia Y em X . Para mostrar que $|X| = |Y|$ temos que dar uma **bijecção** entre X e Y , i.e. uma função injetora que mapeia X sobre Y .

Vamos compor f com g ; a função $g \circ f$ mapeia X em X e é injetora. Claramente, $g[f[X]] \subseteq g[Y] \subseteq X$; além do mais, como f e g são injetoras, temos $|X| = |g[f[X]]|$ e $|Y| = |g[Y]|$.

Teoria dos Conjuntos

Prova do Teorema de Cantor–Bernstein

Teoria dos
Conjuntos
(Aula 8)

Ruy de
Queiroz

Cardinalidade

Conjuntos
Finitos

Demonstração.

Se $|X| \leq |Y|$ então existe uma função injetora f que mapeia X em Y ; se $|Y| \leq |X|$ então existe uma função injetora g que mapeia Y em X . Para mostrar que $|X| = |Y|$ temos que dar uma **bijeção** entre X e Y , i.e. uma função injetora que mapeia X sobre Y .

Vamos compor f com g ; a função $g \circ f$ mapeia X em X e é injetora. Claramente, $g[f[X]] \subseteq g[Y] \subseteq X$; além do mais, como f e g são injetoras, temos $|X| = |g[f[X]]|$ e $|Y| = |g[Y]|$. Logo, o teorema segue do lema seguinte fazendo-se $A = X$, $B = g[Y]$ e $A_1 = g[f[X]]$. □



Teoria dos Conjuntos

Lema usado na Prova do Teorema de Cantor–Bernstein

Teoria dos
Conjuntos
(Aula 8)

Ruy de
Queiroz

Cardinalidade

Conjuntos
Finitos

Lema

Se $A_1 \subseteq B \subseteq A$ e $|A_1| = |A|$, então $|B| = |A|$.



Teoria dos Conjuntos

Lema usado na Prova do Teorema de Cantor–Bernstein

Teoria dos
Conjuntos
(Aula 8)

Ruy de
Queiroz

Cardinalidade

Conjuntos
Finitos

Lema

Se $A_1 \subseteq B \subseteq A$ e $|A_1| = |A|$, então $|B| = |A|$.

Demonstração.

Precisamos definir um mapeamento um-para-um de A sobre B .



Teoria dos Conjuntos

Lema usado na Prova do Teorema de Cantor–Bernstein

Teoria dos
Conjuntos
(Aula 8)

Ruy de
Queiroz

Cardinalidade

Conjuntos
Finitos

Lema

Se $A_1 \subseteq B \subseteq A$ e $|A_1| = |A|$, então $|B| = |A|$.

Demonstração.

Precisamos definir um mapeamento um-para-um de A sobre B . Seja f um mapeamento um-para-um de A sobre A_1 (que existe por hipótese).



Teoria dos Conjuntos

Lema usado na Prova do Teorema de Cantor–Bernstein

Teoria dos
Conjuntos
(Aula 8)

Ruy de
Queiroz

Cardinalidade

Conjuntos
Finitos

Lema

Se $A_1 \subseteq B \subseteq A$ e $|A_1| = |A|$, então $|B| = |A|$.

Demonstração.

Precisamos definir um mapeamento um-para-um de A sobre B . Seja f um mapeamento um-para-um de A sobre A_1 (que existe por hipótese). Por recursão, vamos definir duas seqüências de conjuntos:

Teoria dos Conjuntos

Lema usado na Prova do Teorema de Cantor–Bernstein

Teoria dos
Conjuntos
(Aula 8)

Ruy de
Queiroz

Cardinalidade

Conjuntos
Finitos

Lema

Se $A_1 \subseteq B \subseteq A$ e $|A_1| = |A|$, então $|B| = |A|$.

Demonstração.

Precisamos definir um mapeamento um-para-um de A sobre B . Seja f um mapeamento um-para-um de A sobre A_1 (que existe por hipótese). Por recursão, vamos definir duas seqüências de conjuntos:

$A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$ e



Teoria dos Conjuntos

Lema usado na Prova do Teorema de Cantor–Bernstein

Teoria dos
Conjuntos
(Aula 8)

Ruy de
Queiroz

Cardinalidade

Conjuntos
Finitos

Lema

Se $A_1 \subseteq B \subseteq A$ e $|A_1| = |A|$, então $|B| = |A|$.

Demonstração.

Precisamos definir um mapeamento um-para-um de A sobre B . Seja f um mapeamento um-para-um de A sobre A_1 (que existe por hipótese). Por recursão, vamos definir duas seqüências de conjuntos:

$A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$ e

$B_0, B_1, \dots, B_n, \dots$

Teoria dos Conjuntos

Lema usado na Prova do Teorema de Cantor–Bernstein

Teoria dos
Conjuntos
(Aula 8)

Ruy de
Queiroz

Cardinalidade

Conjuntos
Finitos

Lema

Se $A_1 \subseteq B \subseteq A$ e $|A_1| = |A|$, então $|B| = |A|$.

Demonstração.

Precisamos definir um mapeamento um-para-um de A sobre B . Seja f um mapeamento um-para-um de A sobre A_1 (que existe por hipótese). Por recursão, vamos definir duas seqüências de conjuntos:

$A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$ e

$B_0, B_1, \dots, B_n, \dots$

Faça $A_0 = A$ e $B_0 = B$, e para cada n ,

Teoria dos Conjuntos

Lema usado na Prova do Teorema de Cantor–Bernstein

Teoria dos
Conjuntos
(Aula 8)

Ruy de
Queiroz

Cardinalidade

Conjuntos
Finitos

Lema

Se $A_1 \subseteq B \subseteq A$ e $|A_1| = |A|$, então $|B| = |A|$.

Demonstração.

Precisamos definir um mapeamento um-para-um de A sobre B . Seja f um mapeamento um-para-um de A sobre A_1 (que existe por hipótese). Por recursão, vamos definir duas seqüências de conjuntos:

$A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$ e

$B_0, B_1, \dots, B_n, \dots$

Faça $A_0 = A$ e $B_0 = B$, e para cada n ,

(*) $A_{n+1} = f[A_n], \quad B_{n+1} = f[B_n].$

Teoria dos Conjuntos

Lema usado na Prova do Teorema de Cantor–Bernstein

Teoria dos
Conjuntos
(Aula 8)

Ruy de
Queiroz

Cardinalidade

Conjuntos
Finitos

Lema

Se $A_1 \subseteq B \subseteq A$ e $|A_1| = |A|$, então $|B| = |A|$.

Demonstração.

Precisamos definir um mapeamento um-para-um de A sobre B . Seja f um mapeamento um-para-um de A sobre A_1 (que existe por hipótese). Por recursão, vamos definir duas seqüências de conjuntos:

$A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$ e

$B_0, B_1, \dots, B_n, \dots$

Faça $A_0 = A$ e $B_0 = B$, e para cada n ,

(*) $A_{n+1} = f[A_n], \quad B_{n+1} = f[B_n]$.

Como $A_0 \supseteq B_0 \supseteq A_1$, segue de (*), por indução, que para cada n , $A_n \supseteq A_{n+1}$.

Teoria dos Conjuntos

Lema usado na Prova do Teorema de Cantor–Bernstein

Teoria dos
Conjuntos
(Aula 8)

Ruy de
Queiroz

Cardinalidade

Conjuntos
Finitos

Lema

Se $A_1 \subseteq B \subseteq A$ e $|A_1| = |A|$, então $|B| = |A|$.

Demonstração.

Precisamos definir um mapeamento um-para-um de A sobre B . Seja f um mapeamento um-para-um de A sobre A_1 (que existe por hipótese). Por recursão, vamos definir duas seqüências de conjuntos:

$A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$ e

$B_0, B_1, \dots, B_n, \dots$

Faça $A_0 = A$ e $B_0 = B$, e para cada n ,

(*) $A_{n+1} = f[A_n], \quad B_{n+1} = f[B_n]$.

Como $A_0 \supseteq B_0 \supseteq A_1$, segue de (*), por indução, que para cada n , $A_n \supseteq A_{n+1}$. Fazemos, para cada n ,

$C_n = A_n - B_n$, e

Lema

Se $A_1 \subseteq B \subseteq A$ e $|A_1| = |A|$, então $|B| = |A|$.

Demonstração.

Precisamos definir um mapeamento um-para-um de A sobre B . Seja f um mapeamento um-para-um de A sobre A_1 (que existe por hipótese). Por recursão, vamos definir duas seqüências de conjuntos:

$A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$ e

$B_0, B_1, \dots, B_n, \dots$

Faça $A_0 = A$ e $B_0 = B$, e para cada n ,

(*) $A_{n+1} = f[A_n], \quad B_{n+1} = f[B_n]$.

Como $A_0 \supseteq B_0 \supseteq A_1$, segue de (*), por indução, que para cada n , $A_n \supseteq A_{n+1}$. Fazemos, para cada n ,

$C_n = A_n - B_n$, e $C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n, \quad D = A - C$.

Lema

Se $A_1 \subseteq B \subseteq A$ e $|A_1| = |A|$, então $|B| = |A|$.

Demonstração.

Precisamos definir um mapeamento um-para-um de A sobre B . Seja f um mapeamento um-para-um de A sobre A_1 (que existe por hipótese). Por recursão, vamos definir duas seqüências de conjuntos:

$A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$ e

$B_0, B_1, \dots, B_n, \dots$

Faça $A_0 = A$ e $B_0 = B$, e para cada n ,

(*) $A_{n+1} = f[A_n], \quad B_{n+1} = f[B_n]$.

Como $A_0 \supseteq B_0 \supseteq A_1$, segue de (*), por indução, que para cada n , $A_n \supseteq A_{n+1}$. Fazemos, para cada n ,

$C_n = A_n - B_n$, e $C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n, \quad D = A - C$.



Demonstração.

Por (*), temos $f[C_n] = C_{n+1}$, portanto

Demonstração.

Por (*), temos $f[C_n] = C_{n+1}$, portanto
 $f[C] = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$.

Demonstração.

Por (*), temos $f[C_n] = C_{n+1}$, portanto

$$f[C] = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Resta-nos definir um mapeamento um-para-um de A sobre B .

Demonstração.

Por (*), temos $f[C_n] = C_{n+1}$, portanto

$$f[C] = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Resta-nos definir um mapeamento um-para-um de A sobre B .

$$\begin{cases} f(x) & \text{se } x \in C; \\ \end{cases}$$

Demonstração.

Por (*), temos $f[C_n] = C_{n+1}$, portanto

$$f[C] = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Resta-nos definir um mapeamento um-para-um de A sobre B .

$$\begin{cases} f(x) & \text{se } x \in C; \\ x & \text{se } x \in D. \end{cases}$$

Demonstração.

Por (*), temos $f[C_n] = C_{n+1}$, portanto

$$f[C] = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Resta-nos definir um mapeamento um-para-um de A sobre B .

$$\begin{cases} f(x) & \text{se } x \in C; \\ x & \text{se } x \in D. \end{cases}$$

A restrição de g a C e a D (i.e. $g \upharpoonright C$ e $g \upharpoonright D$) são funções um-para-um, e seus contradomínios são disjuntos.

Demonstração.

Por (*), temos $f[C_n] = C_{n+1}$, portanto

$$f[C] = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Resta-nos definir um mapeamento um-para-um de A sobre B .

$$\begin{cases} f(x) & \text{se } x \in C; \\ x & \text{se } x \in D. \end{cases}$$

A restrição de g a C e a D (i.e. $g \upharpoonright C$ e $g \upharpoonright D$) são funções um-para-um, e seus contradomínios são disjuntos. Logo, g é uma função um-para-um e mapeia A sobre

$$f[C] \cup D = B.$$



Teoria dos Conjuntos

Suposição de Existência de Cardinais

Teoria dos
Conjuntos
(Aula 8)

Ruy de
Queiroz

Cardinalidade

Conjuntos
Finitos

Suposição

Existem conjuntos chamados de números cardinais (ou simplesmente cardinais) com a propriedade de que para todo conjunto X existe um único cardinal $|X|$ (o número cardinal de X , a cardinalidade de X) e conjuntos X e Y são equipotentes se e somente se $|X|$ for igual a $|Y|$.



Teoria dos Conjuntos

Conjuntos Finitos

Teoria dos
Conjuntos
(Aula 8)

Ruy de
Queiroz

Cardinalidade

Conjuntos
Finitos

Definição

Um conjunto S é finito se ele for equipotente a algum número natural $n \in \mathbb{N}$. Definimos então $|S| = n$ e dizemos que S tem n elementos. Um conjunto é infinito se ele não for finito.



Teoria dos Conjuntos

Conjuntos Finitos

Teoria dos
Conjuntos
(Aula 8)

Ruy de
Queiroz

Cardinalidade

Conjuntos
Finitos

Definição

Um conjunto S é finito se ele for equipotente a algum número natural $n \in \mathbb{N}$. Definimos então $|S| = n$ e dizemos que S tem n elementos. Um conjunto é infinito se ele não for finito.

Lema

Se $n \in \mathbb{N}$, então não existe mapeamento um-para-um de n sobre um subconjunto próprio $X \subset n$.



Teoria dos Conjuntos

Conjuntos Infinitos

Teoria dos
Conjuntos
(Aula 8)

Ruy de
Queiroz

Cardinalidade

Conjuntos
Finitos

Corolário

(a) *Se $n \neq m$, então não existe mapeamento um-para-um de n sobre m .*

Corolário

- (a) *Se $n \neq m$, então não existe mapeamento um-para-um de n sobre m .*
- (b) *Se $|S| = n$ e $|S| = m$, então $n = m$.*

Corolário

- (a) *Se $n \neq m$, então não existe mapeamento um-para-um de n sobre m .*
- (b) *Se $|S| = n$ e $|S| = m$, então $n = m$.*
- (c) *$\mathbb{N}$ é infinito.*

Corolário

- (a) *Se $n \neq m$, então não existe mapeamento um-para-um de n sobre m .*
- (b) *Se $|S| = n$ e $|S| = m$, então $n = m$.*
- (c) *$\mathbb{N}$ é infinito.*

Teorema

Se X for um conjunto finito e $Y \subseteq X$, então Y é finito. Além do mais, $|Y| \leq |X|$.



Teoria dos Conjuntos

Prova do Teorema

Teoria dos
Conjuntos
(Aula 8)

Ruy de
Queiroz

Cardinalidade

Conjuntos
Finitos

Demonstração.

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $X = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$, onde $\langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle$ é uma seqüência um-para-um,



Teoria dos Conjuntos

Prova do Teorema

Teoria dos
Conjuntos
(Aula 8)

Ruy de
Queiroz

Cardinalidade

Conjuntos
Finitos

Demonstração.

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $X = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$, onde $\langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle$ é uma seqüência um-para-um, e que Y não é vazio. Para mostrar que Y é finito, vamos construir uma seqüência finita um-para-um cujo contradomínio é Y .



Teoria dos Conjuntos

Prova do Teorema

Teoria dos
Conjuntos
(Aula 8)

Ruy de
Queiroz

Cardinalidade

Conjuntos
Finitos

Demonstração.

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $X = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$, onde $\langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle$ é uma seqüência um-para-um, e que Y não é vazio. Para mostrar que Y é finito, vamos construir uma seqüência finita um-para-um cujo contradomínio é Y . Usamos o teorema da recursão em uma de suas variações (Exercício 3.5, Cap. 3).

Demonstração.

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $X = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$, onde $\langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle$ é uma seqüência um-para-um, e que Y não é vazio. Para mostrar que Y é finito, vamos construir uma seqüência finita um-para-um cujo contradomínio é Y . Usamos o teorema da recursão em uma de suas variações (Exercício 3.5, Cap. 3).

k_0 = o menor k tal que $x_k \in Y$;

Demonstração.

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $X = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$, onde $\langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle$ é uma seqüência um-para-um, e que Y não é vazio. Para mostrar que Y é finito, vamos construir uma seqüência finita um-para-um cujo contradomínio é Y . Usamos o teorema da recursão em uma de suas variações (Exercício 3.5, Cap. 3).

k_0 = o menor k tal que $x_k \in Y$;

k_{i+1} = o menor k tal que $k > k_i, k < n$,
e $x_k \in Y$ (se tal k existe).

Demonstração.

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $X = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$, onde $\langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle$ é uma seqüência um-para-um, e que Y não é vazio. Para mostrar que Y é finito, vamos construir uma seqüência finita um-para-um cujo contradomínio é Y . Usamos o teorema da recursão em uma de suas variações (Exercício 3.5, Cap. 3).

k_0 = o menor k tal que $x_k \in Y$;

k_{i+1} = o menor k tal que $k > k_i$, $k < n$,
e $x_k \in Y$ (se tal k existe).

Isso define uma seqüência $\langle k_0, \dots, k_{m-1} \rangle$.

Demonstração.

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $X = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$, onde $\langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle$ é uma seqüência um-para-um, e que Y não é vazio. Para mostrar que Y é finito, vamos construir uma seqüência finita um-para-um cujo contradomínio é Y . Usamos o teorema da recursão em uma de suas variações (Exercício 3.5, Cap. 3).

k_0 = o menor k tal que $x_k \in Y$;

k_{i+1} = o menor k tal que $k > k_i, k < n$,
e $x_k \in Y$ (se tal k existe).

Isso define uma seqüência $\langle k_0, \dots, k_{m-1} \rangle$. Quando fazemos $y_i = x_{k_i}$ para todo $i < m$, então $Y = \{y_i \mid i < m\}$.

Demonstração.

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $X = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$, onde $\langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle$ é uma seqüência um-para-um, e que Y não é vazio. Para mostrar que Y é finito, vamos construir uma seqüência finita um-para-um cujo contradomínio é Y . Usamos o teorema da recursão em uma de suas variações (Exercício 3.5, Cap. 3).

k_0 = o menor k tal que $x_k \in Y$;

k_{i+1} = o menor k tal que $k > k_i, k < n$,
e $x_k \in Y$ (se tal k existe).

Isso define uma seqüência $\langle k_0, \dots, k_{m-1} \rangle$. Quando fazemos $y_i = x_{k_i}$ para todo $i < m$, então $Y = \{y_i \mid i < m\}$.

Precisamos verificar que $m \leq n$ (por indução, $k_i \geq i$ sempre que definido, portanto, em particular, $m - 1 \leq k_{m-1} \leq n - 1$).



Teoria dos Conjuntos

Cardinalidade de Conjuntos Finitos (cont.)

Teoria dos
Conjuntos
(Aula 8)

Ruy de
Queiroz

Cardinalidade

Conjuntos
Finitos

Teorema

Se X for um conjunto finito e f for uma função, então $f[X]$ é finito.

Teoria dos Conjuntos

Cardinalidade de Conjuntos Finitos (cont.)

Teoria dos
Conjuntos
(Aula 8)

Ruy de
Queiroz

Cardinalidade

Conjuntos
Finitos

Teorema

Se X for um conjunto finito e f for uma função, então $f[X]$ é finito. Além do mais, $|f[X]| \leq |X|$.

Teoria dos Conjuntos

Cardinalidade de Conjuntos Finitos (cont.)

Teoria dos
Conjuntos
(Aula 8)

Ruy de
Queiroz

Cardinalidade

Conjuntos
Finitos

Teorema

Se X for um conjunto finito e f for uma função, então $f[X]$ é finito. Além do mais, $|f[X]| \leq |X|$.

Lema

Se X e Y forem finitos, então $X \cup Y$ é finito.

Teoria dos Conjuntos

Cardinalidade de Conjuntos Finitos (cont.)

Teoria dos
Conjuntos
(Aula 8)

Ruy de
Queiroz

Cardinalidade

Conjuntos
Finitos

Teorema

Se X for um conjunto finito e f for uma função, então $f[X]$ é finito. Além do mais, $|f[X]| \leq |X|$.

Lema

Se X e Y forem finitos, então $X \cup Y$ é finito. Além do mais, $|X \cup Y| \leq |X| + |Y|$, e se X e Y forem disjuntos, então $|X \cup Y| = |X| + |Y|$.



Teoria dos Conjuntos

Cardinalidade de Conjuntos Finitos (cont.)

Teoria dos
Conjuntos
(Aula 8)

Ruy de
Queiroz

Cardinalidade

Conjuntos
Finitos

Teorema

Se S for finito e se todo $X \in S$ for finito, então $\bigcup S$ é finito.



Teoria dos Conjuntos

Cardinalidade de Conjuntos Finitos (cont.)

Teoria dos
Conjuntos
(Aula 8)

Ruy de
Queiroz

Cardinalidade

Conjuntos
Finitos

Teorema

Se S for finito e se todo $X \in S$ for finito, então $\bigcup S$ é finito.

Teorema

Se X for finito, então $\mathcal{P}(X)$ é finito.



Teoria dos Conjuntos

Prova do Teorema da Finitude do Conjunto das Partes de um Conjunto Finito

Teoria dos
Conjuntos
(Aula 8)

Ruy de
Queiroz

Cardinalidade

Conjuntos
Finitos

Demonstração.

Precisamos provar que para todo $n \in \mathbb{N}$, se $|X| = n$ então existe algum $m \in \mathbb{N}$ tal que $|\mathcal{P}(X)| = m$.

Demonstração.

Precisamos provar que para todo $n \in \mathbb{N}$, se $|X| = n$ então existe algum $m \in \mathbb{N}$ tal que $|\mathcal{P}(X)| = m$. Podemos fazer isso por indução sobre n .

Demonstração.

Precisamos provar que para todo $n \in \mathbb{N}$, se $|X| = n$ então existe algum $m \in \mathbb{N}$ tal que $|\mathcal{P}(X)| = m$. Podemos fazer isso por indução sobre n . (Caso Base) ($n = 0$) Se $|X| = 0$, i.e. $X = \emptyset$, então $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$, que é finito.

Demonstração.

Precisamos provar que para todo $n \in \mathbb{N}$, se $|X| = n$ então existe algum $m \in \mathbb{N}$ tal que $|\mathcal{P}(X)| = m$. Podemos fazer isso por indução sobre n . (Caso Base) ($n = 0$) Se $|X| = 0$, i.e. $X = \emptyset$, então $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$, que é finito. (Passo Indutivo) Assuma que para $|X| = n$ o conjunto $\mathcal{P}(X)$ seja finito (i.e. existe algum $m \in \mathbb{N}$ t.q. $|\mathcal{P}(X)| = m$).

Demonstração.

Precisamos provar que para todo $n \in \mathbb{N}$, se $|X| = n$ então existe algum $m \in \mathbb{N}$ tal que $|\mathcal{P}(X)| = m$. Podemos fazer isso por indução sobre n . (Caso Base) ($n = 0$) Se $|X| = 0$, i.e. $X = \emptyset$, então $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$, que é finito. (Passo Indutivo) Assuma que para $|X| = n$ o conjunto $\mathcal{P}(X)$ seja finito (i.e. existe algum $m \in \mathbb{N}$ t.q. $|\mathcal{P}(X)| = m$). Seja Y um conjunto com $n + 1$ elementos:

Demonstração.

Precisamos provar que para todo $n \in \mathbb{N}$, se $|X| = n$ então existe algum $m \in \mathbb{N}$ tal que $|\mathcal{P}(X)| = m$. Podemos fazer isso por indução sobre n . (Caso Base) ($n = 0$) Se $|X| = 0$, i.e. $X = \emptyset$, então $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$, que é finito. (Passo Indutivo) Assuma que para $|X| = n$ o conjunto $\mathcal{P}(X)$ seja finito (i.e. existe algum $m \in \mathbb{N}$ t.q. $|\mathcal{P}(X)| = m$). Seja Y um conjunto com $n + 1$ elementos: $Y = \{y_0, \dots, y_n\}$.

Demonstração.

Precisamos provar que para todo $n \in \mathbb{N}$, se $|X| = n$ então existe algum $m \in \mathbb{N}$ tal que $|\mathcal{P}(X)| = m$. Podemos fazer isso por indução sobre n . (Caso Base) ($n = 0$) Se $|X| = 0$, i.e. $X = \emptyset$, então $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$, que é finito. (Passo Indutivo) Assuma que para $|X| = n$ o conjunto $\mathcal{P}(X)$ seja finito (i.e. existe algum $m \in \mathbb{N}$ t.q. $|\mathcal{P}(X)| = m$). Seja Y um conjunto com $n + 1$ elementos: $Y = \{y_0, \dots, y_n\}$. Também, faça $X = \{y_0, \dots, y_{n-1}\}$.

Demonstração.

Precisamos provar que para todo $n \in \mathbb{N}$, se $|X| = n$ então existe algum $m \in \mathbb{N}$ tal que $|\mathcal{P}(X)| = m$. Podemos fazer isso por indução sobre n . (Caso Base) ($n = 0$) Se $|X| = 0$, i.e. $X = \emptyset$, então $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$, que é finito. (Passo Indutivo) Assuma que para $|X| = n$ o conjunto $\mathcal{P}(X)$ seja finito (i.e. existe algum $m \in \mathbb{N}$ t.q. $|\mathcal{P}(X)| = m$). Seja Y um conjunto com $n + 1$ elementos: $Y = \{y_0, \dots, y_n\}$. Também, faça $X = \{y_0, \dots, y_{n-1}\}$. Note que $\mathcal{P}(Y) = \mathcal{P}(X) \cup U$ onde $U = \{u \mid u \subseteq Y \text{ e } y_n \in u\}$.

Demonstração.

Precisamos provar que para todo $n \in \mathbb{N}$, se $|X| = n$ então existe algum $m \in \mathbb{N}$ tal que $|\mathcal{P}(X)| = m$. Podemos fazer isso por indução sobre n . (Caso Base) ($n = 0$) Se $|X| = 0$, i.e. $X = \emptyset$, então $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$, que é finito. (Passo Indutivo) Assuma que para $|X| = n$ o conjunto $\mathcal{P}(X)$ seja finito (i.e. existe algum $m \in \mathbb{N}$ t.q. $|\mathcal{P}(X)| = m$). Seja Y um conjunto com $n + 1$ elementos: $Y = \{y_0, \dots, y_n\}$. Também, faça $X = \{y_0, \dots, y_{n-1}\}$. Note que $\mathcal{P}(Y) = \mathcal{P}(X) \cup U$ onde $U = \{u \mid u \subseteq Y \text{ e } y_n \in u\}$. Note também que $|U| = |\mathcal{P}(X)|$ porque existe um mapeamento um-para-um de U sobre $\mathcal{P}(X)$:

Demonstração.

Precisamos provar que para todo $n \in \mathbb{N}$, se $|X| = n$ então existe algum $m \in \mathbb{N}$ tal que $|\mathcal{P}(X)| = m$. Podemos fazer isso por indução sobre n . (Caso Base) ($n = 0$) Se $|X| = 0$, i.e. $X = \emptyset$, então $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$, que é finito. (Passo Indutivo) Assuma que para $|X| = n$ o conjunto $\mathcal{P}(X)$ seja finito (i.e. existe algum $m \in \mathbb{N}$ t.q. $|\mathcal{P}(X)| = m$). Seja Y um conjunto com $n + 1$ elementos: $Y = \{y_0, \dots, y_n\}$. Também, faça $X = \{y_0, \dots, y_{n-1}\}$. Note que $\mathcal{P}(Y) = \mathcal{P}(X) \cup U$ onde $U = \{u \mid u \subseteq Y \text{ e } y_n \in u\}$. Note também que $|U| = |\mathcal{P}(X)|$ porque existe um mapeamento um-para-um de U sobre $\mathcal{P}(X)$: $f(u) = u - \{y_n\}$ para todo $u \in U$.

Demonstração.

Precisamos provar que para todo $n \in \mathbb{N}$, se $|X| = n$ então existe algum $m \in \mathbb{N}$ tal que $|\mathcal{P}(X)| = m$. Podemos fazer isso por indução sobre n . (Caso Base) ($n = 0$) Se $|X| = 0$, i.e. $X = \emptyset$, então $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$, que é finito. (Passo Indutivo) Assuma que para $|X| = n$ o conjunto $\mathcal{P}(X)$ seja finito (i.e. existe algum $m \in \mathbb{N}$ t.q. $|\mathcal{P}(X)| = m$). Seja Y um conjunto com $n + 1$ elementos: $Y = \{y_0, \dots, y_n\}$. Também, faça $X = \{y_0, \dots, y_{n-1}\}$. Note que $\mathcal{P}(Y) = \mathcal{P}(X) \cup U$ onde $U = \{u \mid u \subseteq Y \text{ e } y_n \in u\}$. Note também que $|U| = |\mathcal{P}(X)|$ porque existe um mapeamento um-para-um de U sobre $\mathcal{P}(X)$: $f(u) = u - \{y_n\}$ para todo $u \in U$. Logo, $\mathcal{P}(Y)$ é uma união de dois conjuntos finitos, portanto finito. □



Teoria dos Conjuntos

Conjuntos Infinitos

Teoria dos
Conjuntos
(Aula 8)

Ruy de
Queiroz

Cardinalidade

Conjuntos
Finitos

Teorema

Se X for infinito, então $|X| > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.