Teoria dos Conjuntos (Aula 6)

Ruy J. G. B. de Queiroz

Centro de Informática, UFPE

2007.1

Conteúdo

Definição

Uma seqüência *é uma função cujo domíno é um número natural ou $\mathbb{N}$. Uma seqüência cujo domínio é algum número natural $n \in \mathbb{N}$ é chamada de* seqüência finita de comprimento n *e é representada por*

$$\langle a_i \mid i < n \rangle \text{ ou } \langle a_i \mid i = 0, 1, \ldots, n-1 \rangle \text{ ou } \langle a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle.$$

$\mathrm{Seq}(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$ *denota o conjunto de todas as seqüências finitas de elementos de A.*
Se o domínio de uma seqüência é $\mathbb{N}$, chamamo-la de seqüência infinita *e denotamo-la*

$$\langle a_i \mid i \in \mathbb{N} \rangle \quad \text{ou} \quad \langle a_i \mid i = 0, 1, 2, \ldots \rangle \quad \text{ou} \quad \langle a_i \rangle_{i=0}^{\infty}.$$

Exemplo

(a) *A seqüência s* $: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *é definida por*

$$\begin{aligned} s_0 &= 1; \\ s_{n+1} &= n^2 \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

(b) *A seqüência f* $: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *é definida por*

$$\begin{aligned} f_0 &= 1; \\ f_{n+1} &= f_n \times (n+1) \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Enquanto que a definição de s é explícita, *i.e. podemos computar* s_x *para qualquer* $x \in \mathbb{N}$ *sem ter que saber os valores de* s_i *para algum* i *diferente de* x.

Exemplo

Mais precisamente, podemos formular uma propriedade **P** *tal que*

$$s_x = y \quad \textit{se e somente se} \quad \mathbf{P}(x, y);$$

a saber, "ou $x = 0$ *e* $y = 1$ *ou, para algum* $n \in \mathbb{N}$*,* $x = n + 1$ *e* $y = n^2$*." A existência e a unicidade da seqüência* s *satisfazendo (a) segue de nossos axiomas:*

$$s = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \mathbf{P}(x, y)\}.$$

Por outro lado, a definição de f *nos diz como calcular* f_i dado *que temos* f_{i-1}*. Não é tão óbvio como formular uma propriedade* **P** *sem mencionar a própria* f *tal que*

$$f_x = y \quad \textit{se e somente se} \quad \mathbf{P}(x, y).$$

Teorema (Recursão)

Para qualquer conjunto A, qualquer $a \in A$, e qualquer função $g : A \times \mathbb{N} \to A$, existe uma única seqüência infinita $f : \mathbb{N} \to A$ tal que

(a) $f_0 = a$;

(b) $f_{n+1} = g(f_n, n)$ *for all* $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração.

Precisamos provar *existência* e *unicidade* da função $f : \mathbb{N} \to A$. Na verdade, temos que dar uma definição explícita de f, i.e. uma definição de f em termos de outras funções existentes. $\square$

Definição

Uma função $t : (m+1) \rightarrow A$ é chamada de uma computação de m-passos baseada em a e g *se*

(i) $t_0 = a$, *e,*

(ii) *para todo k tal que $0 \leq k < m$, $t_{k+1} = g(t_k, k)$.*

Note que $t \subseteq \mathbb{N} \times A$. Seja
$F = \{t \in \mathcal{P}(\mathbb{N} \times A) \mid t$ *é uma computação de m-passos para algum número natural n*$\}$.
Faça $f = \bigcup F$.

Afirmação

f é uma função.

Demonstração.

Basta mostrar que o sistema de funções F é compatível. Portanto, suponha que $t, u \in F$, $\operatorname{dom} t = n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{dom} u = m \in \mathbb{N}$. Assuma, sem perda de generalidade, que $n \leq m$; então $n \subseteq m$, e basta basta mostrar que $t_k = u_k$ para todo $k < n$. Podemos fazer isso por indução (Exercício 2.12). Obviamente, $t_0 = a = u_0$. A seguir, suponha que k seja tal que $k + 1 < n$, e assuma que $t_k = u_k$. Então $t_{k+1} = g(t_k, k) = g(u_k, k) = u_{k+1}$. Daí $t_k = u_k$ para todo $k < n$. $\square$

Afirmação

$\operatorname{dom} f = \mathbb{N}; \quad \operatorname{ran} f \subseteq A.$

Afirmação

f satisfaz as condições (a) e (b) do Teorema da Recursão.

Teorema

Seja $(A, \prec)$ um conjunto não-vazio linearmente ordenado com as seguintes propriedades:

(a) *Para todo $p \in A$, existe $q \in A$ tal que $q \succ p$.*

(b) *Todo subconjunto não-vazio de A tem um $\prec$-mínimo.*

(c) *Todo subconjunto não-vazio de A que tem um limitante superior tem um $\prec$-máximo.*

Então $(A, \prec)$ é isomorfo a $(\mathbb{N}, <)$.

Demonstração.

Temos que definir um isomorfismo de $(A, \prec)$ para $(\mathbb{N}, <)$ (ou vice-versa). Usando o Teorema da Recursão podemos construir um isomorfismo f da seguinte maneira. Seja a o menor elemento de A (a existe pois $(A, \prec)$ é uma ordenação linear). Agora suponha que a função $g(x, n)$ nos dá o menor elemento de A que é maior que x (para qualquer n). Então $a \in A$ e g é uma funcão t.q.
$g : A \times \mathbb{N} \to A$
Deve estar claro que g está definida para qualquer $x \in A$, dadas as hipóteses (a) e (b) do teorema, e não depende de n. $\square$

Continuação.

O Teorema da Recursão garante a existência (e a unicidade) de uma função $f : \mathbb{N} \to A$ tal que

$$\begin{cases} f_0 = a = \text{ o menor elemento de } A. \\ f_{n+1} = g(f_n, n) = \text{ o menor elemento de } A \text{ maior que } f_n. \end{cases}$$

Deve estar óbvio que $f_n \prec f_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Usando indução podemos provar que $f_n \prec f_m$ sempre que $n < m$. Portanto, f é uma função um-para-um. Agora, para que f seja um isomorfismo é preciso que seja sobrejetora em A, i.e. o contradomínio de f tem que ser A. $\square$

Continuação.

Suponha, para efeito de derivar uma contradição, que o contradomínio de f não está em A, i.e. $A - \mathrm{ran}\, f \neq \emptyset$; seja p o menor elemento de tal conjunto. O conjunto $B = \{q \in A \mid q \prec p\}$ tem p como um dos seus limitantes superiores, e é não-vazio (caso contrário, p seria o menor elemento de A, mas aí $p = f_0$). Seja q o maior elemento de B, que tem que existir por hipótese ((c) do teorema). Como $p \prec q$, obtemos que $q = f_m$ para algum $m \in \mathbb{N}$. Entretanto, é imediato ver que p é o menor elemento de A que é maior que q. Daí, $p = f_{m+1}$ pela condição recursiva da definição de f. Logo, $p \in \mathrm{ran}\, f$, uma contradição. $\square$

Observação

Em alguns some casos o valor de uma função f num ponto $n + 1$ pode depender não apenas do ponto anterior (i.e. n), mas em alguns outros pontos $k < n$. (Exemplo: a seqüência de Fibonacci.)

Teorema

Para qualquer conjunto S e qualquer função $g : \mathrm{Seq}(S) \to S$ existe uma única seqüência $f : \mathbb{N} \to S$ tal que
$f_n = g(f \restriction n) = g(\langle f_0, \ldots, f_{n-1} \rangle)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
(Em particular, $f_0 = g(f \restriction 0) = g(\langle\rangle) = g(\emptyset)$.)

Exemplo

A seqüência de Fibonacci:

$$g(s) = \begin{cases} 1 & \textit{se } s \textit{ é uma seqüência finita de comprimento } 0 \\ s_{n-1} + s_{n-2} & \textit{se } s \textit{ é uma seqüência finita de comprimento } n \end{cases}$$

Demonstração.

Vamos usar o Teorema da Recursão para definir a seqüência $\langle F_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle = \langle f \upharpoonright n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$.
Aqui vai:

$$\begin{cases} F_0 & = & \langle\rangle; \\ F_{n+1} & = & F_n \cup \{\langle n, g(F_n) \rangle\} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$\square$

Continuação.

O Teorema da Recursão garante que a seqüência $\langle F_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ existe, se fizermos $A = \mathrm{Seq}(S)$, $a = \langle\rangle$, e $G : A \times \mathbb{N} \to A$ tal que

$$G(s, n) = \begin{cases} s \cup \{\langle n, g(s) \rangle\} & \text{se } s \text{ é uma seqüência de comprim} \\ \langle\rangle & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Agora, podemos provar por indução sobre n que F_n pertence a S^n, e que $F_n \subseteq F_{n+1}$ for all $n \in \mathbb{N}$. Daí, $\{F_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ é um sistema compatível de funções. Seja $f = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$; então, f é uma função de $\mathbb{N}$ para S e $f \restriction n = F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$; portanto $f_n = F_{n+1}(n) = g(F_n) = g(f \restriction n)$, como desejávamos. $\square$

Teorema

Sejam $a : P \to A$ e $g : P \times A \times \mathbb{N} \to A$ funções. Existe uma única função $f : P \times \mathbb{N} \to A$ tal que

(a) $f(p, 0) = a(p)$ *para todo* $p \in P$;

(b) $f(p, n+1) = g(p, f(p, n), n)$ *para todos* $n \in \mathbb{N}$ *e* $p \in P$.

Demonstração.

Essa é uma versão 'generalizada' ou 'paramétrica' do Teorema da Recursão. Defina uma computação de m-passos como sendo uma função $t : P \times (m+1) \to A$ tal que, para todo $p \in P$,

$$\begin{cases} t(p,0) & = & a(p) \\ t(p,k+1) & = & g(p,t(p,k),k) \end{cases}$$

para todo k tal que $0 \leq k < m$. O restante é o mesmo que na prova do Teorema da Recursão, exceto que o parâmetro p é levado junto. $\square$