Teoria dos Conjuntos (Aula 3)

Ruy J. G. B. de Queiroz

Centro de Informática, UFPE

2017.1

Conteúdo

Definição (Função)

Uma relação binária F é chamada de função *(ou* mapeamento, correspondência*) se aFb_1 e aFb_2 implica $b_1 = b_2$ para quaisquer a, b_1, b_2.*

Definição (Função)

Uma relação binária F é chamada de função *(ou* mapeamento, correspondência*) se aFb_1 e aFb_2 implica $b_1 = b_2$ para quaisquer a, b_1, b_2.*
Notação: *Se F é uma função com $\mathrm{dom}\, F = A$ e $\mathrm{ran}\, F \subseteq B$, escrevemos:*

Definição (Função)

Uma relação binária F é chamada de função *(ou* mapeamento, correspondência*) se aFb_1 e aFb_2 implica $b_1 = b_2$ para quaisquer a, b_1, b_2.*
Notação: *Se F é uma função com $\operatorname{dom} F = A$ e $\operatorname{ran} F \subseteq B$, escrevemos:*
$F : A \to B$ ou

Definição (Função)

Uma relação binária F é chamada de função *(ou* mapeamento, correspondência*) se aFb_1 e aFb_2 implica $b_1 = b_2$ para quaisquer a, b_1, b_2.*
Notação: *Se F é uma função com $\mathrm{dom}\, F = A$ e $\mathrm{ran}\, F \subseteq B$, escrevemos:*
$F : A \to B$ ou $\langle F(a) \mid a \in A \rangle$ ou

Definição (Função)

Uma relação binária F é chamada de função *(ou* mapeamento, correspondência*) se aFb_1 e aFb_2 implica $b_1 = b_2$ para quaisquer a, b_1, b_2.*
Notação: *Se F é uma função com $\operatorname{dom} F = A$ e $\operatorname{ran} F \subseteq B$, escrevemos:*
$F : A \to B$ ou $\langle F(a) \mid a \in A \rangle$ ou $\langle F_a \mid a \in A \rangle$.

Definição (Função)

Uma relação binária F é chamada de função *(ou* mapeamento, correspondência*) se aFb_1 e aFb_2 implica $b_1 = b_2$ para quaisquer a, b_1, b_2.*
Notação: *Se F é uma função com $\operatorname{dom} F = A$ e $\operatorname{ran} F \subseteq B$, escrevemos:*
$F : A \to B$ ou $\quad \langle F(a) \mid a \in A \rangle$ ou $\quad \langle F_a \mid a \in A \rangle$.

Lema

Sejam F e G funções. $F = G$ se e somente se

Definição (Função)

Uma relação binária F é chamada de função *(ou* mapeamento, correspondência*) se aFb_1 e aFb_2 implica $b_1 = b_2$ para quaisquer a, b_1, b_2.*
Notação: *Se F é uma função com $\mathrm{dom}\, F = A$ e $\mathrm{ran}\, F \subseteq B$, escrevemos:*
$F : A \to B$ ou $\langle F(a) \mid a \in A \rangle$ ou $\langle F_a \mid a \in A \rangle$.

Lema

Sejam F e G funções. $F = G$ se e somente se $\mathrm{dom}\, F = \mathrm{dom}\, G$ e

Definição (Função)

Uma relação binária F é chamada de função *(ou* mapeamento, correspondência*) se aFb_1 e aFb_2 implica $b_1 = b_2$ para quaisquer a, b_1, b_2.*
Notação: *Se F é uma função com $\operatorname{dom} F = A$ e $\operatorname{ran} F \subseteq B$, escrevemos:*
$F : A \to B$ *ou* $\langle F(a) \mid a \in A \rangle$ *ou* $\langle F_a \mid a \in A \rangle$.

Lema

Sejam F e G funções. $F = G$ se e somente se $\operatorname{dom} F = \operatorname{dom} G$ e $F(x) = G(x)$ para todo $x \in \operatorname{dom} G$.

Definição

(a) *F é uma função* sobre *A se* $\operatorname{dom} F = A$.

Definição

(a) *F é uma função* sobre *A se* $\operatorname{dom} F = A$.

(b) *F é uma função* em *B se* $\operatorname{ran} F \subseteq B$.

Definição

(a) *F é uma função* sobre *A se* $\operatorname{dom} F = A$.

(b) *F é uma função* em *B se* $\operatorname{ran} F \subseteq B$.

(c) *F é uma função* com *B se* $\operatorname{ran} F = B$.

Definição

(a) *F é uma função* sobre *A se* $\operatorname{dom} F = A$.

(b) *F é uma função* em *B se* $\operatorname{ran} F \subseteq B$.

(c) *F é uma função* com *B se* $\operatorname{ran} F = B$.

(d) *A* restrição *da função F* a *A é a função*

Definição

(a) *F é uma função* sobre *A se* $\operatorname{dom} F = A$.

(b) *F é uma função* em *B se* $\operatorname{ran} F \subseteq B$.

(c) *F é uma função* com *B se* $\operatorname{ran} F = B$.

(d) *A* restrição *da função F* a *A é a função*

$$F \restriction A = \{(a, b) \in F \mid a \in A\}.$$

Definição

(a) *F é uma função* sobre *A se* $\operatorname{dom} F = A$*.*

(b) *F é uma função* em *B se* $\operatorname{ran} F \subseteq B$*.*

(c) *F é uma função* com *B se* $\operatorname{ran} F = B$*.*

(d) *A* restrição *da função F* a *A é a função*

$$F \upharpoonright A = \{(a, b) \in F \mid a \in A\}.$$

Se G for uma restrição de F a algum A,

Definição

(a) *F é uma função* sobre *A se* $\operatorname{dom} F = A$.

(b) *F é uma função* em *B se* $\operatorname{ran} F \subseteq B$.

(c) *F é uma função* com *B se* $\operatorname{ran} F = B$.

(d) *A* restrição *da função F a A é a função*

$$F \restriction A = \{(a, b) \in F \mid a \in A\}.$$

Se G for uma restrição de F a algum A,dizemos que F é uma extensão *de G.*

Teorema

Sejam f e g funções. Então $g \circ f$ é uma função.

Teorema

Sejam f e g funções. Então $g \circ f$ é uma função. $g \circ f$ está definida em x se e somente se f está definida em x e g está definida em $f(x)$, i.e.,

Teorema

Sejam f e g funções. Então $g \circ f$ é uma função. $g \circ f$ está definida em x se e somente se f está definida em x e g está definida em $f(x)$, i.e.,

$$\mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom}\, f \cap f^{-1}[\mathrm{dom}\, g].$$

Teorema

Sejam f e g funções. Então $g \circ f$ é uma função. $g \circ f$ está definida em x se e somente se f está definida em x e g está definida em $f(x)$, i.e.,

$$\operatorname{dom}(g \circ f) = \operatorname{dom} f \cap f^{-1}[\operatorname{dom} g].$$

Além disso, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ para todo $x \in \operatorname{dom}(g \circ f)$.

Demonstração.

Primeiro, temos que provar que $g \circ f$ é de fato uma função.

Demonstração.

Primeiro, temos que provar que $g \circ f$ é de fato uma função. Agora, se $x(g \circ f)z_1$ e $x(g \circ f)z_2$, então, da definição de composição de funções, existe y_1 e y_2 tais que xfy_1 e $y_1 g z_1$, xfy_2 e $y_2 g z_2$.

Demonstração.

Primeiro, temos que provar que $g \circ f$ é de fato uma função. Agora, se $x(g \circ f)z_1$ e $x(g \circ f)z_2$, então, da definição de composição de funções, existe y_1 e y_2 tais que xfy_1 e $y_1 g z_1$, xfy_2 e $y_2 g z_2$. Como f é uma função, temos que ter $y_1 = y_2$.

Demonstração.

Primeiro, temos que provar que $g \circ f$ é de fato uma função. Agora, se $x(g \circ f)z_1$ e $x(g \circ f)z_2$, então, da definição de composição de funções, existe y_1 e y_2 tais que xfy_1 e $y_1 g z_1$, xfy_2 e $y_2 g z_2$. Como f é uma função, temos que ter $y_1 = y_2$. Portanto, $y_1 g z_1$ (o que já temos) juntamente com $y_1 g z_2$ dá origem a $z_1 = z_2$ pois g também é uma função.

Demonstração.

Primeiro, temos que provar que $g \circ f$ é de fato uma função. Agora, se $x(g \circ f)z_1$ e $x(g \circ f)z_2$, então, da definição de composição de funções, existe y_1 e y_2 tais que xfy_1 e $y_1 g z_1$, xfy_2 e $y_2 g z_2$. Como f é uma função, temos que ter $y_1 = y_2$. Portanto, $y_1 g z_1$ (o que já temos) juntamente com $y_1 g z_2$ dá origem a $z_1 = z_2$ pois g também é uma função.
Agora, vamos olhar para o domínio de $g \circ f$.

Demonstração.

Primeiro, temos que provar que $g \circ f$ é de fato uma função. Agora, se $x(g \circ f)z_1$ e $x(g \circ f)z_2$, então, da definição de composição de funções, existe y_1 e y_2 tais que xfy_1 e $y_1 g z_1$, xfy_2 e $y_2 g z_2$. Como f é uma função, temos que ter $y_1 = y_2$. Portanto, $y_1 g z_1$ (o que já temos) juntamente com $y_1 g z_2$ dá origem a $z_1 = z_2$ pois g também é uma função.
Agora, vamos olhar para o domínio de $g \circ f$. Da definição do domínio de uma função,

Demonstração.

Primeiro, temos que provar que $g \circ f$ é de fato uma função. Agora, se $x(g \circ f)z_1$ e $x(g \circ f)z_2$, então, da definição de composição de funções, existe y_1 e y_2 tais que xfy_1 e $y_1 g z_1$, xfy_2 e $y_2 g z_2$. Como f é uma função, temos que ter $y_1 = y_2$. Portanto, $y_1 g z_1$ (o que já temos) juntamente com $y_1 g z_2$ dá origem a $z_1 = z_2$ pois g também é uma função.
Agora, vamos olhar para o domínio de $g \circ f$. Da definição do domínio de uma função, $x \in \mathrm{dom}(g \circ f)$ se e somente se existe um z tal que xfy e ygz.

Demonstração.

Primeiro, temos que provar que $g \circ f$ é de fato uma função. Agora, se $x(g \circ f)z_1$ e $x(g \circ f)z_2$, então, da definição de composição de funções, existe y_1 e y_2 tais que xfy_1 e y_1gz_1, xfy_2 e y_2gz_2. Como f é uma função, temos que ter $y_1 = y_2$. Portanto, y_1gz_1 (o que já temos) juntamente com y_1gz_2 dá origem a $z_1 = z_2$ pois g também é uma função.
Agora, vamos olhar para o domínio de $g \circ f$. Da definição do domínio de uma função, $x \in \mathrm{dom}(g \circ f)$ se e somente se existe um z tal que xfy e ygz. Mas isso se verifica se e somente se $x \in \mathrm{dom}\, f$ e $y = f(x) \in \mathrm{dom}\, g$.

Demonstração.

Primeiro, temos que provar que $g \circ f$ é de fato uma função. Agora, se $x(g \circ f)z_1$ e $x(g \circ f)z_2$, então, da definição de composição de funções, existe y_1 e y_2 tais que xfy_1 e y_1gz_1, xfy_2 e y_2gz_2. Como f é uma função, temos que ter $y_1 = y_2$. Portanto, y_1gz_1 (o que já temos) juntamente com y_1gz_2 dá origem a $z_1 = z_2$ pois g também é uma função.
Agora, vamos olhar para o domínio de $g \circ f$. Da definição do domínio de uma função, $x \in \mathrm{dom}(g \circ f)$ se e somente se existe um z tal que xfy e ygz. Mas isso se verifica se e somente se $x \in \mathrm{dom}\, f$ e $y = f(x) \in \mathrm{dom}\, g$. Logo, $x \in \mathrm{dom}\, f$ e $x \in f^{-1}[\mathrm{dom}\, g]$,

Demonstração.

Primeiro, temos que provar que $g \circ f$ é de fato uma função. Agora, se $x(g \circ f)z_1$ e $x(g \circ f)z_2$, então, da definição de composição de funções, existe y_1 e y_2 tais que xfy_1 e $y_1 g z_1$, xfy_2 e $y_2 g z_2$. Como f é uma função, temos que ter $y_1 = y_2$. Portanto, $y_1 g z_1$ (o que já temos) juntamente com $y_1 g z_2$ dá origem a $z_1 = z_2$ pois g também é uma função.
Agora, vamos olhar para o domínio de $g \circ f$. Da definição do domínio de uma função, $x \in \mathrm{dom}(g \circ f)$ se e somente se existe um z tal que xfy e ygz. Mas isso se verifica se e somente se $x \in \mathrm{dom}\, f$ e $y = f(x) \in \mathrm{dom}\, g$. Logo, $x \in \mathrm{dom}\, f$ e $x \in f^{-1}[\mathrm{dom}\, g]$, que é o mesmo que

Demonstração.

Primeiro, temos que provar que $g \circ f$ é de fato uma função. Agora, se $x(g \circ f)z_1$ e $x(g \circ f)z_2$, então, da definição de composição de funções, existe y_1 e y_2 tais que xfy_1 e $y_1 g z_1$, xfy_2 e $y_2 g z_2$. Como f é uma função, temos que ter $y_1 = y_2$. Portanto, $y_1 g z_1$ (o que já temos) juntamente com $y_1 g z_2$ dá origem a $z_1 = z_2$ pois g também é uma função.

Agora, vamos olhar para o domínio de $g \circ f$. Da definição do domínio de uma função, $x \in \mathrm{dom}(g \circ f)$ se e somente se existe um z tal que xfy e ygz. Mas isso se verifica se e somente se $x \in \mathrm{dom}\, f$ e $y = f(x) \in \mathrm{dom}\, g$. Logo, $x \in \mathrm{dom}\, f$ e $x \in f^{-1}[\mathrm{dom}\, g]$, que é o mesmo que

$$x \in \mathrm{dom}(g \circ f) \quad \text{sse} \quad x \in \mathrm{dom}\, f \cap f^{-1}[\mathrm{dom}\, g]. \qquad \square$$

Exemplo

Suponha que $f = \langle x^2 - 1 \mid x \text{ real}\rangle$, $g = \langle \sqrt{x} \mid x \geq 0\rangle$.

Exemplo

Suponha que $f = \langle x^2 - 1 \mid x \text{ real} \rangle$, $g = \langle \sqrt{x} \mid x \geq 0 \rangle$. *Vamos encontrar a composta* $g \circ f$.

Exemplo

Suponha que $f = \langle x^2 - 1 \mid x \text{ real}\rangle$, $g = \langle \sqrt{x} \mid x \geq 0\rangle$. *Vamos encontrar a composta* $g \circ f$.

O domínio de $g \circ f$ *tem que ser determinado primeiro.*

Exemplo

Suponha que $f = \langle x^2 - 1 \mid x \text{ real}\rangle$, $g = \langle \sqrt{x} \mid x \geq 0\rangle$. *Vamos encontrar a composta* $g \circ f$.
O domínio de $g \circ f$ *tem que ser determinado primeiro. Da definição das funções* f *e* g, *temos que* $\operatorname{dom} f$ *é o conjunto de todos os números reais e* $\operatorname{dom} g = \{x \mid x \geq 0\}$.

Exemplo

Suponha que $f = \langle x^2 - 1 \mid x \text{ real}\rangle$, $g = \langle \sqrt{x} \mid x \geq 0\rangle$. *Vamos encontrar a composta* $g \circ f$.
O domínio de $g \circ f$ *tem que ser determinado primeiro. Da definição das funções* f *e* g, *temos que* $\operatorname{dom} f$ *é o conjunto de todos os números reais e* $\operatorname{dom} g = \{x \mid x \geq 0\}$. *Portanto, obtemos* $f^{-1}[\operatorname{dom} g] = \{x \mid f(x) \in \operatorname{dom} g\}$

Exemplo

Suponha que $f = \langle x^2 - 1 \mid x \text{ real}\rangle$, $g = \langle \sqrt{x} \mid x \geq 0\rangle$. *Vamos encontrar a composta* $g \circ f$.
O domínio de $g \circ f$ *tem que ser determinado primeiro. Da definição das funções* f *e* g, *temos que* $\operatorname{dom} f$ *é o conjunto de todos os números reais e* $\operatorname{dom} g = \{x \mid x \geq 0\}$. *Portanto, obtemos* $f^{-1}[\operatorname{dom} g] = \{x \mid f(x) \in \operatorname{dom} g\} = \{x \mid x^2 - 1 \geq 0\}$

Exemplo

Suponha que $f = \langle x^2 - 1 \mid x \text{ real} \rangle$, $g = \langle \sqrt{x} \mid x \geq 0 \rangle$. *Vamos encontrar a composta* $g \circ f$.

O domínio de $g \circ f$ *tem que ser determinado primeiro. Da definição das funções* f *e* g, *temos que* $\operatorname{dom} f$ *é o conjunto de todos os números reais e* $\operatorname{dom} g = \{x \mid x \geq 0\}$. *Portanto, obtemos* $f^{-1}[\operatorname{dom} g] = \{x \mid f(x) \in \operatorname{dom} g\} = \{x \mid x^2 - 1 \geq 0\}$ $= \{x \mid x \geq 1 \text{ ou } x \leq -1\}$.

Exemplo

Suponha que $f = \langle x^2 - 1 \mid x \text{ real} \rangle$, $g = \langle \sqrt{x} \mid x \geq 0 \rangle$. *Vamos encontrar a composta* $g \circ f$.
O domínio de $g \circ f$ *tem que ser determinado primeiro. Da definição das funções* f *e* g, *temos que* $\operatorname{dom} f$ *é o conjunto de todos os números reais e* $\operatorname{dom} g = \{x \mid x \geq 0\}$. *Portanto, obtemos* $f^{-1}[\operatorname{dom} g] = \{x \mid f(x) \in \operatorname{dom} g\} = \{x \mid x^2 - 1 \geq 0\}$ $= \{x \mid x \geq 1 \text{ ou } x \leq -1\}$. *Daí,*
$\operatorname{dom}(g \circ f) = (\operatorname{dom} f) \cap f^{-1}[\operatorname{dom} g]$

Exemplo

Suponha que $f = \langle x^2 - 1 \mid x \text{ real} \rangle$, $g = \langle \sqrt{x} \mid x \geq 0 \rangle$. *Vamos encontrar a composta* $g \circ f$.

O domínio de $g \circ f$ *tem que ser determinado primeiro. Da definição das funções* f *e* g, *temos que* $\operatorname{dom} f$ *é o conjunto de todos os números reais e* $\operatorname{dom} g = \{x \mid x \geq 0\}$. *Portanto, obtemos* $f^{-1}[\operatorname{dom} g] = \{x \mid f(x) \in \operatorname{dom} g\} = \{x \mid x^2 - 1 \geq 0\}$ $= \{x \mid x \geq 1 \text{ ou } x \leq -1\}$. *Daí,*
$\operatorname{dom}(g \circ f) = (\operatorname{dom} f) \cap f^{-1}[\operatorname{dom} g] = \{x \mid x \geq 1 \text{ ou } x \leq -1\}$ *e*
$g \circ f = \{(x, z) \mid x \geq 1 \text{ ou } x \leq -1$

Exemplo

Suponha que $f = \langle x^2 - 1 \mid x \text{ real} \rangle$, $g = \langle \sqrt{x} \mid x \geq 0 \rangle$. *Vamos encontrar a composta* $g \circ f$.

O domínio de $g \circ f$ *tem que ser determinado primeiro. Da definição das funções* f *e* g, *temos que* $\operatorname{dom} f$ *é o conjunto de todos os números reais e* $\operatorname{dom} g = \{x \mid x \geq 0\}$. *Portanto, obtemos* $f^{-1}[\operatorname{dom} g] = \{x \mid f(x) \in \operatorname{dom} g\} = \{x \mid x^2 - 1 \geq 0\}$ $= \{x \mid x \geq 1 \text{ ou } x \leq -1\}$. *Daí,*
$\operatorname{dom}(g \circ f) = (\operatorname{dom} f) \cap f^{-1}[\operatorname{dom} g] = \{x \mid x \geq 1 \text{ ou } x \leq -1\}$ *e*
$g \circ f = \{(x, z) \mid x \geq 1 \text{ ou } x \leq -1$ *e, para algum* y,
$x^2 - 1 = y \text{ e } \sqrt{y} = z\} = \langle \sqrt{x^2 - 1} \mid x \geq 1 \text{ ou } x \leq -1 \rangle$.

Definição

Uma função é chamada de um-para-um *ou* injetora *se* $a_1 \in \operatorname{dom} f$, $a_2 \in \operatorname{dom} f$, *e* $a_1 \neq a_2$ *implica* $f(a_1) \neq f(a_2)$.

Definição

Uma função é chamada de um-para-um *ou* injetora *se* $a_1 \in \mathrm{dom}\, f$, $a_2 \in \mathrm{dom}\, f$, *e* $a_1 \neq a_2$ *implica* $f(a_1) \neq f(a_2)$.

Teorema

Uma função é inversível se e somente se ela for um-para-um. Se f for inversível, então f^{-1} também é inversível e $(f^{-1})^{-1} = f$.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Suponha que f seja inversível. Então f^{-1} é uma função.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Suponha que f seja inversível. Então f^{-1} é uma função. Daí, $f^{-1}(f(a)) = a$ para todo $a \in \operatorname{dom} f$.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Suponha que f seja inversível. Então f^{-1} é uma função. Daí, $f^{-1}(f(a)) = a$ para todo $a \in \operatorname{dom} f$. Agora, se $a_1, a_2 \in \operatorname{dom} f$ e $f(a_1) = f(a_2)$,

Demonstração.

($\Rightarrow$) Suponha que f seja inversível. Então f^{-1} é uma função. Daí, $f^{-1}(f(a)) = a$ para todo $a \in \operatorname{dom} f$. Agora, se $a_1, a_2 \in \operatorname{dom} f$ e $f(a_1) = f(a_2)$, obtemos $f^{-1}(f(a_1)) = f^{-1}(f(a_2))$ e $a_1 = a_2$.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Suponha que f seja inversível. Então f^{-1} é uma função. Daí, $f^{-1}(f(a)) = a$ para todo $a \in \operatorname{dom} f$. Agora, se $a_1, a_2 \in \operatorname{dom} f$ e $f(a_1) = f(a_2)$, obtemos $f^{-1}(f(a_1)) = f^{-1}(f(a_2))$ e $a_1 = a_2$. Logo, f é um-para-um.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Suponha que f seja inversível. Então f^{-1} é uma função. Daí, $f^{-1}(f(a)) = a$ para todo $a \in \operatorname{dom} f$. Agora, se $a_1, a_2 \in \operatorname{dom} f$ e $f(a_1) = f(a_2)$, obtemos $f^{-1}(f(a_1)) = f^{-1}(f(a_2))$ e $a_1 = a_2$. Logo, f é um-para-um.
($\Leftarrow$) Agora, suponha que f seja um-para-um.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Suponha que f seja inversível. Então f^{-1} é uma função. Daí, $f^{-1}(f(a)) = a$ para todo $a \in \operatorname{dom} f$. Agora, se $a_1, a_2 \in \operatorname{dom} f$ e $f(a_1) = f(a_2)$, obtemos $f^{-1}(f(a_1)) = f^{-1}(f(a_2))$ e $a_1 = a_2$. Logo, f é um-para-um.
($\Leftarrow$) Agora, suponha que f seja um-para-um. Assuma também que a relação f^{-1} seja tal que $af^{-1}b_1$ e $af^{-1}b_2$.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Suponha que f seja inversível. Então f^{-1} é uma função. Daí, $f^{-1}(f(a)) = a$ para todo $a \in \operatorname{dom} f$. Agora, se $a_1, a_2 \in \operatorname{dom} f$ e $f(a_1) = f(a_2)$, obtemos $f^{-1}(f(a_1)) = f^{-1}(f(a_2))$ e $a_1 = a_2$. Logo, f é um-para-um.

($\Leftarrow$) Agora, suponha que f seja um-para-um. Assuma também que a relação f^{-1} seja tal que $af^{-1}b_1$ e $af^{-1}b_2$. Então, da definição de f^{-1}, temos $b_1 fa$ e $b_2 fa$. Como f é um-para-um, temos que $b_1 = b_2$,

Demonstração.

($\Rightarrow$) Suponha que f seja inversível. Então f^{-1} é uma função. Daí, $f^{-1}(f(a)) = a$ para todo $a \in \operatorname{dom} f$. Agora, se $a_1, a_2 \in \operatorname{dom} f$ e $f(a_1) = f(a_2)$, obtemos $f^{-1}(f(a_1)) = f^{-1}(f(a_2))$ e $a_1 = a_2$. Logo, f é um-para-um.
($\Leftarrow$) Agora, suponha que f seja um-para-um. Assuma também que a relação f^{-1} seja tal que $af^{-1}b_1$ e $af^{-1}b_2$. Então, da definição de f^{-1}, temos $b_1 fa$ e $b_2 fa$. Como f é um-para-um, temos que $b_1 = b_2$, o que significa dizer que f^{-1} é de fato uma função.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Suponha que f seja inversível. Então f^{-1} é uma função. Daí, $f^{-1}(f(a)) = a$ para todo $a \in \operatorname{dom} f$. Agora, se $a_1, a_2 \in \operatorname{dom} f$ e $f(a_1) = f(a_2)$, obtemos $f^{-1}(f(a_1)) = f^{-1}(f(a_2))$ e $a_1 = a_2$. Logo, f é um-para-um.
($\Leftarrow$) Agora, suponha que f seja um-para-um. Assuma também que a relação f^{-1} seja tal que $af^{-1}b_1$ e $af^{-1}b_2$. Então, da definição de f^{-1}, temos $b_1 fa$ e $b_2 fa$. Como f é um-para-um, temos que $b_1 = b_2$, o que significa dizer que f^{-1} é de fato uma função. Portanto, f é inversível.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Suponha que f seja inversível. Então f^{-1} é uma função. Daí, $f^{-1}(f(a)) = a$ para todo $a \in \operatorname{dom} f$. Agora, se $a_1, a_2 \in \operatorname{dom} f$ e $f(a_1) = f(a_2)$, obtemos $f^{-1}(f(a_1)) = f^{-1}(f(a_2))$ e $a_1 = a_2$. Logo, f é um-para-um.

($\Leftarrow$) Agora, suponha que f seja um-para-um. Assuma também que a relação f^{-1} seja tal que $af^{-1}b_1$ e $af^{-1}b_2$. Então, da definição de f^{-1}, temos $b_1 fa$ e $b_2 fa$. Como f é um-para-um, temos que $b_1 = b_2$, o que significa dizer que f^{-1} é de fato uma função. Portanto, f é inversível.

Finalmente, para qualquer relação R temos que $(R^{-1})^{-1} = R$.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Suponha que f seja inversível. Então f^{-1} é uma função. Daí, $f^{-1}(f(a)) = a$ para todo $a \in \operatorname{dom} f$. Agora, se $a_1, a_2 \in \operatorname{dom} f$ e $f(a_1) = f(a_2)$, obtemos $f^{-1}(f(a_1)) = f^{-1}(f(a_2))$ e $a_1 = a_2$. Logo, f é um-para-um. ($\Leftarrow$) Agora, suponha que f seja um-para-um. Assuma também que a relação f^{-1} seja tal que $af^{-1}b_1$ e $af^{-1}b_2$. Então, da definição de f^{-1}, temos $b_1 fa$ e $b_2 fa$. Como f é um-para-um, temos que $b_1 = b_2$, o que significa dizer que f^{-1} é de fato uma função. Portanto, f é inversível. Finalmente, para qualquer relação R temos que $(R^{-1})^{-1} = R$. Como f é uma relação e ela é inversível (por hipótese), temos que $(f^{-1})^{-1} = f$.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Suponha que f seja inversível. Então f^{-1} é uma função. Daí, $f^{-1}(f(a)) = a$ para todo $a \in \operatorname{dom} f$. Agora, se $a_1, a_2 \in \operatorname{dom} f$ e $f(a_1) = f(a_2)$, obtemos $f^{-1}(f(a_1)) = f^{-1}(f(a_2))$ e $a_1 = a_2$. Logo, f é um-para-um.

($\Leftarrow$) Agora, suponha que f seja um-para-um. Assuma também que a relação f^{-1} seja tal que $af^{-1}b_1$ e $af^{-1}b_2$. Então, da definição de f^{-1}, temos $b_1 fa$ e $b_2 fa$. Como f é um-para-um, temos que $b_1 = b_2$, o que significa dizer que f^{-1} é de fato uma função. Portanto, f é inversível.

Finalmente, para qualquer relação R temos que $(R^{-1})^{-1} = R$. Como f é uma relação e ela é inversível (por hipótese), temos que $(f^{-1})^{-1} = f$. Daí, se f for inversível, o mesmo acontece com f^{-1}. $\square$

Definição

(a) *Duas funções f e g são ditas* compatíveis *se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$.*

Definição

(a) *Duas funções f e g são ditas* compatíveis *se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, g$.*

(b) *Um conjunto de funções F é chamado de um* sistema compatível *de funções se quaisquer duas funções f e g de F são compaíveis.*

Definição

(a) *Duas funções f e g são ditas* compatíveis *se* $f(x) = g(x)$ *para todo* $x \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$.

(b) *Um conjunto de funções F é chamado de um* sistema compatível *de funções se quaisquer duas funções f e g de F são compaíveis.*

Lema

(a) *Duas funções f e g são compatíveis se e somente se $f \cup g$ é uma função.*

Definição

(a) *Duas funções f e g são ditas* compatíveis *se* $f(x) = g(x)$ *para todo* $x \in \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, g$.

(b) *Um conjunto de funções F é chamado de um* sistema compatível *de funções se quaisquer duas funções f e g de F são compaíveis.*

Lema

(a) *Duas funções f e g são compatíveis se e somente se $f \cup g$ é uma função.*

(b) *Duas funções f e g são compatíveis se e somente se* $f \restriction (\mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, g) = g \restriction (\mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, g)$.

Teorema

Se F for um sistema compatível de funções, então $\bigcup F$ é uma função com $\mathrm{dom}(\bigcup F) = \bigcup\{\mathrm{dom}\, f \mid f \in F\}$. A função $\bigcup F$ estende todos os $f \in F$.

Definição

Sejam A e B conjuntos. O conjunto de todas as funções de A para B é representado por B^A.

Definição

Sejam A e B conjuntos. O conjunto de todas as funções de A para B é representado por B^A.

Definição

Seja $S = \langle S_i \mid i \in I \rangle$ uma função com domínio I. A função $S = \langle S_i \mid i \in I \rangle$ é chamada de um sistema indexado de conjuntos *(indexado por I).*

Definição

Sejam A e B conjuntos. O conjunto de todas as funções de A para B é representado por B^A.

Definição

Seja $S = \langle S_i \mid i \in I \rangle$ uma função com domínio I. A função $S = \langle S_i \mid i \in I \rangle$ é chamada de um sistema indexado de conjuntos *(indexado por I).*
O produto *do sistema indexado S é o conjunto*

Definição

Sejam A e B conjuntos. O conjunto de todas as funções de A para B é representado por B^A.

Definição

Seja $S = \langle S_i \mid i \in I \rangle$ uma função com domínio I. A função $S = \langle S_i \mid i \in I \rangle$ é chamada de um sistema indexado de conjuntos *(indexado por I).*

O produto *do sistema indexado S é o conjunto*

$$\prod S = \{f \mid f \text{ é uma função sobre } I \text{ e } f_i \in S_i \text{ para todo } i \in I\}.$$

Definição

Sejam A e B conjuntos. O conjunto de todas as funções de A para B é representado por B^A.

Definição

Seja $S = \langle S_i \mid i \in I \rangle$ uma função com domínio I. A função $S = \langle S_i \mid i \in I \rangle$ é chamada de um sistema indexado de conjuntos *(indexado por I).*

O produto *do sistema indexado S é o conjunto*

$$\prod S = \{f \mid f \text{ é uma função sobre } I \text{ e } f_i \in S_i \text{ para todo } i \in I\}.$$

Variantes notacionais:

Definição

Sejam A e B conjuntos. O conjunto de todas as funções de A para B é representado por B^A.

Definição

Seja $S = \langle S_i \mid i \in I \rangle$ uma função com domínio I. A função $S = \langle S_i \mid i \in I \rangle$ é chamada de um sistema indexado de conjuntos *(indexado por I).*
O produto *do sistema indexado S é o conjunto*

$$\prod S = \{f \mid f \text{ é uma função sobre } I \text{ e } f_i \in S_i \text{ para todo } i \in I\}.$$

Variantes notacionais:

$$\prod \langle S(i) \mid i \in I \rangle, \qquad \prod_{i \in I} S(i), \qquad \prod_{i \in I} S_i.$$

Definição

Sejam A e B conjuntos. O conjunto de todas as funções de A para B é representado por B^A.

Definição

Seja $S = \langle S_i \mid i \in I \rangle$ uma função com domínio I. A função $S = \langle S_i \mid i \in I \rangle$ é chamada de um sistema indexado de conjuntos *(indexado por I).*
O produto *do sistema indexado S é o conjunto*

$$\prod S = \{f \mid f \text{ é uma função sobre } I \text{ e } f_i \in S_i \text{ para todo } i \in I\}.$$

Variantes notacionais:

$$\prod \langle S(i) \mid i \in I \rangle, \qquad \prod_{i \in I} S(i), \qquad \prod_{i \in I} S_i.$$

Definição

Sejam A e B conjuntos. O conjunto de todas as funções de A para B é representado por B^A.

Definição

Seja $S = \langle S_i \mid i \in I \rangle$ uma função com domínio I. A função $S = \langle S_i \mid i \in I \rangle$ é chamada de um sistema indexado de conjuntos *(indexado por I).*
O produto *do sistema indexado S é o conjunto*

$$\prod S = \{f \mid f \text{ é uma função sobre } I \text{ e } f_i \in S_i \text{ para todo } i \in I\}.$$

Variantes notacionais:

$$\prod \langle S(i) \mid i \in I \rangle, \qquad \prod_{i \in I} S(i), \qquad \prod_{i \in I} S_i.$$