Teoria dos Conjuntos (Aula 2)

Ruy J. G. B. de Queiroz

Centro de Informática, UFPE

2007.1

Conteúdo

Definição (Par Ordenado)

$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Axioma (Par)

Para quaisquer A e B, existe um conjunto C tal que $x \in C$ se e somente se $x = A$ ou $x = B$.

Teorema

$(a, b) = (a', b')$ *se e somente se* $a = a'$ *e* $b = b'$.

Definição

Um conjunto R é uma relação binária *se todos os elementos de R são pares ordenados, ou seja, se para qualquer* $z \in R$ *existe* x *e* y *tais que* $z = (x, y)$*.*
Notação: xRy *ou* $(x, y) \in R$*.*

Exemplo

$R_2 = \{z \mid$ *existem inteiros positivos m e n tais que* $z = (m, n)$ *e m divide* $n\}$.

Definição

Seja R uma relação binária.

(a) *O* domínio *de R é o conjunto de todos os x que estão na relação R com algum y.*
Notação: $\operatorname{dom} R = \{x \mid \textit{exist } y \textit{ tal que } xRy\}$.

(b) *O* contradomínio *de R é o conjunto de todos os y, tais que, para algum x, x está na relação R com y.*
Notação: $\operatorname{ran} R = \{y \mid \textit{existe } x \textit{ tal que } xRy\}$.

(c) *O* corpo *de R é o conjunto $\operatorname{dom} R \cup \operatorname{ran} R$.*
Notação: $\operatorname{field} R = \operatorname{dom} R \cup \operatorname{ran} R$.

(d) *Se $\operatorname{field} R \subseteq X$, dizemos que R é uma* relação em *X ou que R é uma relação* entre *elementos de X.*

Definição

(a) *A* imagem *de A sob R é o conjunto de todos os y do contradomínio de R relacionados em R a algum elemento de A.*
Notação: $R[A] = \{y \in \mathrm{ran}\, R \mid$ *existe* $x \in A$ *para o qual* $xRy\,\}$.

(b) *A* imagem inversa *de B sob R é o conjunto de todos os x do domínio de R relacionados em R a algum elemento de B.*
Notação: $R^{-1}[B] = \{x \in \mathrm{dom}\, R \mid$ *existe* $y \in B$ *para o qual* $xRy\,\}$.

Definição

Seja R uma relação binária. A inversa *de R é o conjunto*

$$R^{-1} = \{z \mid z = (x, y) \text{ para algum } x \text{ e } y \text{ tal que } (y, x) \in R\}.$$

Lema

A imagem inversa de B sob R é igual à imagem de B sob R^{-1}.

Definição (Composição)

Sejam R e S relações binárias. A composição *de R e S é a relação*
$S \circ R = \{(x, z) \mid$ existe y para o qual $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in S\}$.

Definição (Relação de Pertinência)

A relação de pertinência sobre *A é definida por*

$$\in_A = \{(a, b) \mid a \in A, b \in A, \text{ e } a \in b\}.$$

A relação identidade sobre *A é definida por*

$$\mathrm{Id}_A = \{(a, b) \mid a \in A, b \in A, \text{ e } a = b\}.$$

Definição (Produto Cartesiano)

Sejam A e B conjuntos. O conjunto de todos os pares ordenados cuja primeira coordenada é de A e cuja segunda coordenada é de B é chamado o produto cartesiano *de A e B.*

Notação: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$.