Teoria dos Conjuntos (Aula 5)

Ruy J. G. B. de Queiroz

Centro de Informática, UFPE

2009.1

Conteúdo

Conteúdo

Definição

O successor *de um conjunto x é o conjunto* $S(x) = x \cup \{x\}$.

Definição

O successor *de um conjunto x é o conjunto* $S(x) = x \cup \{x\}$.

Definição

Um conjunto I é chamado de indutivo *se*

Teoria dos Conjuntos (Aula 5)
Ruy de Queiroz
Números Naturais
Propriedades dos Números Naturais

Definição

O successor *de um conjunto x é o conjunto* $S(x) = x \cup \{x\}$.

Definição

Um conjunto I é chamado de indutivo *se*

(a) $0 \in I$.

Definição

O successor *de um conjunto x é o conjunto $S(x) = x \cup \{x\}$.*

Definição

Um conjunto I é chamado de indutivo *se*

(a) $0 \in I$.

(b) *Se $n \in I$, então $(n+1) \in I$.*

Definição

O conjunto de todos os números naturais *é o conjunto*

Definição

O conjunto de todos os números naturais *é o conjunto* $\mathbb{N} = \{x \mid x \in I \text{ para todo conjunto indutivo } I\}$.

Definição

O conjunto de todos os números naturais *é o conjunto* $\mathbb{N} = \{x \mid x \in I \text{ para todo conjunto indutivo } I\}$.
Os elementos de $\mathbb{N}$ *são chamados de* números naturais.

Definição

O conjunto de todos os números naturais *é o conjunto* $\mathbb{N} = \{x \mid x \in I$ *para todo conjunto indutivo* $I\}$.
Os elementos de $\mathbb{N}$ *são chamados de* números naturais.
Portanto, um conjunto x é um número natural se e somente se ele pertence a todo conjunto indutivo.

Definição

O conjunto de todos os números naturais *é o conjunto* $\mathbb{N} = \{x \mid x \in I$ *para todo conjunto indutivo* $I\}$.
Os elementos de $\mathbb{N}$ *são chamados de* números naturais.
Portanto, um conjunto x é um número natural se e somente se ele pertence a todo conjunto indutivo.

Justificativa (Existência de $\mathbb{N}$)

Suponha que A seja um conjunto indutivo qualquer;

Definição

O conjunto de todos os números naturais *é o conjunto* $\mathbb{N} = \{x \mid x \in I \text{ para todo conjunto indutivo } I\}$.
Os elementos de $\mathbb{N}$ *são chamados de* números naturais.
Portanto, um conjunto x é um número natural se e somente se ele pertence a todo conjunto indutivo.

Justificativa (Existência de $\mathbb{N}$)

Suponha que A seja um conjunto indutivo qualquer; então claramente

Definição

O conjunto de todos os números naturais *é o conjunto* $\mathbb{N} = \{x \mid x \in I$ *para todo conjunto indutivo* $I\}$.
Os elementos de $\mathbb{N}$ *são chamados de* números naturais.
Portanto, um conjunto x é um número natural se e somente se ele pertence a todo conjunto indutivo.

Justificativa (Existência de $\mathbb{N}$)

Suponha que A seja um conjunto indutivo qualquer; então claramente
$\mathbb{N} = \{x \in A \mid x \in I$ *para todo conjunto indutivo* $I\}$.

Definição

O conjunto de todos os números naturais *é o conjunto* $\mathbb{N} = \{x \mid x \in I$ *para todo conjunto indutivo* $I\}$.
Os elementos de $\mathbb{N}$ *são chamados de* números naturais.
Portanto, um conjunto x é um número natural se e somente se ele pertence a todo conjunto indutivo.

Justificativa (Existência de $\mathbb{N}$)

Suponha que A seja um conjunto indutivo qualquer; então claramente
$\mathbb{N} = \{x \in A \mid x \in I$ *para todo conjunto indutivo* $I\}$.
Então, pelo Axioma da Compreensão, $\mathbb{N}$ *existe e é único, desde que um conjunto indutivo exista.*

Pergunta

Existe algum conjunto indutivo?

Pergunta

Existe algum conjunto indutivo?

Axioma (Infinitude)

Existe um conjunto indutivo.

Lema

$\mathbb{N}$ é indutivo. Se I for um conjunto indutivo qualquer, então $\mathbb{N} \subseteq I$.

Lema

$\mathbb{N}$ é indutivo. Se I for um conjunto indutivo qualquer, então $\mathbb{N} \subseteq I$.

Demonstração.

$0 \in \mathbb{N}$, pois $0 \in I$ para qualquer indutivo I.

Lema

$\mathbb{N}$ é indutivo. Se I for um conjunto indutivo qualquer, então $\mathbb{N} \subseteq I$.

Demonstração.

$0 \in \mathbb{N}$, pois $0 \in I$ para qualquer indutivo I.
Agora, se $n \in \mathbb{N}$, então $n \in I$ para qualquer indutivo I,

Lema

$\mathbb{N}$ é indutivo. Se I for um conjunto indutivo qualquer, então $\mathbb{N} \subseteq I$.

Demonstração.

$0 \in \mathbb{N}$, pois $0 \in I$ para qualquer indutivo I.
Agora, se $n \in \mathbb{N}$, então $n \in I$ para qualquer indutivo I, portanto $(n+1) \in I$ para qualquer indutivo I,

Lema

$\mathbb{N}$ é indutivo. Se I for um conjunto indutivo qualquer, então $\mathbb{N} \subseteq I$.

Demonstração.

$0 \in \mathbb{N}$, pois $0 \in I$ para qualquer indutivo I.
Agora, se $n \in \mathbb{N}$, então $n \in I$ para qualquer indutivo I, portanto $(n+1) \in I$ para qualquer indutivo I, logo, $(n+1) \in \mathbb{N}$.

Lema

$\mathbb{N}$ *é indutivo. Se I for um conjunto indutivo qualquer, então* $\mathbb{N} \subseteq I$.

Demonstração.

$0 \in \mathbb{N}$, pois $0 \in I$ para qualquer indutivo I.
Agora, se $n \in \mathbb{N}$, então $n \in I$ para qualquer indutivo I, portanto $(n+1) \in I$ para qualquer indutivo I, logo, $(n+1) \in \mathbb{N}$. Da definição de $\mathbb{N}$ podemos concluir que ele está contido em qualquer conjunto indutivo I. $\square$

Definição

A relação $<$ sobre $\mathbb{N}$ é definida por:

Definição

A relação $<$ sobre $\mathbb{N}$ é definida por: $m < n$ se e somente se $m \in n$.

Teorema (O Princípio da Indução)

Suponha que $\mathbf{P}(x)$ *seja uma propriedade (possivelmente com parâmetros).*

Teorema (O Princípio da Indução)

Suponha que $\mathbf{P}(x)$ *seja uma propriedade (possivelmente com parâmetros). Assuma que*

Teorema (O Princípio da Indução)

Suponha que $\mathbf{P}(x)$ *seja uma propriedade (possivelmente com parâmetros). Assuma que*

(a) $\mathbf{P}(0)$ *se verifica. (Caso Base)*

Teorema (O Princípio da Indução)

Suponha que $\mathbf{P}(x)$ *seja uma propriedade (possivelmente com parâmetros). Assuma que*

(a) $\mathbf{P}(0)$ *se verifica. (Caso Base)*

(b) *Para todo* $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(n)$ *implica* $\mathbf{P}(n+1)$. *(Passo Indutivo)*

Teoria dos Conjuntos (Aula 5)
Ruy de Queiroz
Números Naturais
Propriedades dos Números Naturais

Teorema (O Princípio da Indução)

Suponha que $\mathbf{P}(x)$ *seja uma propriedade (possivelmente com parâmetros). Assuma que*

(a) $\mathbf{P}(0)$ *se verifica. (Caso Base)*

(b) *Para todo* $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(n)$ *implica* $\mathbf{P}(n+1)$. *(Passo Indutivo)*

Então $\mathbf{P}$ *se verifica para todos os números naturais* n.

Teoria dos Conjuntos (Aula 5)

Ruy de Queiroz

Números Naturais

Propriedades dos Números Naturais

Teorema (O Princípio da Indução)

Suponha que $\mathbf{P}(x)$ *seja uma propriedade (possivelmente com parâmetros). Assuma que*

(a) $\mathbf{P}(0)$ *se verifica. (Caso Base)*

(b) *Para todo* $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(n)$ *implica* $\mathbf{P}(n+1)$. *(Passo Indutivo)*

Então **P** *se verifica para todos os números naturais n.*

Demonstração.

As condições (a) e (b) dizem que o conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathbf{P}(n)\}$ é indutivo.

Teorema (O Princípio da Indução)

Suponha que $\mathbf{P}(x)$ *seja uma propriedade (possivelmente com parâmetros). Assuma que*

(a) $\mathbf{P}(0)$ *se verifica. (Caso Base)*

(b) *Para todo* $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(n)$ *implica* $\mathbf{P}(n+1)$. *(Passo Indutivo)*

Então $\mathbf{P}$ *se verifica para todos os números naturais n.*

Demonstração.

As condições (a) e (b) dizem que o conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathbf{P}(n)\}$ é indutivo. Portanto, $\mathbb{N} \subseteq A$ segue. $\square$

Lema

(i) $0 \leq n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Lema

(i) $0 \leq n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

(ii) *Para todo* $k, n \in \mathbb{N}$, $k < n + 1$ *se e somente se* $k < n$ *ou* $k = n$.

Demonstração.

(i) Vamos assumir que $\mathbf{P}(x)$ significa "$0 \leq x$".

Demonstração.

(i) Vamos assumir que $\mathbf{P}(x)$ significa “$0 \leq x$”. Precisamos verificar as condições (a) e (b) do Princípio da Indução.

Demonstração.

(i) Vamos assumir que $\mathbf{P}(x)$ significa "$0 \leq x$". Precisamos verificar as condições (a) e (b) do Princípio da Indução.

  (a) **P**(0 se verifica trivialmente.

Demonstração.

(i) Vamos assumir que $\mathbf{P}(x)$ significa "$0 \leq x$". Precisamos verificar as condições (a) e (b) do Princípio da Indução.

(a) $\mathbf{P}(0$ se verifica trivialmente.

(b) $\mathbf{P}(n)$ implica $\mathbf{P}(n+1)$.

Demonstração.

(i) Vamos assumir que $\mathbf{P}(x)$ significa "$0 \leq x$". Precisamos verificar as condições (a) e (b) do Princípio da Indução.

(a) $\mathbf{P}(0$ se verifica trivialmente.

(b) $\mathbf{P}(n)$ implica $\mathbf{P}(n+1)$. Pois, vamos assumir que $\mathbf{P}(n)$ se verifica, i.e. $0 \leq n$.

Demonstração.

(i) Vamos assumir que $\mathbf{P}(x)$ significa "$0 \leq x$". Precisamos verificar as condições (a) e (b) do Princípio da Indução.

(a) $\mathbf{P}(0$ se verifica trivialmente.

(b) $\mathbf{P}(n)$ implica $\mathbf{P}(n+1)$. Pois, vamos assumir que $\mathbf{P}(n)$ se verifica, i.e. $0 \leq n$. definição de $\leq$, ou $0 < n$ ou $0 = n$.

Demonstração.

(i) Vamos assumir que $\mathbf{P}(x)$ significa “$0 \leq x$”. Precisamos verificar as condições (a) e (b) do Princípio da Indução.

(a) $\mathbf{P}($0 se verifica trivialmente.

(b) $\mathbf{P}(n)$ implica $\mathbf{P}(n+1)$. Pois, vamos assumir que $\mathbf{P}(n)$ se verifica, i.e. $0 \leq n$. definição de $\leq$, ou $0 < n$ ou $0 = n$. Em qualquer dos casos, $0 \in n \cup \{n\} = n + 1$, portanto $0 < (n + 1)$ e concluimos que $\mathbf{P}(n + 1)$ também se dá.

Demonstração.

(i) Vamos assumir que $\mathbf{P}(x)$ significa "$0 \leq x$". Precisamos verificar as condições (a) e (b) do Princípio da Indução.

(a) $\mathbf{P}(0$ se verifica trivialmente.

(b) $\mathbf{P}(n)$ implica $\mathbf{P}(n+1)$. Pois, vamos assumir que $\mathbf{P}(n)$ se verifica, i.e. $0 \leq n$. definição de $\leq$, ou $0 < n$ ou $0 = n$. Em qualquer dos casos, $0 \in n \cup \{n\} = n + 1$, portanto $0 < (n+1)$ e concluimos que $\mathbf{P}(n+1)$ também se dá.

Agora que estabelecemos as condições (a) e (b) do Princípio da Indução, podemos usar esse princípio para concluir que $\mathbf{P}(n)$ se verifica para todo $n \in \mathbb{N}$, i.e., $0 \leq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração.

(i) Vamos assumir que $\mathbf{P}(x)$ significa "$0 \leq x$". Precisamos verificar as condições (a) e (b) do Princípio da Indução.

  (a) $\mathbf{P}(0$ se verifica trivialmente.

  (b) $\mathbf{P}(n)$ implica $\mathbf{P}(n+1)$. Pois, vamos assumir que $\mathbf{P}(n)$ se verifica, i.e. $0 \leq n$. definição de $\leq$, ou $0 < n$ ou $0 = n$. Em qualquer dos casos, $0 \in n \cup \{n\} = n + 1$, portanto $0 < (n+1)$ e concluimos que $\mathbf{P}(n+1)$ também se dá.

  Agora que estabelecemos as condições (a) e (b) do Princípio da Indução, podemos usar esse princípio para concluir que $\mathbf{P}(n)$ se verifica para todo $n \in \mathbb{N}$, i.e., $0 \leq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(ii) É suficiente notar que $k \in n \cup \{n\}$ se e somente se $k \in n$ ou $k \in \{n\}$ (i.e., $k = n$).

$\square$

Teorema

$(\mathbb{N}, <)$ *é um conjunto linearmente ordenado.*

Demonstração.

(i) $<$ *é transitiva*.

Demonstração.

(i) $<$ *é transitiva*. Façamos $\mathbf{P}(x)$ ser "para todo $k, m \in \mathbb{N}$, se $k < m$ e $m < x$, então $k < x$."

Demonstração.

(i) $<$ *é transitiva*. Façamos $\mathbf{P}(x)$ ser "para todo $k, m \in \mathbb{N}$, se $k < m$ e $m < x$, então $k < x$."

   (a) (Caso Base) "para todo $k, m \in \mathbb{N}$, se $k < m$ e $m < 0$, então $k < 0$".

Demonstração.

(i) $<$ *é transitiva*. Façamos $\mathbf{P}(x)$ ser "para todo $k, m \in \mathbb{N}$, se $k < m$ e $m < x$, então $k < x$."

(a) (Caso Base) "para todo $k, m \in \mathbb{N}$, se $k < m$ e $m < 0$, então $k < 0$". Pelo (i) do Lema anterior, não existe $m \in \mathbf{N}$ tal que $m < 0$, portanto $\mathbf{P}(0)$ se dá trivialmente.

Demonstração.

(i) $<$ *é transitiva*. Façamos $\mathbf{P}(x)$ ser "para todo $k, m \in \mathbb{N}$, se $k < m$ e $m < x$, então $k < x$."

(a) (Caso Base) "para todo $k, m \in \mathbb{N}$, se $k < m$ e $m < 0$, então $k < 0$". Pelo (i) do Lema anterior, não existe $m \in \mathbf{N}$ tal que $m < 0$, portanto $\mathbf{P}(0)$ se dá trivialmente.

(b) (Passo Indutivo) Suponha que $\mathbf{P}(n)$ se dá (h.i.), i.e. assuma que "para todo $k, m \in \mathbb{N}$, se $k < m$ e $m < n$, então $k < n$".

Demonstração.

(i) $<$ *é transitiva*. Façamos $\mathbf{P}(x)$ ser "para todo $k, m \in \mathbb{N}$, se $k < m$ e $m < x$, então $k < x$."

(a) (Caso Base) "para todo $k, m \in \mathbb{N}$, se $k < m$ e $m < 0$, então $k < 0$". Pelo (i) do Lema anterior, não existe $m \in \mathbf{N}$ tal que $m < 0$, portanto $\mathbf{P}(0)$ se dá trivialmente.

(b) (Passo Indutivo) Suponha que $\mathbf{P}(n)$ se dá (h.i.), i.e. assuma que "para todo $k, m \in \mathbb{N}$, se $k < m$ e $m < n$, então $k < n$". Precisamos mostrar que $\mathbf{P}(n+1)$ também se dá, i.e. "para todo $k, m \in \mathbb{N}$, se $k < m$ e $m < (n+1)$, então $k < (n+1)$".

Demonstração.

(i) $<$ *é transitiva*. Façamos $\mathbf{P}(x)$ ser "para todo $k, m \in \mathbb{N}$, se $k < m$ e $m < x$, então $k < x$."

(a) (Caso Base) "para todo $k, m \in \mathbb{N}$, se $k < m$ e $m < 0$, então $k < 0$". Pelo (i) do Lema anterior, não existe $m \in \mathbf{N}$ tal que $m < 0$, portanto $\mathbf{P}(0)$ se dá trivialmente.

(b) (Passo Indutivo) Suponha que $\mathbf{P}(n)$ se dá (h.i.), i.e. assuma que "para todo $k, m \in \mathbb{N}$, se $k < m$ e $m < n$, então $k < n$". Precisamos mostrar que $\mathbf{P}(n+1)$ também se dá, i.e. "para todo $k, m \in \mathbb{N}$, se $k < m$ e $m < (n+1)$, então $k < (n+1)$". Ou seja, temos que mostrar que $k < m$ e $m < (n+1)$ implicam $k < (n+1)$.

Demonstração.

(i) $<$ *é transitiva*. Façamos $\mathbf{P}(x)$ ser "para todo $k, m \in \mathbb{N}$, se $k < m$ e $m < x$, então $k < x$."

(a) (Caso Base) "para todo $k, m \in \mathbb{N}$, se $k < m$ e $m < 0$, então $k < 0$". Pelo (i) do Lema anterior, não existe $m \in \mathbf{N}$ tal que $m < 0$, portanto $\mathbf{P}(0)$ se dá trivialmente.

(b) (Passo Indutivo) Suponha que $\mathbf{P}(n)$ se dá (h.i.), i.e. assuma que "para todo $k, m \in \mathbb{N}$, se $k < m$ e $m < n$, então $k < n$". Precisamos mostrar que $\mathbf{P}(n+1)$ também se dá, i.e. "para todo $k, m \in \mathbb{N}$, se $k < m$ e $m < (n+1)$, então $k < (n+1)$". Ou seja, temos que mostrar que $k < m$ e $m < (n+1)$ implicam $k < (n+1)$. Mas se $k < m$ e $m < (n+1)$, então pelo (ii) do Lema anterior $m < n$ ou $m = n$.

Demonstração.

(i) $<$ *é transitiva*. Façamos $\mathbf{P}(x)$ ser "para todo $k, m \in \mathbb{N}$, se $k < m$ e $m < x$, então $k < x$."

(a) (Caso Base) "para todo $k, m \in \mathbb{N}$, se $k < m$ e $m < 0$, então $k < 0$". Pelo (i) do Lema anterior, não existe $m \in \mathbf{N}$ tal que $m < 0$, portanto $\mathbf{P}(0)$ se dá trivialmente.

(b) (Passo Indutivo) Suponha que $\mathbf{P}(n)$ se dá (h.i.), i.e. assuma que "para todo $k, m \in \mathbb{N}$, se $k < m$ e $m < n$, então $k < n$". Precisamos mostrar que $\mathbf{P}(n+1)$ também se dá, i.e. "para todo $k, m \in \mathbb{N}$, se $k < m$ e $m < (n+1)$, então $k < (n+1)$". Ou seja, temos que mostrar que $k < m$ e $m < (n+1)$ implicam $k < (n+1)$. Mas se $k < m$ e $m < (n+1)$, então pelo (ii) do Lema anterior $m < n$ ou $m = n$. Se $m < n$, obtemos $k < n$ pela hipótese indutiva.

Demonstração.

(i) $<$ *é transitiva*. Façamos $\mathbf{P}(x)$ ser "para todo $k, m \in \mathbb{N}$, se $k < m$ e $m < x$, então $k < x$."

(a) (Caso Base) "para todo $k, m \in \mathbb{N}$, se $k < m$ e $m < 0$, então $k < 0$". Pelo (i) do Lema anterior, não existe $m \in \mathbf{N}$ tal que $m < 0$, portanto $\mathbf{P}(0)$ se dá trivialmente.

(b) (Passo Indutivo) Suponha que $\mathbf{P}(n)$ se dá (h.i.), i.e. assuma que "para todo $k, m \in \mathbb{N}$, se $k < m$ e $m < n$, então $k < n$". Precisamos mostrar que $\mathbf{P}(n+1)$ também se dá, i.e. "para todo $k, m \in \mathbb{N}$, se $k < m$ e $m < (n+1)$, então $k < (n+1)$". Ou seja, temos que mostrar que $k < m$ e $m < (n+1)$ implicam $k < (n+1)$. Mas se $k < m$ e $m < (n+1)$, então pelo (ii) do Lema anterior $m < n$ ou $m = n$. Se $m < n$, obtemos $k < n$ pela hipótese indutiva. Se $m = n$, então, de $k < m$ obtemos $k < n$.

Demonstração.

(i) $<$ *é transitiva*. Façamos $\mathbf{P}(x)$ ser "para todo $k, m \in \mathbb{N}$, se $k < m$ e $m < x$, então $k < x$."

(a) (Caso Base) "para todo $k, m \in \mathbb{N}$, se $k < m$ e $m < 0$, então $k < 0$". Pelo (i) do Lema anterior, não existe $m \in \mathbf{N}$ tal que $m < 0$, portanto $\mathbf{P}(0)$ se dá trivialmente.

(b) (Passo Indutivo) Suponha que $\mathbf{P}(n)$ se dá (h.i.), i.e. assuma que "para todo $k, m \in \mathbb{N}$, se $k < m$ e $m < n$, então $k < n$". Precisamos mostrar que $\mathbf{P}(n+1)$ também se dá, i.e. "para todo $k, m \in \mathbb{N}$, se $k < m$ e $m < (n+1)$, então $k < (n+1)$". Ou seja, temos que mostrar que $k < m$ e $m < (n+1)$ implicam $k < (n+1)$. Mas se $k < m$ e $m < (n+1)$, então pelo (ii) do Lema anterior $m < n$ ou $m = n$. Se $m < n$, obtemos $k < n$ pela hipótese indutiva. Se $m = n$, então, de $k < m$ obtemos $k < n$. Em qualquer dos casos, $k < (n+1)$ pelo (ii) do Lema anterior.

Demonstração.

(i) $<$ *é transitiva*. Façamos $\mathbf{P}(x)$ ser "para todo $k, m \in \mathbb{N}$, se $k < m$ e $m < x$, então $k < x$."

(a) (Caso Base) "para todo $k, m \in \mathbb{N}$, se $k < m$ e $m < 0$, então $k < 0$". Pelo (i) do Lema anterior, não existe $m \in \mathbf{N}$ tal que $m < 0$, portanto $\mathbf{P}(0)$ se dá trivialmente.

(b) (Passo Indutivo) Suponha que $\mathbf{P}(n)$ se dá (h.i.), i.e. assuma que "para todo $k, m \in \mathbb{N}$, se $k < m$ e $m < n$, então $k < n$". Precisamos mostrar que $\mathbf{P}(n+1)$ também se dá, i.e. "para todo $k, m \in \mathbb{N}$, se $k < m$ e $m < (n+1)$, então $k < (n+1)$". Ou seja, temos que mostrar que $k < m$ e $m < (n+1)$ implicam $k < (n+1)$. Mas se $k < m$ e $m < (n+1)$, então pelo (ii) do Lema anterior $m < n$ ou $m = n$. Se $m < n$, obtemos $k < n$ pela hipótese indutiva. Se $m = n$, então, de $k < m$ obtemos $k < n$. Em qualquer dos casos, $k < (n+1)$ pelo (ii) do Lema anterior.

Demonstração.

(ii) $<$ *é assimétrica*.

Demonstração.

(ii) $<$ *é assimétrica*. Assuma que $n < k$ e $k < n$. Por transitividade, isso implica $n < n$. Precisamos mostrar que isso é impossível.

Demonstração.

(ii) $<$ *é assimétrica*. Assuma que $n < k$ e $k < n$. Por transitividade, isso implica $n < n$. Precisamos mostrar que isso é impossível.
(Caso Base) Claramente $0 < 0$ é impossível, pois isso significaria que $\emptyset \in \emptyset$.

Demonstração.

(ii) $<$ *é assimétrica*. Assuma que $n < k$ e $k < n$. Por transitividade, isso implica $n < n$. Precisamos mostrar que isso é impossível.
(Caso Base) Claramente $0 < 0$ é impossível, pois isso significaria que $\emptyset \in \emptyset$.
(Passo Indutivo) Vamos assumir que $n < n$ seja falso (h.i.) e provar que $(n + 1) < (n + 1)$ também é impossível.

Demonstração.

(ii) $<$ *é assimétrica*. Assuma que $n < k$ e $k < n$. Por transitividade, isso implica $n < n$. Precisamos mostrar que isso é impossível.
(Caso Base) Claramente $0 < 0$ é impossível, pois isso significaria que $\emptyset \in \emptyset$.
(Passo Indutivo) Vamos assumir que $n < n$ seja falso (h.i.) e provar que $(n + 1) < (n + 1)$ também é impossível. Do (i) do Lema, se $(n + 1) < (n + 1)$ fosse verdadeiro então $(n + 1) < n$ ou $(n + 1) = n$. Como $n < (n + 1)$ se dá também por (ii) do Lema, e a relação $<$ é transitiva, obtemos que $n < n$ é verdadeiro, daí contradizendo nossa hipótese indutiva.

$\square$

Demonstração.

(iii) $<$ *é uma ordenação linear*.

Teoria dos Conjuntos

Prova do Teorema (cont.)

Demonstração.

(iii) $<$ *é uma ordenação linear*. Precisamos mostrar que para todos $m, n \in \ltimes$ ou $m < n$ ou $m = n$ ou $n < m$.

Demonstração.

(iii) $<$ *é uma ordenação linear*. Precisamos mostrar que para todos $m, n \in \ltimes$ ou $m < n$ ou $m = n$ ou $n < m$.
(Caso Base) Para todo $n \in \mathbb{N}$, ou $m < 0$ ou $m = 0$ ou $0 < m$. Isso segue imediatamente do (i) do Lema.

Demonstração.

(iii) $<$ *é uma ordenação linear*. Precisamos mostrar que para todos $m, n \in \ltimes$ ou $m < n$ ou $m = n$ ou $n < m$. (Caso Base) Para todo $n \in \mathbb{N}$, ou $m < 0$ ou $m = 0$ ou $0 < m$. Isso segue imediatamente do (i) do Lema. (Passo Indutivo) Assuma que para todo $m \in \mathbb{N}$, ou $m < n$ ou $m = n$ ou $n < m$. Temos que provar que o mesmo se dá quando substituímos n por $(n + 1)$.

Demonstração.

(iii) $<$ *é uma ordenação linear*. Precisamos mostrar que para todos $m, n \in \ltimes$ ou $m < n$ ou $m = n$ ou $n < m$. (Caso Base) Para todo $n \in \mathbb{N}$, ou $m < 0$ ou $m = 0$ ou $0 < m$. Isso segue imediatamente do (i) do Lema. (Passo Indutivo) Assuma que para todo $m \in \mathbb{N}$, ou $m < n$ ou $m = n$ ou $n < m$. Temos que provar que o mesmo se dá quando substituímos n por $(n + 1)$. Se $m < n$, então $m < (n + 1)$ pelo (ii) do Lema e transitividade. Igualmente, se $m = n$ então $m < (n + 1)$.

Demonstração.

(iii) $<$ *é uma ordenação linear*. Precisamos mostrar que para todos $m, n \in \ltimes$ ou $m < n$ ou $m = n$ ou $n < m$. (Caso Base) Para todo $n \in \mathbb{N}$, ou $m < 0$ ou $m = 0$ ou $0 < m$. Isso segue imediatamente do (i) do Lema. (Passo Indutivo) Assuma que para todo $m \in \mathbb{N}$, ou $m < n$ ou $m = n$ ou $n < m$. Temos que provar que o mesmo se dá quando substituímos n por $(n + 1)$. Se $m < n$, então $m < (n + 1)$ pelo (ii) do Lema e transitividade. Igualmente, se $m = n$ então $m < (n + 1)$. Finalmente, para estabelecer a condição (b) precisamos mostrar que para todo $m \in \mathbb{N}$ ou $m < (n + 1)$ ou $m = (n + 1)$ ou $(n + 1) < m$.

$\square$

Demonstração.

(iii) (Cont.) Agora, se $n < m$, gostaríamos de concluir que $(n+1) \leq m$, o que nos levaria ao que desejávamos.

Demonstração.

(iii) (Cont.) Agora, se $n < m$, gostaríamos de concluir que $(n+1) \leq m$, o que nos levaria ao que desejávamos. Usamos indução sobre m para provar que se $n < m$ então $(n+1) \leq m$ for all $m \in \mathbb{N}$. (Notice that our $\mathbf{P}(x)$ now is "if $n < x$ then $(n+1) \leq x$".) (Base Case) If $m = 0$, the statement "if $n < 0$ then $(n+1) \leq 0$" is true because its assumption is false. (Inductive Step) Inductive hypothesis: $\mathbf{P}(x)$ is true of m. We need to prove that is also true of $(m+1)$. For that, assume $n < (m+1)$; then $n < m$ or $n = m$. If $n < m$, $(n+1) \leq m$ by the inductive hypothesis, so $(n+1) < (m+1)$. If $n = m$ then of course $(n+1) = (m+1)$. In either case, $\mathbf{P}(m+1)$ is proved.

$\square$

Teorema (O Princípio da Indução (segunda versão))

Seja $\mathbf{P}(x)$ *uma propriedade (possivelmente com parâmetros). Assuma que, para todo* $n \in \mathbb{N}$,

Teorema (O Princípio da Indução (segunda versão))

Seja $\mathbf{P}(x)$ *uma propriedade (possivelmente com parâmetros). Assuma que, para todo* $n \in \mathbb{N}$,
(*) Se $\mathbf{P}(x)$ *se dá para todo* $k <$
n, *então* $\mathbf{P}(n)$. $\qquad (*)$

Teorema (O Princípio da Indução (segunda versão))

Seja $\mathbf{P}(x)$ *uma propriedade (possivelmente com parâmetros). Assuma que, para todo* $n \in \mathbb{N}$*,*
(*) Se $\mathbf{P}(x)$ *se dá para todo* $k < n$*, então* $\mathbf{P}(n)$*.* $\quad (*)$
Então $\mathbf{P}$ *se dá para todo número natural n.*

Demonstração.

Suponha que (*) seja verdadeiro. Considere a propriedade **Q**(n): **P**(k) se dá para todo $k < n$.

Demonstração.

Suponha que (*) seja verdadeiro. Considere a propriedade $\mathbf{Q}(n)$: $\mathbf{P}(k)$ se dá para todo $k < n$. Claramente $\mathbf{Q}(0)$ é verdadeiro

Demonstração.

Suponha que (*) seja verdadeiro. Considere a propriedade $\mathbf{Q}(n)$: $\mathbf{P}(k)$ se dá para todo $k < n$. Claramente $\mathbf{Q}(0)$ é verdadeiro (não existe $k < 0$!).

Demonstração.

Suponha que (*) seja verdadeiro. Considere a propriedade $\mathbf{Q}(n)$: $\mathbf{P}(k)$ se dá para todo $k < n$. Claramente $\mathbf{Q}(0)$ é verdadeiro (não existe $k < 0$!). Se $\mathbf{Q}(n)$ se dá, então $\mathbf{Q}(n+1)$ se dá:

Demonstração.

Suponha que (*) seja verdadeiro. Considere a propriedade $\mathbf{Q}(n)$: $\mathbf{P}(k)$ se dá para todo $k < n$. Claramente $\mathbf{Q}(0)$ é verdadeiro (não existe $k < 0$!). Se $\mathbf{Q}(n)$ se dá, então $\mathbf{Q}(n+1)$ se dá: Se $\mathbf{Q}(n)$ se dá, então $\mathbf{P}(k$ se dá para todo $k < n$, e conseqüentemente também para $k = n$ (por (*)). O item (ii) do Lema anterior nos permite concluir que $\mathbf{P}(k)$ se dá para todo $k < n+1$, e portanto $\mathbf{Q}(n+1)$ se dá.

Demonstração.

Suponha que (*) seja verdadeiro. Considere a propriedade $\mathbf{Q}(n)$: $\mathbf{P}(k)$ se dá para todo $k < n$. Claramente $\mathbf{Q}(0)$ é verdadeiro (não existe $k < 0$!). Se $\mathbf{Q}(n)$ se dá, então $\mathbf{Q}(n+1)$ se dá: Se $\mathbf{Q}(n)$ se dá, então $\mathbf{P}(k$ se dá para todo $k < n$, e conseqüentemente também para $k = n$ (por (*)). O item (ii) do Lema anterior nos permite concluir que $\mathbf{P}(k)$ se dá para todo $k < n + 1$, e portanto $\mathbf{Q}(n+1)$ se dá. Pelo Princípio da Indução, $\mathbf{Q}(n)$ é verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$;

Demonstração.

Suponha que (*) seja verdadeiro. Considere a propriedade $\mathbf{Q}(n)$: $\mathbf{P}(k)$ se dá para todo $k < n$. Claramente $\mathbf{Q}(0)$ é verdadeiro (não existe $k < 0$!). Se $\mathbf{Q}(n)$ se dá, então $\mathbf{Q}(n+1)$ se dá: Se $\mathbf{Q}(n)$ se dá, então $\mathbf{P}(k$ se dá para todo $k < n$, e conseqüentemente também para $k = n$ (por (*)). O item (ii) do Lema anterior nos permite concluir que $\mathbf{P}(k)$ se dá para todo $k < n+1$, e portanto $\mathbf{Q}(n+1)$ se dá. Pelo Princípio da Indução, $\mathbf{Q}(n)$ é verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$; como $k \in \mathbb{N}$, existe um $n > k$ (e.g., $n = k+1$), temos $\mathbf{P}(k)$ verdadeiro para todo $k \in \mathbb{N}$, como desejávamos. $\square$

Definição (Boa-ordenação)

Uma ordenação linear $\prec$ *de um conjunto* A *é uma* boa-ordenação *se todo subconjunto não-vazio de* A *tem um elemento mínimo. O conjunto ordenado* $(A, \prec)$ *é então chamado de* conjunto bem-ordenado.

Teorema

$(\mathbb{N}, <)$ *é um conjunto bem-ordenado.*

Teorema

$(\mathbb{N}, <)$ *é um conjunto bem-ordenado.*

Demonstração.

Seja X um subconjunto não-vazio de $\mathbb{N}$.

Teorema

$(\mathbb{N}, <)$ *é um conjunto bem-ordenado.*

Demonstração.

Seja X um subconjunto não-vazio de $\mathbb{N}$. Precisamos provar que X tem um elemento mínimo.

Teorema

$(\mathbb{N}, <)$ *é um conjunto bem-ordenado.*

Demonstração.

Seja X um subconjunto não-vazio de $\mathbb{N}$. Precisamos provar que X tem um elemento mínimo. Faremos uma prova indireta: vamos assumir que não tem, e aí derivar uma contradição.

Teorema

$(\mathbb{N}, <)$ *é um conjunto bem-ordenado.*

Demonstração.

Seja X um subconjunto não-vazio de $\mathbb{N}$. Precisamos provar que X tem um elemento mínimo. Faremos uma prova indireta: vamos assumir que não tem, e aí derivar uma contradição. Suponha que X não tem mínimo e olhe para $\mathbb{N} - X$.

Teorema

$(\mathbb{N}, <)$ *é um conjunto bem-ordenado.*

Demonstração.

Seja X um subconjunto não-vazio de $\mathbb{N}$. Precisamos provar que X tem um elemento mínimo. Faremos uma prova indireta: vamos assumir que não tem, e aí derivar uma contradição. Suponha que X não tem mínimo e olhe para $\mathbb{N} - X$. Bem, se $k \in \mathbb{N} - X$ para todo $k < n$, então $n \in \mathbb{N} - X$, caso contrário n seria o elemento mínimo de X.

Teorema

$(\mathbb{N}, <)$ é um conjunto bem-ordenado.

Demonstração.

Seja X um subconjunto não-vazio de $\mathbb{N}$. Precisamos provar que X tem um elemento mínimo. Faremos uma prova indireta: vamos assumir que não tem, e aí derivar uma contradição. Suponha que X não tem mínimo e olhe para $\mathbb{N} - X$. Bem, se $k \in \mathbb{N} - X$ para todo $k < n$, então $n \in \mathbb{N} - X$, caso contrário n seria o elemento mínimo de X. Pelo Princípio da Indução (2a. versão) podemos concluir que $n \in \mathbb{N} - X$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

Teorema

$(\mathbb{N}, <)$ *é um conjunto bem-ordenado.*

Demonstração.

Seja X um subconjunto não-vazio de $\mathbb{N}$. Precisamos provar que X tem um elemento mínimo. Faremos uma prova indireta: vamos assumir que não tem, e aí derivar uma contradição. Suponha que X não tem mínimo e olhe para $\mathbb{N} - X$. Bem, se $k \in \mathbb{N} - X$ para todo $k < n$, então $n \in \mathbb{N} - X$, caso contrário n seria o elemento mínimo de X. Pelo Princípio da Indução (2a. versão) podemos concluir que $n \in \mathbb{N} - X$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que significa que $X = \emptyset$, contradizendo nossa hipótese de que X é não-vazio. $\square$

Teorema

Se um conjunto não vazio de números naturais tem um limitante superior na ordenação $<$, então ele tem um elemento máximo.

Demonstração.

Tome um subconjunto não-vazio A de $\mathbb{N}$, i.e. $A \subseteq \mathbb{N}$ e $A \neq \emptyset$.
Seja $B = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ é um limitante superior de } A\}$.

Demonstração.

Tome um subconjunto não-vazio A de $\mathbb{N}$, i.e. $A \subseteq \mathbb{N}$ e $A \neq \emptyset$.
Seja $B = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ é um limitante superior de } A\}$.
Assumimos que $B \neq \emptyset$.

Demonstração.

Tome um subconjunto não-vazio A de $\mathbb{N}$, i.e. $A \subseteq \mathbb{N}$ e $A \neq \emptyset$.
Seja $B = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ é um limitante superior de } A\}$.
Assumimos que $B \neq \emptyset$. De nossa hipótese $B \neq \emptyset$.

Demonstração.

Tome um subconjunto não-vazio A de $\mathbb{N}$, i.e. $A \subseteq \mathbb{N}$ e $A \neq \emptyset$.
Seja $B = \{k \in \mathbb{N} \mid k$ é um limitante superior de $A\}$.
Assumimos que $B \neq \emptyset$. De nossa hipótese $B \neq \emptyset$.
Pelo Teorema anterior, B tem um mínimo n, portanto $n = \sup(A)$.

Demonstração.

Tome um subconjunto não-vazio A de $\mathbb{N}$, i.e. $A \subseteq \mathbb{N}$ e $A \neq \emptyset$.
Seja $B = \{k \in \mathbb{N} \mid k$ é um limitante superior de $A\}$.
Assumimos que $B \neq \emptyset$. De nossa hipótese $B \neq \emptyset$.
Pelo Teorema anterior, B tem um mínimo n, portanto $n = \sup(A)$. Precisamos mostrar que n pertence a A.

Demonstração.

Tome um subconjunto não-vazio A de $\mathbb{N}$, i.e. $A \subseteq \mathbb{N}$ e $A \neq \emptyset$. Seja $B = \{k \in \mathbb{N} \mid k$ é um limitante superior de $A\}$. Assumimos que $B \neq \emptyset$. De nossa hipótese $B \neq \emptyset$. Pelo Teorema anterior, B tem um mínimo n, portanto $n = \sup(A)$. Precisamos mostrar que n pertence a A. (Lembre-se de que quando um limitante superior de um conjunto A está no conjunto A então ele tem que ser o máximo de A.)

Teoria dos Conjuntos (Aula 5)
Ruy de Queiroz
Números Naturais
Propriedades dos Números Naturais

Demonstração.

Tome um subconjunto não-vazio A de $\mathbb{N}$, i.e. $A \subseteq \mathbb{N}$ e $A \neq \emptyset$. Seja $B = \{k \in \mathbb{N} \mid k$ é um limitante superior de $A\}$. Assumimos que $B \neq \emptyset$. De nossa hipótese $B \neq \emptyset$. Pelo Teorema anterior, B tem um mínimo n, portanto $n = \sup(A)$. Precisamos mostrar que n pertence a A. (Lembre-se de que quando um limitante superior de um conjunto A está no conjunto A então ele tem que ser o máximo de A.) Uma indução fácil mostra que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n = 0$ ou $n = k + 1$ para algum $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração.

Tome um subconjunto não-vazio A de $\mathbb{N}$, i.e. $A \subseteq \mathbb{N}$ e $A \neq \emptyset$. Seja $B = \{k \in \mathbb{N} \mid k$ é um limitante superior de $A\}$. Assumimos que $B \neq \emptyset$. De nossa hipótese $B \neq \emptyset$. Pelo Teorema anterior, B tem um mínimo n, portanto $n = \sup(A)$. Precisamos mostrar que n pertence a A. (Lembre-se de que quando um limitante superior de um conjunto A está no conjunto A então ele tem que ser o máximo de A.) Uma indução fácil mostra que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n = 0$ ou $n = k + 1$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Agora, para uma contradição, assuma que $n \notin A$;

Demonstração.

Tome um subconjunto não-vazio A de $\mathbb{N}$, i.e. $A \subseteq \mathbb{N}$ e $A \neq \emptyset$. Seja $B = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ é um limitante superior de } A\}$. Assumimos que $B \neq \emptyset$. De nossa hipótese $B \neq \emptyset$. Pelo Teorema anterior, B tem um mínimo n, portanto $n = \sup(A)$. Precisamos mostrar que n pertence a A. (Lembre-se de que quando um limitante superior de um conjunto A está no conjunto A então ele tem que ser o máximo de A.) Uma indução fácil mostra que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n = 0$ ou $n = k + 1$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Agora, para uma contradição, assuma que $n \notin A$; então temos que $n > m$ para todo $m \in A$ (pois n é um limitante superior de A).

Demonstração.

Tome um subconjunto não-vazio A de $\mathbb{N}$, i.e. $A \subseteq \mathbb{N}$ e $A \neq \emptyset$. Seja $B = \{k \in \mathbb{N} \mid k$ é um limitante superior de $A\}$. Assumimos que $B \neq \emptyset$. De nossa hipótese $B \neq \emptyset$. Pelo Teorema anterior, B tem um mínimo n, portanto $n = \sup(A)$. Precisamos mostrar que n pertence a A. (Lembre-se de que quando um limitante superior de um conjunto A está no conjunto A então ele tem que ser o máximo de A.) Uma indução fácil mostra que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n = 0$ ou $n = k + 1$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Agora, para uma contradição, assuma que $n \notin A$; então temos que $n > m$ para todo $m \in A$ (pois n é um limitante superior de A). Como A é não-vazio, temos que $n \neq 0$.

Demonstração.

Tome um subconjunto não-vazio A de $\mathbb{N}$, i.e. $A \subseteq \mathbb{N}$ e $A \neq \emptyset$. Seja $B = \{k \in \mathbb{N} \mid k$ é um limitante superior de $A\}$. Assumimos que $B \neq \emptyset$. De nossa hipótese $B \neq \emptyset$. Pelo Teorema anterior, B tem um mínimo n, portanto $n = \sup(A)$. Precisamos mostrar que n pertence a A. (Lembre-se de que quando um limitante superior de um conjunto A está no conjunto A então ele tem que ser o máximo de A.) Uma indução fácil mostra que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n = 0$ ou $n = k + 1$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Agora, para uma contradição, assuma que $n \notin A$; então temos que $n > m$ para todo $m \in A$ (pois n é um limitante superior de A). Como A é não-vazio, temos que $n \neq 0$. Logo, $n = k + 1$ para algum $k \in \mathbb{N}$, o que dá $k \geq m$ para todo $m \in A$ (pelo (ii) do Lema).

Teoria dos Conjuntos (Aula 5)
Ruy de Queiroz
Números Naturais
Propriedades dos Números Naturais

Demonstração.

Tome um subconjunto não-vazio A de $\mathbb{N}$, i.e. $A \subseteq \mathbb{N}$ e $A \neq \emptyset$. Seja $B = \{k \in \mathbb{N} \mid k$ é um limitante superior de $A\}$. Assumimos que $B \neq \emptyset$. De nossa hipótese $B \neq \emptyset$. Pelo Teorema anterior, B tem um mínimo n, portanto $n = \sup(A)$. Precisamos mostrar que n pertence a A. (Lembre-se de que quando um limitante superior de um conjunto A está no conjunto A então ele tem que ser o máximo de A.) Uma indução fácil mostra que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n = 0$ ou $n = k + 1$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Agora, para uma contradição, assuma que $n \notin A$; então temos que $n > m$ para todo $m \in A$ (pois n é um limitante superior de A). Como A é não-vazio, temos que $n \neq 0$. Logo, $n = k + 1$ para algum $k \in \mathbb{N}$, o que dá $k \geq m$ para todo $m \in A$ (pelo (ii) do Lema). Daí, k é um limitante superior de A e $k < n$, uma contradição. $\square$