Teoria dos Conjuntos (Aula 4)

Ruy J. G. B. de Queiroz

Centro de Informática, UFPE

2009.1

Conteúdo

Definição

Seja R uma relação binária em A.

Definição

Seja R uma relação binária em A.

(a) *R é chamada de* reflexiva em *A se para todo $a \in A$, aRa.*

Definição

Seja R uma relação binária em A.

(a) *R é chamada de* reflexiva em *A se para todo $a \in A$, aRa.*

(b) *R é chamada de* simétrica em *A se para todos $a, b \in A$, aRb implica bRa.*

Definição

Seja R uma relação binária em A.

(a) *R é chamada de* reflexiva em *A se para todo $a \in A$, aRa.*

(b) *R é chamada de* simétrica em *A se para todos $a, b \in A$, aRb implica bRa.*

(c) *R é chamada de* transitiva em *A se para todos $a, b, c \in A$, aRb e bRc implica aRc.*

Definição

Seja R uma relação binária em A.

(a) *R é chamada de* reflexiva em *A se para todo $a \in A$, aRa.*

(b) *R é chamada de* simétrica em *A se para todos $a, b \in A$, aRb implica bRa.*

(c) *R é chamada de* transitiva em *A se para todos $a, b, c \in A$, aRb e bRc implica aRc.*

(d) *R é chamada de* equivalência sobre *A se ela for reflexiva, simétrica, e transitiva em A.*

Definição

Seja E uma relação de equivalência sobre A e suponha que $a \in A$.

Definição

Seja E uma relação de equivalência sobre A e suponha que $a \in A$. A classe de equivalência de a módulo E é o conjunto

Definição

Seja E uma relação de equivalência sobre A e suponha que $a \in A$. A classe de equivalência de *a* módulo *E é o conjunto*

$$[a]_E = \{x \in A \mid xEa\}.$$

Definição

Seja E uma relação de equivalência sobre A e suponha que $a \in A$. A classe de equivalência de a módulo E é o conjunto

$$[a]_E = \{x \in A \mid xEa\}.$$

Lema

Sejam $a, b \in A$.

Definição

Seja E uma relação de equivalência sobre A e suponha que $a \in A$. A classe de equivalência de a módulo E *é o conjunto*

$$[a]_E = \{x \in A \mid xEa\}.$$

Lema

Sejam $a, b \in A$.

(a) *a é equivalente a b módulo E se e somente se $[a]_E = [b]_E$.*

Definição

Seja E uma relação de equivalência sobre A e suponha que $a \in A$. A classe de equivalência de a módulo E é o conjunto

$$[a]_E = \{x \in A \mid xEa\}.$$

Lema

Sejam $a, b \in A$.

(a) *a é equivalente a b módulo E se e somente se $[a]_E = [b]_E$.*

(b) *a não é equivalente a b módulo E se e somente se $[a]_E \cap [b]_E = \emptyset$.*

Definição

Um sistema S de conjuntos não-vazios é chamado de uma partição *de A se*

Definição

Um sistema S de conjuntos não-vazios é chamado de uma partição *de A se*

(a) *S é um sistema de conjuntos mutuamente disjuntos, i.e., se* $C \in S$, $D \in S$, *e* $C \neq D$, *então* $C \cap D = \emptyset$,

Definição

Um sistema S de conjuntos não-vazios é chamado de uma partição *de A se*

(a) *S é um sistema de conjuntos mutuamente disjuntos, i.e., se $C \in S$, $D \in S$, e $C \neq D$, então $C \cap D = \emptyset$,*

(b) *a união de S é o todo do conjunto A, i.e., $\bigcup S = A$.*

Definição

Um sistema S de conjuntos não-vazios é chamado de uma partição *de A se*

(a) *S é um sistema de conjuntos mutuamente disjuntos, i.e., se $C \in S$, $D \in S$, e $C \neq D$, então $C \cap D = \emptyset$,*

(b) *a união de S é o todo do conjunto A, i.e., $\bigcup S = A$.*

Definição

Seja E uma equivalência sobre A. O sistema de classes de equivalência módulo E é representado por A/E; portanto $A/E = \{[a]_E \mid a \in A\}$.

Teorema

Seja E uma equivalência sobre A; então A/E é uma partição de A.

Teorema

Seja E uma equivalência sobre A; então A/E é uma partição de A.

Demonstração.

A propriedade (a) segue do Lema acima: se $[a]_E \neq [b]_E$, então a e b não estão relacionados por E (i.e., eles não são E-equivalentes),

Teorema

Seja E uma equivalência sobre A; então A/E é uma partição de A.

Demonstração.

A propriedade (a) segue do Lema acima: se $[a]_E \neq [b]_E$, então a e b não estão relacionados por E (i.e., eles não são E-equivalentes), portanto $[a]_E \cap [b]_E = \emptyset$.

Teorema

Seja E uma equivalência sobre A; então A/E é uma partição de A.

Demonstração.

A propriedade (a) segue do Lema acima: se $[a]_E \neq [b]_E$, então a e b não estão relacionados por E (i.e., eles não são E-equivalentes), portanto $[a]_E \cap [b]_E = \emptyset$.
Para provar que E tem a propriedade (b), nos valemos do fato de que $\bigcup A/E = A$ pois $a \in [a]_E$.

Teorema

Seja E uma equivalência sobre A; então A/E é uma partição de A.

Demonstração.

A propriedade (a) segue do Lema acima: se $[a]_E \neq [b]_E$, então a e b não estão relacionados por E (i.e., eles não são E-equivalentes), portanto $[a]_E \cap [b]_E = \emptyset$.
Para provar que E tem a propriedade (b), nos valemos do fato de que $\bigcup A/E = A$ pois $a \in [a]_E$. Da definição de partição também sabemos que não existe classe de equivalência vazia; logo, pelo menos a está na classe de equivalência de todos os elementos equivalentes a a.

Teorema

Seja E uma equivalência sobre A; então A/E é uma partição de A.

Demonstração.

A propriedade (a) segue do Lema acima: se $[a]_E \neq [b]_E$, então a e b não estão relacionados por E (i.e., eles não são E-equivalentes), portanto $[a]_E \cap [b]_E = \emptyset$.
Para provar que E tem a propriedade (b), nos valemos do fato de que $\bigcup A/E = A$ pois $a \in [a]_E$. Da definição de partição também sabemos que não existe classe de equivalência vazia; logo, pelo menos a está na classe de equivalência de todos os elementos equivalentes a a. $\square$

Definição

Seja S uma partição de A. A relação E_S em A é definida por

Definição

Seja S uma partição de A. A relação E_S em A é definida por

$$E_S = \{(a, b) \in A \times A \mid \text{ existe } C \in S \text{ tal que } a \in C \text{ e } b \in C\}.$$

Definição

Seja S uma partição de A. A relação E_S em A é definida por

$$E_S = \{(a, b) \in A \times A \mid \text{ existe } C \in S \text{ tal que } a \in C \text{ e } b \in C\}.$$

a e b são relacionados por E_S se e somente se eles pertencem ao mesmo conjunto da partição S.

Definição

Seja S uma partição de A. A relação E_S em A é definida por

$$E_S = \{(a, b) \in A \times A \mid \text{ existe } C \in S \text{ tal que } a \in C \text{ e } b \in C\}.$$

a e b são relacionados por E_S se e somente se eles pertencem ao mesmo conjunto da partição S.

Teorema

Seja S uma partição de A; então, E_S é uma equivalência sobre A.

Demonstração.

Suponha que S seja uma partição de A. Precisamos provar que a relação correspondente à partição S é realmente uma relação de equivalência.

Demonstração.

Suponha que S seja uma partição de A. Precisamos provar que a relação correspondente à partição S é realmente uma relação de equivalência. Ou seja, temos que mostrar que E_S é reflexiva, simétrica, e transitiva.

Demonstração.

Suponha que S seja uma partição de A. Precisamos provar que a relação correspondente à partição S é realmente uma relação de equivalência. Ou seja, temos que mostrar que E_S é reflexiva, simétrica, e transitiva.
(Reflexiva) Tome $a \in A$; como $A = \bigcup S$, existe $C \in S$ para o qual $a \in C$, portanto $(a, a) \in E_S$.

Demonstração.

Suponha que S seja uma partição de A. Precisamos provar que a relação correspondente à partição S é realmente uma relação de equivalência. Ou seja, temos que mostrar que E_S é reflexiva, simétrica, e transitiva.
(Reflexiva) Tome $a \in A$; como $A = \bigcup S$, existe $C \in S$ para o qual $a \in C$, portanto $(a, a) \in E_S$.
(Simétrica) Suponha que aE_Sb; então existe $C \in S$ para o qual $a \in C$ e $b \in C$. Obviamente $b \in C$ e $a \in C$, logo, bE_Sa.

Demonstração.

Suponha que S seja uma partição de A. Precisamos provar que a relação correspondente à partição S é realmente uma relação de equivalência. Ou seja, temos que mostrar que E_S é reflexiva, simétrica, e transitiva.
(Reflexiva) Tome $a \in A$; como $A = \bigcup S$, existe $C \in S$ para o qual $a \in C$, portanto $(a, a) \in E_S$.
(Simétrica) Suponha que aE_Sb; então existe $C \in S$ para o qual $a \in C$ e $b \in C$. Obviamente $b \in C$ e $a \in C$, logo, bE_Sa.
(Transitiva) Suponha que aE_Sb e bE_Sc; então existem $C \in S$ e $D \in S$ tais que $a \in C$ e $b \in C$,

Demonstração.

Suponha que S seja uma partição de A. Precisamos provar que a relação correspondente à partição S é realmente uma relação de equivalência. Ou seja, temos que mostrar que E_S é reflexiva, simétrica, e transitiva.

(Reflexiva) Tome $a \in A$; como $A = \bigcup S$, existe $C \in S$ para o qual $a \in C$, portanto $(a, a) \in E_S$.

(Simétrica) Suponha que aE_Sb; então existe $C \in S$ para o qual $a \in C$ e $b \in C$. Obviamente $b \in C$ e $a \in C$, logo, bE_Sa.

(Transitiva) Suponha que aE_Sb e bE_Sc; então existem $C \in S$ e $D \in S$ tais que $a \in C$ e $b \in C$, $b \in D$ e $c \in D$.

Demonstração.

Suponha que S seja uma partição de A. Precisamos provar que a relação correspondente à partição S é realmente uma relação de equivalência. Ou seja, temos que mostrar que E_S é reflexiva, simétrica, e transitiva.
(Reflexiva) Tome $a \in A$; como $A = \bigcup S$, existe $C \in S$ para o qual $a \in C$, portanto $(a, a) \in E_S$.
(Simétrica) Suponha que aE_Sb; então existe $C \in S$ para o qual $a \in C$ e $b \in C$. Obviamente $b \in C$ e $a \in C$, logo, bE_Sa.
(Transitiva) Suponha que aE_Sb e bE_Sc; então existem $C \in S$ e $D \in S$ tais que $a \in C$ e $b \in C$, $b \in D$ e $c \in D$. É claro que $b \in C \cap D$, portanto $C \cap D \neq \emptyset$.

Demonstração.

Suponha que S seja uma partição de A. Precisamos provar que a relação correspondente à partição S é realmente uma relação de equivalência. Ou seja, temos que mostrar que E_S é reflexiva, simétrica, e transitiva.

(Reflexiva) Tome $a \in A$; como $A = \bigcup S$, existe $C \in S$ para o qual $a \in C$, portanto $(a, a) \in E_S$.

(Simétrica) Suponha que aE_Sb; então existe $C \in S$ para o qual $a \in C$ e $b \in C$. Obviamente $b \in C$ e $a \in C$, logo, bE_Sa.

(Transitiva) Suponha que aE_Sb e bE_Sc; então existem $C \in S$ e $D \in S$ tais que $a \in C$ e $b \in C$, $b \in D$ e $c \in D$. É claro que $b \in C \cap D$, portanto $C \cap D \neq \emptyset$. Mas S é um sistema de conjuntos mutuamente disjuntos, portanto C tem que ser igual a D.

Demonstração.

Suponha que S seja uma partição de A. Precisamos provar que a relação correspondente à partição S é realmente uma relação de equivalência. Ou seja, temos que mostrar que E_S é reflexiva, simétrica, e transitiva.
(Reflexiva) Tome $a \in A$; como $A = \bigcup S$, existe $C \in S$ para o qual $a \in C$, portanto $(a, a) \in E_S$.
(Simétrica) Suponha que aE_Sb; então existe $C \in S$ para o qual $a \in C$ e $b \in C$. Obviamente $b \in C$ e $a \in C$, logo, bE_Sa.
(Transitiva) Suponha que aE_Sb e bE_Sc; então existem $C \in S$ e $D \in S$ tais que $a \in C$ e $b \in C$, $b \in D$ e $c \in D$. É claro que $b \in C \cap D$, portanto $C \cap D \neq \emptyset$. Mas S é um sistema de conjuntos mutuamente disjuntos, portanto C tem que ser igual a D. Agora, $a \in C$, $c \in C$, logo, aE_SC. $\square$

Teorema

(a) *Se E é uma equivalência sobre A e $S = A/E$, então $E_S = E$.*

Teorema

(a) *Se E é uma equivalência sobre A e $S = A/E$, então $E_S = E$.*

(b) *Se S é uma partição de A e E_S é a equivalência correspondente, então $A/E_S = S$.*

Teorema

(a) *Se E é uma equivalência sobre A e $S = A/E$, então $E_S = E$.*

(b) *Se S é uma partição de A e E_S é a equivalência correspondente, então $A/E_S = S$.*

Definição

Um conjunto $X \subseteq A$ é chamado de um conjunto de representantes *para a equivalência E_S (ou para a partição S de A) se para todo $C \in S$, $X \cap C = \{a\}$ para algum $a \in C$.*

Definição

Uma relação binária R em A é antissimétrica *se para todos* $a, b \in A$, *aRb e bRa implica* $a = b$.

Definição

Uma relação binária R em A é antissimétrica *se para todos $a, b \in A$, aRb e bRa implica $a = b$.*

Definição (Ordenação parcial)

Uma relação binária R em A que é reflexiva, antissimétrica, e transitiva é chamada de um ordenação (parcial) *de A.*

Definição

Uma relação binária R em A é antissimétrica *se para todos $a, b \in A$, aRb e bRa implica $a = b$.*

Definição (Ordenação parcial)

Uma relação binária R em A que é reflexiva, antissimétrica, e transitiva é chamada de um ordenação (parcial) *de A. O par (A, R) é chamado de* conjunto (parcialmente) ordenado.

Definição

Uma relação S em A é assiméetrica *se aSb implica que bSa não se verifica (para nenhum* $a, b \in A$*).*

Definição

Uma relação S em A é assiméetrica *se aSb implica que bSa não se verifica (para nenhum $a, b \in A$).*

Definição (Ordenação estrita)

Uma relação S em A é uma ordenação estrita *se ela for assimétrica e transitiva.*

Teorema

(a) *Seja R uma ordenação de A; então a relação S definida em A por*

Teorema

(a) *Seja R uma ordenação de A; então a relação S definida em A por*

$$aSb \qquad \text{se e somente se} \qquad aRb \text{ e } a \neq b$$

Teorema

(a) *Seja R uma ordenação de A; então a relação S definida em A por*

$$aSb \qquad \text{se e somente se} \qquad aRb \text{ e } a \neq b$$

é uma ordenação estrita de A.

Teorema

(a) *Seja R uma ordenação de A; então a relação S definida em A por*

$$aSb \qquad \text{se e somente se} \qquad aRb \text{ e } a \neq b$$

é uma ordenação estrita de A.

(b) *Seja S uma ordenação estrita de A; então a relação R definida em A por*

Teorema

(a) *Seja R uma ordenação de A; então a relação S definida em A por*

$$aSb \qquad \text{se e somente se} \qquad aRb \text{ e } a \neq b$$

é uma ordenação estrita de A.

(b) *Seja S uma ordenação estrita de A; então a relação R definida em A por*

$$aRB \qquad \text{se e somente se} \qquad aSb \text{ ou } a = b$$

é uma ordenação de A.

Definição (Ordenação linear)

Uma ordenação $\leq$ *(ou* $<$*) de* A *é chamada de* linear *ou* total *se quaisquer dois elementos de* A *forem comparáveis.*

Definição (Ordenação linear)

Uma ordenação $\leq$ (ou $<$) de A é chamada de linear *ou* total *se quaisquer dois elementos de A forem comparáveis. O par $(A, \leq)$ é então chamado de* conjunto linearmente ordenado*.*

Definição (Ordenação linear)

Uma ordenação $\leq$ (ou $<$) de A é chamada de linear *ou* total *se quaisquer dois elementos de A forem comparáveis. O par $(A, \leq)$ é então chamado de* conjunto linearmente ordenado.

Definição (Cadeia)

Seja $B \subseteq A$, onde A é ordenado por $\leq$.

Definição (Ordenação linear)

Uma ordenação $\leq$ (ou $<$) de A é chamada de linear *ou* total *se quaisquer dois elementos de A forem comparáveis. O par $(A, \leq)$ é então chamado de* conjunto linearmente ordenado*.*

Definição (Cadeia)

Seja $B \subseteq A$, onde A é ordenado por $\leq$. B é uma cadeia em *A se quaisquer dois elementos de B forem comparáveis.*

Definição

Seja $\leq$ uma ordenação de A, e suponha que $B \subseteq A$.

Definição

Seja $\leq$ uma ordenação de A, e suponha que $B \subseteq A$.

(a) *$b \in B$ é o elemento* mínimo *de B na ordenação $\leq$ se $b \leq x$ para todo $x \in B$.*

Definição

Seja $\leq$ uma ordenação de A, e suponha que $B \subseteq A$.

(a) *$b \in B$ é o elemento* mínimo *de B na ordenação $\leq$ se $b \leq x$ para todo $x \in B$.*

(b) *$b \in B$ é um elemento* minimal *de B na ordenação $\leq$ se não existe nenhum $x \in B$ tal que $tx \leq b$ e $x \neq b$.*

Definição

Seja $\leq$ uma ordenação de A, e suponha que $B \subseteq A$.

(a) *$b \in B$ é o elemento* mínimo *de B na ordenação $\leq$ se $b \leq x$ para todo $x \in B$.*

(b) *$b \in B$ é um elemento* minimal *de B na ordenação $\leq$ se não existe nenhum $x \in B$ tal que t$x \leq b$ e $x \neq b$.*

(c) *$b \in B$ é o elemento* máximo *de B na ordenação $\leq$ se $x \leq b$ para todo $x \in B$.*

Definição

Seja $\leq$ uma ordenação de A, e suponha que $B \subseteq A$.

(a) *$b \in B$ é o elemento* mínimo *de B na ordenação $\leq$ se $b \leq x$ para todo $x \in B$.*

(b) *$b \in B$ é um elemento* minimal *de B na ordenação $\leq$ se não existe nenhum $x \in B$ tal que $tx \leq b$ e $x \neq b$.*

(c) *$b \in B$ é o elemento* máximo *de B na ordenação $\leq$ se $x \leq b$ para todo $x \in B$.*

(d) *$b \in B$ é um elemento* maximal *de B na ordenação $\leq$ se não existe nenhum $x \in B$ tal que $b \leq x$ e $x \neq b$.*

Definição (Diagramas de Hasse)

Seja A um conjunto ordenado.

Definição (Diagramas de Hasse)

Seja A um conjunto ordenado. Representa-se cada membro de A como um vértice de um grafo não-orientado no qual uma aresta sobe de x a y se $x < y$, e não existe z tal que $x < z < y$.

Definição (Diagramas de Hasse)

Seja A um conjunto ordenado. Representa-se cada membro de A como um vértice de um grafo não-orientado no qual uma aresta sobe de x a y se $x < y$, e não existe z tal que $x < z < y$. Nesse caso, dizemos que y cobre *x, ou y é um* sucessor imediato *de x.*

Definição (Diagramas de Hasse)

Seja A um conjunto ordenado. Representa-se cada membro de A como um vértice de um grafo não-orientado no qual uma aresta sobe de x a y se $x < y$, e não existe z tal que $x < z < y$. Nesse caso, dizemos que y cobre *x, ou y é um* sucessor imediato *de x. Além do mais, exige-se que os vértices estejam posicionados de tal maneira que cada aresta liga exatamente dois vértices: suas extremidades.*

Teorema

Suponha que A seja ordenado por $\leq$, e que $B \subseteq A$.

Teorema

Suponha que A seja ordenado por $\leq$, e que $B \subseteq A$.

(a) *B tem no máximo um elemento mínimo.*

Teorema

Suponha que A seja ordenado por $\leq$, e que $B \subseteq A$.

(a) *B tem no máximo um elemento mínimo.*

(b) *O elemento mínimo de B (se existe) é também minimal.*

Teorema

Suponha que A seja ordenado por $\leq$, e que $B \subseteq A$.

(a) *B tem no máximo um elemento mínimo.*

(b) *O elemento mínimo de B (se existe) é também minimal.*

(c) *Se B é uma cadeia, então todo elemento minimal de B é também mínimo.*

Definição

Seja $\leq$ uma ordenação de A, e suponha que $B \subseteq A$.

Definição

Seja $\leq$ uma ordenação de A, e suponha que $B \subseteq A$.

(a) *$a \in A$ é um* limitante inferior *de B no conjunto ordenado $(A, \leq)$ se $a \leq x$ para todo $x \in B$.*

Definição

Seja $\leq$ uma ordenação de A, e suponha que $B \subseteq A$.

(a) *$a \in A$ é um* limitante inferior *de B no conjunto ordenado $(A, \leq)$ se $a \leq x$ para todo $x \in B$.*

(b) *$a \in A$ é chamado de* ínfimo *(ou* maior limitante inferior*) de B em $(A, \leq)$ se ele é o elemento máximo do conjunto de todos os limitantes inferiores de B em $(A, \leq)$.*

Definição

Seja $\leq$ uma ordenação de A, e suponha que $B \subseteq A$.

(a) *$a \in A$ é um* limitante inferior *de B no conjunto ordenado $(A, \leq)$ se $a \leq x$ para todo $x \in B$.*

(b) *$a \in A$ é chamado de* ínfimo *(ou* maior limitante inferior*) de B em $(A, \leq)$ se ele é o elemento máximo do conjunto de todos os limitantes inferiores de B em $(A, \leq)$.*

(c) *$a \in A$ é um* limitante superior *de B no conjunto ordenado $(A, \leq)$ se $x \leq a$ para todo $x \in B$.*

Definição

Seja $\leq$ uma ordenação de A, e suponha que $B \subseteq A$.

(a) *$a \in A$ é um* limitante inferior *de B no conjunto ordenado $(A, \leq)$ se $a \leq x$ para todo $x \in B$.*

(b) *$a \in A$ é chamado de* ínfimo *(ou* maior limitante inferior*) de B em $(A, \leq)$ se ele é o elemento máximo do conjunto de todos os limitantes inferiores de B em $(A, \leq)$.*

(c) *$a \in A$ é um* limitante superior *de B no conjunto ordenado $(A, \leq)$ se $x \leq a$ para todo $x \in B$.*

(d) *$a \in A$ é chamado de* supremo *(ou* menor limitante superior*) de B em $(A, \leq)$ se ele é o elemento mínimo do conjunto de todos os limitantes superiores de B em $(A, \leq)$.*

Teorema

Seja $(A, \leq)$ um conjunto ordenado e suponha que $B \subseteq A$.

Teorema

Seja $(A, \leq)$ *um conjunto ordenado e suponha que* $B \subseteq A$.

(a) *B tem no máximo um ínfimo.*

Teorema

Seja $(A, \leq)$ um conjunto ordenado e suponha que $B \subseteq A$.

(a) *B tem no máximo um ínfimo.*

(b) *Se b é o elemento mínimo de B, então b é o ínfimo de B.*

Teorema

Seja $(A, \leq)$ um conjunto ordenado e suponha que $B \subseteq A$.

(a) *B tem no máximo um ínfimo.*

(b) *Se b é o elemento mínimo de B, então b é o ínfimo de B.*

(c) *Se b é o ínfimo de B e $b \in B$, então b é o elemento mínimo de B.*

Teorema

Seja $(A, \leq)$ um conjunto ordenado e suponha que $B \subseteq A$.

(a) *B tem no máximo um ínfimo.*
(b) *Se b é o elemento mínimo de B, então b é o ínfimo de B.*
(c) *Se b é o ínfimo de B e $b \in B$, então b é o elemento mínimo de B.*
(d) *$b \in A$ é um ínfimo de B em $(A, \leq)$ se e somente se*

Teorema

Seja $(A, \leq)$ um conjunto ordenado e suponha que $B \subseteq A$.

(a) *B tem no máximo um ínfimo.*

(b) *Se b é o elemento mínimo de B, então b é o ínfimo de B.*

(c) *Se b é o ínfimo de B e $b \in B$, então b é o elemento mínimo de B.*

(d) *$b \in A$ é um ínfimo de B em $(A, \leq)$ se e somente se*

   (i) *$b \leq x$ para todo $x \in B$.*

Teorema

Seja $(A, \leq)$ um conjunto ordenado e suponha que $B \subseteq A$.

(a) *B tem no máximo um ínfimo.*

(b) *Se b é o elemento mínimo de B, então b é o ínfimo de B.*

(c) *Se b é o ínfimo de B e $b \in B$, então b é o elemento mínimo de B.*

(d) *$b \in A$ é um ínfimo de B em $(A, \leq)$ se e somente se*

   (i) *$b \leq x$ para todo $x \in B$.*

   (ii) *Se $b' \leq x$ para todo $x \in B$, então $b' \leq b$.*

Demonstração.

Tome qualquer $B \subseteq A$.

Demonstração.

Tome qualquer $B \subseteq A$.

(a) O conjunto de limitantes inferiores de B pode ter no máximo um elemento máximo (se é que ele existe).

Demonstração.

Tome qualquer $B \subseteq A$.

(a) O conjunto de limitantes inferiores de B pode ter no máximo um elemento máximo (se é que ele existe). Portanto, B pode ter no máximo um ínfimo.

Demonstração.

Tome qualquer $B \subseteq A$.

(a) O conjunto de limitantes inferiores de B pode ter no máximo um elemento máximo (se é que ele existe). Portanto, B pode ter no máximo um ínfimo.

(b) O elemento mínimo b de B é um limitante inferior de B.

Demonstração.

Tome qualquer $B \subseteq A$.

(a) O conjunto de limitantes inferiores de B pode ter no máximo um elemento máximo (se é que ele existe). Portanto, B pode ter no máximo um ínfimo.

(b) O elemento mínimo b de B é um limitante inferior de B. Se b' for qualquer outro limitante inferior de B, $b' \leq b$ pois $b \in B$.

Demonstração.

Tome qualquer $B \subseteq A$.

(a) O conjunto de limitantes inferiores de B pode ter no máximo um elemento máximo (se é que ele existe). Portanto, B pode ter no máximo um ínfimo.

(b) O elemento mínimo b de B é um limitante inferior de B. Se b' for qualquer outro limitante inferior de B, $b' \leq b$ pois $b \in B$. Portanto, b é o maior limitante inferior do conjunto de todos os limitantes inferiores de B.

Demonstração.

Tome qualquer $B \subseteq A$.

(a) O conjunto de limitantes inferiores de B pode ter no máximo um elemento máximo (se é que ele existe). Portanto, B pode ter no máximo um ínfimo.

(b) O elemento mínimo b de B é um limitante inferior de B. Se b' for qualquer outro limitante inferior de B, $b' \leq b$ pois $b \in B$. Portanto, b é o maior limitante inferior do conjunto de todos os limitantes inferiores de B.

(c) Se b é o ínfimo de B (i.e. b é o maior de todos os limitantes inferiores de B), e $b \in B$ (poderia ser o contrário), então obviamente b é o elemento mínimo de B.

Demonstração.

Tome qualquer $B \subseteq A$.

(a) O conjunto de limitantes inferiores de B pode ter no máximo um elemento máximo (se é que ele existe). Portanto, B pode ter no máximo um ínfimo.

(b) O elemento mínimo b de B é um limitante inferior de B. Se b' for qualquer outro limitante inferior de B, $b' \leq b$ pois $b \in B$. Portanto, b é o maior limitante inferior do conjunto de todos os limitantes inferiores de B.

(c) Se b é o ínfimo de B (i.e. b é o maior de todos os limitantes inferiores de B), e $b \in B$ (poderia ser o contrário), então obviamente b é o elemento mínimo de B.

(d) É uma reformulação da definição.

$\square$

Definição

Um isomorfismo *entre dois conjuntos ordenados* $(P, \prec_P)$ *e* $(Q, \prec_Q)$ *é uma função um-para-um h com domínio P e contradomínio Q tal que para todos* $p_1, p_2 \in P$

Definição

Um isomorfismo *entre dois conjuntos ordenados* $(P, \prec_P)$ *e* $(Q, \prec_Q)$ *é uma função um-para-um h com domínio P e contradomínio Q tal que para todos* $p_1, p_2 \in P$

$$p_1 \prec_P p_2 \qquad \textit{se e somente se} \qquad h(p_1) \prec_Q h(p_2).$$

Definição

Um isomorfismo *entre dois conjuntos ordenados* $(P, \prec_P)$ *e* $(Q, \prec_Q)$ *é uma função um-para-um* h *com domínio* P *e contradomínio* Q *tal que para todos* $p_1, p_2 \in P$

$$p_1 \prec_P p_2 \qquad \text{se e somente se} \qquad h(p_1) \prec_Q h(p_2).$$

Lema

Sejam $(P, \prec_P)$ *e* $(Q, \prec_Q)$ *conjuntos linearmente ordenados, e suponha que* h *seja uma função um-para-um com domínio* P *e contradomínio* Q *tal que* $h(p_1) \prec_Q h(p_2)$ *sempre que* $p_1 \prec_P p_2$.

Definição

Um isomorfismo *entre dois conjuntos ordenados* $(P, \prec_P)$ *e* $(Q, \prec_Q)$ *é uma função um-para-um* h *com domínio* P *e contradomínio* Q *tal que para todos* $p_1, p_2 \in P$

$$p_1 \prec_P p_2 \qquad \text{se e somente se} \qquad h(p_1) \prec_Q h(p_2).$$

Lema

Sejam $(P, \prec_P)$ *e* $(Q, \prec_Q)$ *conjuntos linearmente ordenados, e suponha que* h *seja uma função um-para-um com domínio* P *e contradomínio* Q *tal que* $h(p_1) \prec_Q h(p_2)$ *sempre que* $p_1 \prec_P p_2$*. Então* h *é um isomorfismo entre* $(P, \prec_P)$ *e* $(Q, \prec_Q)$*.*

Demonstração.

Precisamos mostrar que se $p_1, p_2 \in P$ e $h(p_1) \prec_Q h(p_2)$, então $p_1 \prec_P p_2$.

Demonstração.

Precisamos mostrar que se $p_1, p_2 \in P$ e $h(p_1) \prec_Q h(p_2)$, então $p_1 \prec_P p_2$. Mas, como $\prec_P$ é uma ordenação linear de P, se p_1 não é menor que p_2, então ou $p_1 = p_2$ ou $p_2 \prec_P p_1$.

Demonstração.

Precisamos mostrar que se $p_1, p_2 \in P$ e $h(p_1) \prec_Q h(p_2)$, então $p_1 \prec_P p_2$. Mas, como $\prec_P$ é uma ordenação linear de P, se p_1 não é menor que p_2, então ou $p_1 = p_2$ ou $p_2 \prec_P p_1$. No caso em que $p_1 = p_2$ temos $h(p_1) = h(p_2)$, e se $p_2 \prec_P p_1$ então $h(p_2) \prec_Q h(p_1)$ por hipótese.

Demonstração.

Precisamos mostrar que se $p_1, p_2 \in P$ e $h(p_1) \prec_Q h(p_2)$, então $p_1 \prec_P p_2$. Mas, como $\prec_P$ é uma ordenação linear de P, se p_1 não é menor que p_2, então ou $p_1 = p_2$ ou $p_2 \prec_P p_1$. No caso em que $p_1 = p_2$ temos $h(p_1) = h(p_2)$, e se $p_2 \prec_P p_1$ então $h(p_2) \prec_Q h(p_1)$ por hipótese. Em qualquer dos casos temos uma contradição com a hipótese que $h(p_1) \prec_P h(p_2)$. $\square$