Teoria dos Conjuntos (Aula 7)

Ruy J. G. B. de Queiroz

Centro de Informática, UFPE

2007.1

Conteúdo

Teorema

Existe uma única função $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

(a) $+(m, 0) = m$ *para todo* $m \in \mathbb{N}$

(b) $+(m, n+1) = +(m, n) + 1$ *para todos* $m, n \in \mathbb{N}$.

Demonstração.

Use a versão 'paramétrica' do Teorema da Recursão: seja $A = P = \mathbb{N}$, $a(p) = p$ para todo $p \in \mathbb{N}$ e $g(p, x, n) = x + 1$ para todos $p, x, n \in \mathbb{N}$. $\square$

Teorema

Adição é comutativa; ou seja, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$m + n = n + m.$$

Demonstração.

Defina 'n comuta' por '$m + n = n + m$ para todo $m \in \mathbb{N}$'.
Vamos usar indução sobre n para provar que para $n \in \mathbb{N}$, n comuta.
(Caso Base) $n = 0$. Precisamos mostrar que $m + 0 = 0 + m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Use indução sobre m.
(Caso Indutivo) Assuma que n comuta, e prove que $n + 1$ comuta. Use indução sobre m para mostrar que
$m + (n + 1) = (n + 1) + m \quad$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Base) $m = 0$

dutivo) Assuma que se dá para m, e prove que também se dá para $m + 1$.

$$\begin{aligned}
(m+1)+(n+1) &= ((m+1)+n)+1 && \text{pela def. de} \\
&= (n+(m+1))+1 && \text{pois } n\text{comut} \\
&= ((n+m)+1)+1 && \text{pela def. de}
\end{aligned}$$

Teorema

Existe uma única função $\cdot$ (multiplicação) $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{cases} m \cdot 0 & = & 0 & \text{para todo } m \in \mathbb{N} \\ m \cdot (n+1) & = & m \cdot n + m & \text{para todos } m, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Teorema

Existe uma única função de exponenciação al que

$$\begin{cases} m^0 = 1 & \textit{para todo } m \in \mathbb{N} \\ m^{n+1} = m^n \cdot m & \textit{para todos } m, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$