Teoria dos Conjuntos (Aula 11)

Ruy J. G. B. de Queiroz

Centro de Informática, UFPE

2007.1

Conteúdo

Definição

Seja $(P, <)$ um conjunto linearmente ordenado. Um lacuna *é um par (A, B) de conjuntos tal que*

(a) *A e B são subconjuntos não-vazios disjuntos de P e $A \cup B = P$.*

(b) *Se $a \in A$ e $b \in B$, então $a < b$.*

(c) *A não tem elemento máximo e B não tem elemento mínimo.*

Exemplo

Seja $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \text{ e } x^2 > 2\}$ e $A = \mathbb{Q} - B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0 \text{ ou } (x > 0 \text{ e } x^2 < 2)\}$. Então (A, B) é um lacuna em $\mathbb{Q}$.

Definição

Seja $(P, <)$ *um conjunto linearmente ordenado denso.* P *é* completo *se todo subconjunto não-vazio* $S \subseteq P$ *limitado por cima tem um supremo. Note que* $(P, <)$ *é completo se e somente se não tem lacunas.*

Teorema

Seja $(P, <)$ um conjunto linearmente ordenado denso sem extremidades. Então existe um conjunto linearmente ordenado completo $(C, \prec)$ tal que
(a) $P \subseteq C$.
(b) Se $p, q \in P$, então $p < q$ se e somente se $p \prec q$ ($\prec$ coincide com $<$ sobre P).
(c) P é denso em C, i.e., para quaisquer $p, q \in P$ tais que $p < q$, existe $r \in P$ com $p \prec r \prec q$.
(d) C não tem extremidades.
Ainda mais, esse conjunto conjunto linearmente ordenado completo $(C, \prec)$ é único a menos de isomorfismo sobre P. Em outras palavras, se $(C^*, \prec^*)$ for um conjunto linearmente ordenado completo que satisfaz (a)–(d), então existe um isomorfismo h entre $(C, \prec)$ e $(C^*, \prec^*)$ tal que $h(x) = x$ para cada $x \in P$. O conjunto linearmente ordenado $(C, \prec)$ é chamado de completação *de $(P, <)$.*

Demonstração.

Precisamos provar **existência** e **unicidade** de uma completação.

Prova da Unicidade. Sejam $(C_1, \prec_1)$ e $(C_2, \prec_2)$ duas ordenações lineares completas satisfazendo (a)–(d). Vamos mostrar que elas têm que ser isomorfas mostrando que existe um isomorfismo h de C_1 sobre C_2 tal que $h(x) = x$ para cada $x \in P$.

Se $c_1 \in C_1$, faça $S_{c_1} = \{p \in P \mid p \preceq_1 c_1\}$. Igualmente, faça $S_{c_2} = \{p \in P \mid p \preceq_2 c_2\}$ para $c_2 \in C_2$. Se S for um subconjunto não-vazio de P limitado por cima, seja $\sup_1 S$ o supremo de S em $(C_1, \prec_1)$ e $\sup_2 S$ o supremo de S em $(C_2, \prec_2)$. Note que $\sup_1 S_{c_1} = c_1$ e $\sup_2 S_{c_2} = c_2$. $\square$

Cont.

Vamos definir h por: $h(c) = \sup_2 S_c$.
Claramente, h é um mapeamento de C_1 em C_2; precisamos mostrar que o mapeamento é sobrejetor e que

(a) Se $c \prec_1 d$ então $h(c) \prec_2 h(d)$.

(b) $h(x) = x$ para cada $x \in P$.

Para provar que h é sobrejetor, seja c_2 um elemento qualquer de C_2. Então $c_2 = \sup_2 S_{c_2}$, e se fizermos $c_1 = \sup_1 S_{c_2}$, então $S_{c_1} = S_{c_2}$ e $c_2 = h(c_1)$. Se $c \prec_1 d$, então (como P é denso em C) existe $p \in P$ tal que $c \prec_1 p \prec_1 d$. É fácil ver que $\sup_2 S_c \prec_2 p \prec_2 \sup_2 S_d$ e portanto $h(c) \prec_2 h(d)$. Logo, h é um isomorfismo (usando Lema 5.18, Cap. 2). Finalmente, se $x \in P$ então $x = \sup_1 S_x = \sup_2 S_x$ e portanto $h(x) = x$. q.e.d.
(unicidade)

Prova de Existência. Precisamos de algumas definições.

Definição

Um corte *é um par* (A, B) *de conjuntos tal que*

(a) *A e B são subconjuntos não-vazios disjuntos de P e $A \cup B = P$.*

(b) *Se $a \in A$ e $b \in B$, então $a < b$.*

Definição

Um corte (A, B) *é um* corte de Dedekind *se* A *não tem elemento máximo.*

Observação (Cortes de Dedekind)

Temos dois tipos de cortes de Dedekind (A, B)*:*

(a) *Cortes nos quais* $B = \{x \in P \mid x \geq p\}$ *para algum* $p \in P$*; escrevemos* $(A, B) = [p]$.

(b) *Cortes que são lacunas.*

Observação (O conjunto de todos os cortes de Dedekind ordenados por inclusão por baixo)

Considere o conjunto C de todos os cortes de Dedekind (A, B) em $(P, <)$ e ordene C da seguinte forma:

$$(A, B) \preceq (A', B') \quad \text{se e somente se} \quad A \subseteq A'.$$

Pode-se verificar que $(C, \preceq)$ é uma ordenação linear. Além do mais, se $p, q \in P$ são tais que $p < q$, então $[p] \preceq [q]$. Portanto a ordenação linear $(P', \prec)$ onde $P' = \{[p] \mid p \in P\}$ é isomorfa a $(P, <)$.

Proposição

$(C, \prec)$ é uma completação de $(P', \prec)$.

Corolário

$(P, <)$ tem uma completação.

Prova do Corolário.

$(P', \prec)$ é isomorfa a $(P, <)$. $\square$

Prova da Existência da Completação. Basta provar que

(c′) P' é denso em $(C, \prec)$,

(d′) C não tem extremidades,

(e) $(C, \prec)$ é completa.

Prova de (c′).

Suponha que $c, d \in C$ sejam tais que $c \prec d$; i.e., $c = (A, B)$, $d = (A', B')$, e $A \subset A'$. Seja $p \in P$ tal que $p \in A'$ e $p \notin A$. Além do mais, s.p.d.g. assuma que p não é o menor elemento de B. Então $(A, B) \prec [p] \prec (A', B')$. Logo, P' é denso em C, e $(C, \prec)$ é um conjunto linearmente ordenado denso. □

Prova de (d′).

Se $(A, B) \in C$, então existe $p \in B$ que não é o menor elemento de B, e temos $(A, B) \prec [p]$. Logo, C não tem um elemento mínimo. Igualmente, C não tem um elemento mínimo. Portanto, C não tem extremidades. $\square$