Teoria dos Conjuntos (Aula 13)

Ruy J. G. B. de Queiroz

Centro de Informática, UFPE

2009.1

Conteúdo

Observação (Ponto de Partida)

(1) *A operação de* sucessor *de um conjunto* x*:* $S(x) = x \cup \{x\}$.

(2) $n = \{m \in \mathbb{N} \mid m < n\}$.

(3) $\mathbb{N}$*: o menor conjunto contendo* 0 *e fechado sob* S.

Questão

Qual é o sucessor de $\mathbb{N}$*?*

Resposta: $\mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}$.

Questão

E o sucessor de $\mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}$*?*

Observação (O menor número transfinito)

Seja $\omega = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
Agora:

$$\begin{array}{rcll} S(\omega) & = & \omega \cup \{\omega\} & = \{0, 1, 2, \ldots, \omega\} \\ S(S(\omega)) & = & S(\omega) \cup \{S(\omega)\} & = \{0, 1, 2, \ldots, \omega, S(\omega)\} \\ \vdots & = & \vdots & = \vdots \end{array}$$

Notação

Dado que a função S deve denotar o sucessor *de um número (finito), vamos transportar isso para os números transfinitos:*

$$\begin{array}{rcl} S(\omega) & = & \omega + 1 \\ S(S(\omega)) & = & (\omega + 1) + 1 = \omega + 2 \\ \vdots & = & \vdots \end{array}$$

Definição (Boa-Ordenação)

Um conjunto W é bem-ordenado *pela relação $<$ se*

(a) $(W, <)$ *é um conjunto linearmente ordenado.*

(b) *Todo subconjunto nã-vazio de W tem um elemento mínimo.*

Definição (Segmento inicial)

Seja $(L, <)$ um conjunto linearmente ordenado. Um conjunto $S \subseteq L$ é chamado de um segmento inicial *de L se S é um subconjunto próprio de L e para todo $a \in$, todos $x < a$ sã também elementos de S.*

Exemplo

(1) *O conjunto de todos os reais negativos é um segmento inicial de* $\mathbb{R}$.

(2) *O conjunto de todos os reais não-positivos é um segmento inicial de* $\mathbb{R}$.

Lema

Se $(W, <)$ *é um conjunto bem-ordenado e* S *é um segmento inicial de* $(W, <)$, *então existe* $a \in W$ *tal que* $S = \{x \in W \mid x < a\}$.

Demonstração.

Seja $X = W - S$. Como S é um subconjunto próprio de W, X é não-vazio, e portanto tem um elemento mínimo na boa-ordenação $<$. Seja a o elemento mínimo de X. Vamos mostrar que S é o conjunto de todos os elementos que estão abaixo de a. Se $x < a$ então x não pode pertencer a X, pois a é o menor elemento de X, portanto x pertence a S. Caso contrário (i.e. $x \geq a$), x não pode estar em S porque se estivesse então a também estaria em S pois S é um segmento inicial. Logo, $S = \{x \in W \mid x < a\}$. $\square$

Definição (Segmento inicial dado por um elemento *a*)

Se a é um elemento de um conjunto bem-ordenado $(W. <)$, *chamamos o conjunto*

$$W[a] = \{x \in W \mid x < a\}$$

de segmento inicial de *W* dado por *a*.

Teorema (1.3)

Se $(W_1, <_1)$ *e* $(W_2, <_2)$ *são conjuntos bem-ordenados, então exatamente uma das condições abaixo se dá:*

(a) W_1 *e* W_2 *são isomorfos, ou*

(b) W_1 *é isomorfor a um segment inicial de* W_2, *ou*

(c) W_2 *é isomorfor a um segmento inicial de* W_1.

Em cada caso, o isomorfirsmo é único.

Definição (Tipos de ordem de conjuntos bem-ordenados sets)

W_1 *tem* tipo de ordem menor *que* W_2 *se* W_1 *for isomorfo a* $W_2[a]$ *para algum* $a \in W_2$.

Definição

Uma função f *sobre um conjunto linearmente ordenado* $(L, <)$ *em* L *é* crescente *se* $x_1 < x_2$ *implica* $f(x_1) < f(x_2)$. *(N.B. Uma função crescente é um-para-um, e é um isomorfismo de* $(L, <)$ *e* $(\operatorname{ran} f, <)$*.)*

Lema

Se $(W, <)$ for um conjunto bem-ordenado e $f : W \to W$ for uma função crescente, então $f(x) \geq x$ para todo $x \in W$.

Demonstração.

Como W é bem-ordenado, qualquer subconjunto não-vazio $X \subseteq W$ tem um elemento mínimo. Em particular, o conjunto $X = \{x \in W \mid f(x) < x\}$ tem um elemento mínimo. Chame-o a. Mas então $f(a) < a$, e $f(f(a)) < f(a)$, pois f é crescente. Daí, $f(a) \in X$, o que é uma contradição porque a era supostamente o elemento mínimo em X. $\square$

Corolário

(a) *Nenhum conjunto bem-ordenado é isomorfo a um segmento inicial de si próprio.*

(b) *Cada conjunto bem-ordenado tem apenas um automorfismo, a identidade.*

(c) *Se W_1 e W_2 forem conjuntos bem-ordenados isomorfos, então the isomorfismo entre W_1 e W_2 é único.*

do Teorema 1.3.

Sejam W_1 e W_2 conjuntos bem-ordenados. Do Lema 1.4, os casos (a), (b), e (c) do teorema são mutuamente exclusivos: se W_1 fosse isomorfo a $W_2[a_2]$ para algum $a_2 \in W_2$, e ao mesmo W_2 fosse isomorfo a $W_1[a_1]$ para algum $a_1 \in W_1$, então a composição dos dois isomorfismos seria um isomorfismo de um conjunto bem-ordenado sobre um de seus próprios segmentos iniciais.
Também, a unicidade do isomorfismo em cada caso segue do Corolário 1.5.

$\square$

Cont.

Agora temos que mostrar que um dos três casos (a), (b), ou (c) sempre se dá. Seja

$$f = \{(x, y) \in W_1 \times W_2 \mid W_1[x] \text{ é isomorfo a } W_2[y]\}.$$

Do Corolário 1.5, f é um-para-um: se $W_1[x]$ é isomorfo a ambos $W_2[y]$ e $W_2[y']$, então $y = y'$ pois do contrário $W_2[y]$ seria um segmento inicial de $W_2[y']$ (ou vice-versa) enquanto que eles são isomorfos, o que é impossível. Igualmente $(x, y) \in f$ e $(x', y) \in f$ implica $x = x'$.
Agora, $x < x'$ implica $f(x) < f(x')$: se h é o isomofismo entre $W_1[x']$ e $W_2[f(x')]$, então a restrição $h \restriction W_1[x]$ é um isomorfismo entre $W_1[x]$ e $W_2[h(x)]$, portanto $f(x) = h(x)$ e $f(x) < f(x')$. $\square$

Cont.

Daí, f é um isomorfismo entre seu domínio, um subconjunto de W_1, e seu contradomínio, um subconjunto de W_2. Se o domínio de f é W_1 e o contradomínio de f é W_2, então W_1 é isomorfo a W_2. Vamos mostrar que se o domínio de f não é o conjunto W_1 todo então ele é seu segmento inicial, e o contradomínio de f é o conjunto W_2 todo.
Assuma que $\operatorname{dom} f \neq W_1$. Note que o conjunto $S = \operatorname{dom} f$ é um segmento inicial de W_1: se $x \in S$ e $z < x$, seja h o isomorfismo entre $W_1[x]$ e $W_2[f(x)]$; então $h \restriction W_1[z]$ é um isomorfismo entre $W_1[z]$ e $W_2[h(z)]$, portanto $z \in S$. Agora, para mostrar que $T = \operatorname{ran} f = W_2$, assuma ao contrário, e derive uma contradição, e.g. mostre que T é um segmento inicial de W_2. Mas então $\operatorname{dom} f = W_1[a]$ para algum $a \in W_1$, e $\operatorname{ran} f = W_2[b]$ para algum $b \in W_2$. Em outras palavras, f é um isomorfismo entre $W_1[a]$ e $W_2[b]$. Isso é o mesmo que $(a, b) \in f$, portanto $a \in \operatorname{dom} f = W_1[a]$, i.e., $a < a$, uma contradição. $\square$

Definição

Um conjunto T é transitivo *se todo elemento de T é um subconjunto de T.*

Observação

Um conjunto transitivo T é tal que para quaisquer u, v, se $u \in v \in T$ então $u \in T$. Note que isso se dá para todo número natural n: se $k \in m \in n$ então $k \in n$.

Definição

Um conjunto α é um número ordinal *se*

(a) α *é transitivo.*

(b) α *é bem-ordenado por* $\in_\alpha$.

Teorema

Todo número natural é um ordinal.

Definição

$\omega = \mathbb{N}$.

Lema

Se α é um número ordinal, então $S(\alpha)$ também é um número ordinal.