Teoria dos Conjuntos (Aula 10)

Ruy J. G. B. de Queiroz

Centro de Informática, UFPE

2017.1

Conteúdo

Definição

Conjuntos linearmente ordenados $(A, \prec_A)$ *e* $(B, \prec_B)$ *são* similares *(i.e.,* têm o mesmo tipo de ordem*)*

Definição

Conjuntos linearmente ordenados $(A, \prec_A)$ *e* $(B, \prec_B)$ *são* similares *(i.e.,* têm o mesmo tipo de ordem*) se eles forem isomorfos, i.e.,*

Definição

Conjuntos linearmente ordenados $(A, \prec_A)$ *e* $(B, \prec_B)$ *são* similares *(i.e.,* têm o mesmo tipo de ordem*) se eles forem isomorfos, i.e., se existir um mapeamento um-para-um* f *de* A *sobre* B *tal que para todos* $a_1, a_2 \in A$*,*

Definição

Conjuntos linearmente ordenados $(A, \prec_A)$ *e* $(B, \prec_B)$ *são* similares *(i.e.,* têm o mesmo tipo de ordem*) se eles forem isomorfos, i.e., se existir um mapeamento um-para-um* f *de* A *sobre* B *tal que para todos* $a_1, a_2 \in A$*,* $a_1 \prec_A a_2$ *se dá se e somente se* $f(a_1) \prec_B f(a_2)$ *se dá.*

Definição

Conjuntos linearmente ordenados $(A, \prec_A)$ *e* $(B, \prec_B)$ *são* similares *(i.e.,* têm o mesmo tipo de ordem*) se eles forem isomorfos, i.e., se existir um mapeamento um-para-um* f *de* A *sobre* B *tal que para todos* $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \prec_A a_2$ *se dá se e somente se* $f(a_1) \prec_B f(a_2)$ *se dá.*

Intuição

Conjuntos ordenados similares "se parecem."

Definição

Conjuntos linearmente ordenados $(A, \prec_A)$ *e* $(B, \prec_B)$ *são* similares *(i.e.,* têm o mesmo tipo de ordem*) se eles forem isomorfos, i.e., se existir um mapeamento um-para-um* f *de* A *sobre* B *tal que para todos* $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \prec_A a_2$ *se dá se e somente se* $f(a_1) \prec_B f(a_2)$ *se dá.*

Intuição

Conjuntos ordenados similares "se parecem." Portanto, $(\mathbb{N}, <)$ *e* $(\mathbb{Z}, <)$ **não** *são similares.*

Definição

Conjuntos linearmente ordenados $(A, \prec_A)$ *e* $(B, \prec_B)$ *são* similares *(i.e.,* têm o mesmo tipo de ordem*) se eles forem isomorfos, i.e., se existir um mapeamento um-para-um* f *de* A *sobre* B *tal que para todos* $a_1, a_2 \in A$*,* $a_1 \prec_A a_2$ *se dá se e somente se* $f(a_1) \prec_B f(a_2)$ *se dá.*

Intuição

Conjuntos ordenados similares "se parecem." Portanto, $(\mathbb{N}, <)$ *e* $(\mathbb{Z}, <)$ **não** *são similares.*
Tampouco $(\mathbb{Z}, <)$ *e* $(\mathbb{Q}, <)$*.*

Definição

Conjuntos linearmente ordenados $(A, \prec_A)$ e $(B, \prec_B)$ são similares *(i.e.,* têm o mesmo tipo de ordem*) se eles forem isomorfos, i.e., se existir um mapeamento um-para-um f de A sobre B tal que para todos $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \prec_A a_2$ se dá se e somente se $f(a_1) \prec_B f(a_2)$ se dá.*

Intuição

Conjuntos ordenados similares "se parecem." Portanto, $(\mathbb{N}, <)$ e $(\mathbb{Z}, <)$ **não** *são similares.*
Tampouco $(\mathbb{Z}, <)$ e $(\mathbb{Q}, <)$.
Nem $(\mathbb{N}, <)$ e $(\mathbb{Q}, <)$.

Fact

Similaridade é uma relação de equivalência.

Fact

Similaridade é uma relação de equivalência.

Definição (Tipos de ordem)

Tal qual no caso de números cardinais, é possível assumir que para cada conjunto linearmente ordenado está associado um objeto chamado de sua tipo de ordem *de modo que conjuntos ordenados similares têm o mesmo tipo de ordem.*

Fact

Similaridade é uma relação de equivalência.

Definição (Tipos de ordem)

Tal qual no caso de números cardinais, é possível assumir que para cada conjunto linearmente ordenado está associado um objeto chamado de sua tipo de ordem *de modo que conjuntos ordenados similares têm o mesmo tipo de ordem. (Do* ***MathWorld****: "Um tipo de ordem categoriza totalmente conjuntos ordenados da mesma maneira que um número cardinal categoriza conjuntos.*

Fact

Similaridade é uma relação de equivalência.

Definição (Tipos de ordem)

Tal qual no caso de números cardinais, é possível assumir que para cada conjunto linearmente ordenado está associado um objeto chamado de sua tipo de ordem *de modo que conjuntos ordenados similares têm o mesmo tipo de ordem. (Do* ***MathWorld****: ”Um tipo de ordem categoriza totalmente conjuntos ordenados da mesma maneira que um número cardinal categoriza conjuntos. O termo é devido a Georg Cantor, e a definição funciona igualmente bem para conjuntos parcialmente ordenados.”)*

Lema

Toda ordenação linear sobre um conjunto finito é uma boa-ordenação.

Lema

Toda ordenação linear sobre um conjunto finito é uma boa-ordenação.

Demonstração.

Precisamos provar que todo subconjunto não-vazio B de um conjunto linearmente ordenado $(A, <)$ tem um elemento mínimo.

Lema

Toda ordenação linear sobre um conjunto finito é uma boa-ordenação.

Demonstração.

Precisamos provar que todo subconjunto não-vazio B de um conjunto linearmente ordenado $(A, <)$ tem um elemento mínimo. Podemos fazê-lo por indução sobre o número de elementos de B.

Lema

Toda ordenação linear sobre um conjunto finito é uma boa-ordenação.

Demonstração.

Precisamos provar que todo subconjunto não-vazio B de um conjunto linearmente ordenado $(A, <)$ tem um elemento mínimo. Podemos fazê-lo por indução sobre o número de elementos de B. (Caso Base) Se B tem 1 elemento, a afirmação é obviamente verdadeira.

Lema

Toda ordenação linear sobre um conjunto finito é uma boa-ordenação.

Demonstração.

Precisamos provar que todo subconjunto não-vazio B de um conjunto linearmente ordenado $(A, <)$ tem um elemento mínimo. Podemos fazê-lo por indução sobre o número de elementos de B. (Caso Base) Se B tem 1 elemento, a afirmação é obviamente verdadeira. (Passo Indutivo) Assuma que seja verdadeiro para todos os conjuntos de n elementos e suponha que B tenha $n + 1$ elementos.

Lema

Toda ordenação linear sobre um conjunto finito é uma boa-ordenação.

Demonstração.

Precisamos provar que todo subconjunto não-vazio B de um conjunto linearmente ordenado $(A, <)$ tem um elemento mínimo. Podemos fazê-lo por indução sobre o número de elementos de B. (Caso Base) Se B tem 1 elemento, a afirmação é obviamente verdadeira. (Passo Indutivo) Assuma que seja verdadeiro para todos os conjuntos de n elementos e suponha que B tenha $n + 1$ elementos. Então $B = \{x\} \cup B'$ onde B' tem n elementos e $x \notin B'$.

Lema

Toda ordenação linear sobre um conjunto finito é uma boa-ordenação.

Demonstração.

Precisamos provar que todo subconjunto não-vazio B de um conjunto linearmente ordenado $(A, <)$ tem um elemento mínimo. Podemos fazê-lo por indução sobre o número de elementos de B. (Caso Base) Se B tem 1 elemento, a afirmação é obviamente verdadeira. (Passo Indutivo) Assuma que seja verdadeiro para todos os conjuntos de n elementos e suponha que B tenha $n + 1$ elementos. Então $B = \{x\} \cup B'$ onde B' tem n elementos e $x \notin B'$. Pela hipótese da indução, B' tem um elemento mínimo x'. (continua...) $\square$

Demonstração.

Se $x' < x$, então x' é o menor elemento de B;

Demonstração.

Se $x' < x$, então x' é o menor elemento de B; caso contrário, x é o menor elemento de B.

Demonstração.

Se $x' < x$, então x' é o menor elemento de B; caso contrário, x é o menor elemento de B. Em ambos os casos, B tem um elemento mínimo. $\square$

Teorema

Se $(A_1, <_1)$ e $(A_2, <_2)$ forem conjuntos linearmente ordenados e $|A_1| = |A_2|$ for finito, então $(A_1, <_1)$ e $(A_2, <_2)$ são similares.

Teorema

Se $(A_1, <_1)$ e $(A_2, <_2)$ forem conjuntos linearmente ordenados e $|A_1| = |A_2|$ for finito, então $(A_1, <_1)$ e $(A_2, <_2)$ são similares.

Demonstração.

Por indução sobre o tamanho dos conjuntos A_1 e A_2.

Teorema

Se $(A_1, <_1)$ e $(A_2, <_2)$ forem conjuntos linearmente ordenados e $|A_1| = |A_2|$ for finito, então $(A_1, <_1)$ e $(A_2, <_2)$ são similares.

Demonstração.

Por indução sobre o tamanho dos conjuntos A_1 e A_2. (Caso Base) Se $n = 0$, então $A_1 = A_2 = \emptyset$ e $(A_1, <_1)$, $(A_2, <_2)$ são obviamente isomorfos.

Teorema

Se $(A_1, <_1)$ e $(A_2, <_2)$ forem conjuntos linearmente ordenados e $|A_1| = |A_2|$ for finito, então $(A_1, <_1)$ e $(A_2, <_2)$ são similares.

Demonstração.

Por indução sobre o tamanho dos conjuntos A_1 e A_2. (Caso Base) Se $n = 0$, então $A_1 = A_2 = \emptyset$ e $(A_1, <_1)$, $(A_2, <_2)$ são obviamente isomorfos. (Caso Indutivo) Assuma que o enunciado é verdadeiro para todas as ordenações lineares de conjuntos de n-elementos.

Teorema

Se $(A_1, <_1)$ e $(A_2, <_2)$ forem conjuntos linearmente ordenados e $|A_1| = |A_2|$ for finito, então $(A_1, <_1)$ e $(A_2, <_2)$ são similares.

Demonstração.

Por indução sobre o tamanho dos conjuntos A_1 e A_2. (Caso Base) Se $n = 0$, então $A_1 = A_2 = \emptyset$ e $(A_1, <_1)$, $(A_2, <_2)$ são obviamente isomorfos. (Caso Indutivo) Assuma que o enunciado é verdadeiro para todas as ordenações lineares de conjuntos de n-elementos. Seja $|A_1| = |A_2| = n + 1$.

Teorema

Se $(A_1, <_1)$ e $(A_2, <_2)$ forem conjuntos linearmente ordenados e $|A_1| = |A_2|$ for finito, então $(A_1, <_1)$ e $(A_2, <_2)$ são similares.

Demonstração.

Por indução sobre o tamanho dos conjuntos A_1 e A_2. (Caso Base) Se $n = 0$, então $A_1 = A_2 = \emptyset$ e $(A_1, <_1)$, $(A_2, <_2)$ são obviamente isomorfos. (Caso Indutivo) Assuma que o enunciado é verdadeiro para todas as ordenações lineares de conjuntos de n-elementos. Seja $|A_1| = |A_2| = n + 1$. Pelo lema anterior, $<_1$ e $<_2$ são boas-ordenações, portanto suponha que a_1 (a_2, respectivamente) seja o menor elemento de $(A_1, <_1)$ (($A_2, <_2$), respectivamente). (continua...) □

Cont.

Agora $|A_1 - \{a_1\}| = |A_2 - \{a_2\}| = n$, portanto pela hipótese da indução existe um isomorfismo g entre $(A_1 - \{a_1\}, <_1 \cap (A_1 - \{a_1\} \times A_1 - \{a_1\}))$ e $(A_2 - \{a_2\}, <_2 \cap (A_2 - \{a_2\} \times A_2 - \{a_2\}))$.

Cont.

Agora $|A_1 - \{a_1\}| = |A_2 - \{a_2\}| = n$, portanto pela hipótese da indução existe um isomorfismo g entre $(A_1 - \{a_1\}, <_1 \cap (A_1 - \{a_1\} \times A_1 - \{a_1\}))$ e $(A_2 - \{a_2\}, <_2 \cap (A_2 - \{a_2\} \times A_2 - \{a_2\}))$. Agora defina $f : A_1 \to A_2$ por

$$\begin{cases} f(a_1) = a_2; \\ \end{cases}$$

Cont.

Agora $|A_1 - \{a_1\}| = |A_2 - \{a_2\}| = n$, portanto pela hipótese da indução existe um isomorfismo g entre $(A_1 - \{a_1\}, <_1 \cap (A_1 - \{a_1\} \times A_1 - \{a_1\}))$ e $(A_2 - \{a_2\}, <_2 \cap (A_2 - \{a_2\} \times A_2 - \{a_2\}))$. Agora defina $f : A_1 \to A_2$ por

$$\begin{cases} f(a_1) & = & a_2; \\ f(a) & = & g(a) \quad \text{for } a \in A_1 - \{a_1\}. \end{cases}$$

Teoria dos Conjuntos (Aula 10)
Ruy de Queiroz
Ordenações Lineares

Cont.

Agora $|A_1 - \{a_1\}| = |A_2 - \{a_2\}| = n$, portanto pela hipótese da indução existe um isomorfismo g entre $(A_1 - \{a_1\}, <_1 \cap (A_1 - \{a_1\} \times A_1 - \{a_1\}))$ e $(A_2 - \{a_2\}, <_2 \cap (A_2 - \{a_2\} \times A_2 - \{a_2\}))$. Agora defina $f : A_1 \to A_2$ por

$$\begin{cases} f(a_1) & = & a_2; \\ f(a) & = & g(a) \quad \text{for } a \in A_1 - \{a_1\}. \end{cases}$$

Cont.

Agora $|A_1 - \{a_1\}| = |A_2 - \{a_2\}| = n$, portanto pela hipótese da indução existe um isomorfismo g entre $(A_1 - \{a_1\}, <_1 \cap (A_1 - \{a_1\} \times A_1 - \{a_1\}))$ e $(A_2 - \{a_2\}, <_2 \cap (A_2 - \{a_2\} \times A_2 - \{a_2\}))$. Agora defina $f : A_1 \to A_2$ por

$$\begin{cases} f(a_1) & = & a_2; \\ f(a) & = & g(a) \quad \text{for } a \in A_1 - \{a_1\}. \end{cases}$$

É imediato verificar que f é um isomorfismo entre $(A_1, <_1)$ e $(A_2, <_2)$. $\square$

Cont.

Agora $|A_1 - \{a_1\}| = |A_2 - \{a_2\}| = n$, portanto pela hipótese da indução existe um isomorfismo g entre $(A_1 - \{a_1\}, <_1 \cap (A_1 - \{a_1\} \times A_1 - \{a_1\}))$ e $(A_2 - \{a_2\}, <_2 \cap (A_2 - \{a_2\} \times A_2 - \{a_2\}))$. Agora defina $f : A_1 \to A_2$ por

$$\begin{cases} f(a_1) & = & a_2; \\ f(a) & = & g(a) \quad \text{for } a \in A_1 - \{a_1\}. \end{cases}$$

É imediato verificar que f é um isomorfismo entre $(A_1, <_1)$ e $(A_2, <_2)$. $\square$

Lema

Se $(A, <)$ for uma ordenação linear, então $(A, <^{-1})$ também é uma ordenação linear.

Lema

Sejam $(A_1, <_1)$ *e* $(A_2, <_2)$ *conjuntos linearmente ordenados e* $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Teoria dos Conjuntos

Similaridade (cont.)

Lema

Sejam $(A_1, <_1)$ e $(A_2, <_2)$ conjuntos linearmente ordenados e $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. A relação $<$ sobre $A_1 \cup A_2$ definida por

Lema

Sejam $(A_1, <_1)$ *e* $(A_2, <_2)$ *conjuntos linearmente ordenados e* $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. *A relação* $<$ *sobre* $A_1 \cup A_2$ *definida por*

$$a < b \quad sse \quad a, b \in A_1 \text{ e } a <_1 b$$

Lema

Sejam $(A_1, <_1)$ *e* $(A_2, <_2)$ *conjuntos linearmente ordenados e* $A_1 \cap A_2 = \emptyset$*. A relação* $<$ *sobre* $A_1 \cup A_2$ *definida por*

$$\begin{array}{rcl} a < b & sse & a, b \in A_1 \ e \ a <_1 b \\ & ou & a, b \in A_2 \ e \ a <_2 b \end{array}$$

Lema

Sejam $(A_1, <_1)$ *e* $(A_2, <_2)$ *conjuntos linearmente ordenados e* $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. *A relação* $<$ *sobre* $A_1 \cup A_2$ *definida por*

$$\begin{array}{lll} a < b & \text{sse} & a, b \in A_1 \text{ e } a <_1 b \\ & \text{ou} & a, b \in A_2 \text{ e } a <_2 b \\ & \text{ou} & a \in A_1, \quad b \in A_2 \end{array}$$

Lema

Sejam $(A_1, <_1)$ e $(A_2, <_2)$ conjuntos linearmente ordenados e $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. A relação $<$ sobre $A_1 \cup A_2$ definida por

$$\begin{array}{rrl} a < b & sse & a, b \in A_1 \text{ e } a <_1 b \\ & ou & a, b \in A_2 \text{ e } a <_2 b \\ & ou & a \in A_1, \quad b \in A_2 \end{array}$$

é uma ordenação linear.

Lema

Sejam $(A_1, <_1)$ *e* $(A_2, <_2)$ *conjuntos linearmente ordenados.*

Lema

Sejam $(A_1, <_1)$ *e* $(A_2, <_2)$ *conjuntos linearmente ordenados. A relação* $<$ *sobre* $A = A_1 \times A_2$ *definida por*

Lema

Sejam $(A_1, <_1)$ e $(A_2, <_2)$ conjuntos linearmente ordenados. A relação $<$ sobre $A = A_1 \times A_2$ definida por

$$(a_1, a_2) < (b_1, b_2) \quad \textit{sse} \quad a_1 <_1 b_1 \textit{ ou } (a_1 = b_1 \textit{ e } a_2 <_2 b_2)$$

Lema

Sejam $(A_1, <_1)$ e $(A_2, <_2)$ conjuntos linearmente ordenados. A relação $<$ sobre $A = A_1 \times A_2$ definida por

$$(a_1, a_2) < (b_1, b_2) \quad \textit{sse} \quad a_1 <_1 b_1 \textit{ ou } (a_1 = b_1 \textit{ e } a_2 <_2 b_2)$$

é uma ordenação linear.

Teoria dos Conjuntos

Similaridade (cont.)

Teorema

Seja $\langle (A_i, <_i) \mid i \in I \rangle$ um sistema indexado de conjuntos linearmente ordenados, onde $I \subseteq \mathbb{N}$.

Teorema

Seja $\langle (A_i, <_i) \mid i \in I \rangle$ um sistema indexado de conjuntos linearmente ordenados, onde $I \subseteq \mathbb{N}$. A relação $\prec$ sobre $\prod_{i \in I} A_i$ definida por

Teorema

Seja $\langle (A_i, <_i) \mid i \in I \rangle$ *um sistema indexado de conjuntos linearmente ordenados, onde* $I \subseteq \mathbb{N}$. *A relação* $\prec$ *sobre* $\prod_{i \in I} A_i$ *definida por*

$$f \prec g \quad \textit{sse} \quad \mathrm{diff}(f, g) = \{i \in I \mid f_i \neq g_i\} \neq \emptyset \textit{ e } f_{i_0} <_{i_0} g_{i_0}$$

Teorema

Seja $\langle (A_i, <_i) \mid i \in I \rangle$ um sistema indexado de conjuntos linearmente ordenados, onde $I \subseteq \mathbb{N}$. A relação $\prec$ sobre $\prod_{i \in I} A_i$ definida por

$$f \prec g \quad \textit{sse} \quad \mathrm{diff}(f, g) = \{ i \in I \mid f_i \neq g_i \} \neq \emptyset \textit{ e } f_{i_0} <_{i_0} g_{i_0}$$

$$\textit{onde } i_0 \textit{ é o menor elemento de } \mathrm{diff}(f, g)$$

Teorema

Seja $\langle (A_i, <_i) \mid i \in I \rangle$ *um sistema indexado de conjuntos linearmente ordenados, onde* $I \subseteq \mathbb{N}$. *A relação* $\prec$ *sobre* $\prod_{i \in I} A_i$ *definida por*

$$\begin{array}{lll} f \prec g & \textit{sse} & \mathrm{diff}(f,g) = \{i \in I \mid f_i \neq g_i\} \neq \emptyset \text{ e } f_{i_0} <_{i_0} g_{i_0} \\ & & \textit{onde } i_0 \textit{ é o menor elemento de } \mathrm{diff}(f,g) \\ & & \textit{(na ordenação usual } < \textit{ dos números naturais)} \end{array}$$

Teorema

Seja $\langle (A_i, <_i) \mid i \in I \rangle$ um sistema indexado de conjuntos linearmente ordenados, onde $I \subseteq \mathbb{N}$. A relação $\prec$ sobre $\prod_{i \in I} A_i$ definida por

$$
\begin{array}{lll}
f \prec g & \textit{sse} & \mathrm{diff}(f, g) = \{i \in I \mid f_i \neq g_i\} \neq \emptyset \text{ e } f_{i_0} <_{i_0} g_{i_0} \\
& & \text{onde } i_0 \text{ é o menor elemento de } \mathrm{diff}(f, g) \\
& & \text{(na ordenação usual } < \text{ dos números naturais)}
\end{array}
$$

é uma ordenação linear de $\prod_{i \in I} A_i$.

Teorema

Seja $\langle (A_i, <_i) \mid i \in I \rangle$ um sistema indexado de conjuntos linearmente ordenados, onde $I \subseteq \mathbb{N}$. A relação $\prec$ sobre $\prod_{i \in I} A_i$ definida por

$$
\begin{array}{lll}
f \prec g & \textit{sse} & \mathrm{diff}(f,g) = \{i \in I \mid f_i \neq g_i\} \neq \emptyset \text{ e } f_{i_0} <_{i_0} g_{i_0} \\
 & & \text{onde } i_0 \text{ é o menor elemento de } \mathrm{diff}(f,g) \\
 & & \text{(na ordenação usual } < \text{ dos números naturais)}
\end{array}
$$

é uma ordenação linear de $\prod_{i \in I} A_i$. (Essa ordenação é chamada de ordenação lexicográfica.*)*

Definição

Um conjunto ordenado $(X, <)$ *é* denso *se ele tem pelo menos dois elementos e se para todos* $a, b \in X$, $a < b$ *implica que existe* $c \in X$ *tal que* $a < c < b$*.*

Definição

Um conjunto ordenado $(X, <)$ *é* denso *se ele tem pelo menos dois elementos e se para todos* $a, b \in X$, $a < b$ *implica que existe* $c \in X$ *tal que* $a < c < b$.

Teorema

Sejam $(P, \prec_P)$ *e* $(Q, \prec_Q)$ *conjuntos linearmente ordenados contáveis densos sem extremidades.*

Definição

Um conjunto ordenado $(X, <)$ *é* denso *se ele tem pelo menos dois elementos e se para todos* $a, b \in X$, $a < b$ *implica que existe* $c \in X$ *tal que* $a < c < b$.

Teorema

Sejam $(P, \prec_P)$ *e* $(Q, \prec_Q)$ *conjuntos linearmente ordenados contáveis densos sem extremidades. Então* $(P, \prec_P)$ *e* $(Q, \prec_Q)$ *são similares.*

Definição

Um conjunto ordenado $(X, <)$ *é* denso *se ele tem pelo menos dois elementos e se para todos* $a, b \in X$, $a < b$ *implica que existe* $c \in X$ *tal que* $a < c < b$.

Teorema

Sejam $(P, \prec_P)$ *e* $(Q, \prec_Q)$ *conjuntos linearmente ordenados contáveis densos sem extremidades. Então* $(P, \prec_P)$ *e* $(Q, \prec_Q)$ *são similares.*

Teorema

Todo conjunto linearmente ordenado contável pode ser mapeado isomorficamente em qualquer conjunto linearmente ordenado denso contável sem extremidades.