Teoria dos Conjuntos (Aula 1)

Ruy José Guerra Barretto de Queiroz

Centro de Informática, UFPE

2010.1

Conteúdo

“Teoria dos Conjuntos é a ciência matemática do infinito.” (Stanford Encyclopedia of Philosophy).

- Quantos infinitos?

- Quantos infinitos?
- Todos os infinitos são ‘da mesma ordem’?

Teoria dos Conjuntos
Questões naturais

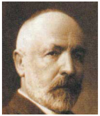
- Quantos infinitos?
- Todos os infinitos são ‘da mesma ordem’?
- Como devem ser comparados os infinitos?

Bernard Bolzano (1781–1848).

- suas teorias do infinito matemático anteciparam a teoria dos conjuntos infinitos de Georg Cantor

Bernard Bolzano (1781–1848).

- suas teorias do infinito matemático anteciparam a teoria dos conjuntos infinitos de Georg Cantor
- dá exemplos de correspondências 1-1 entre os elementos de um conjunto infinito e os elementos de um subconjunto próprio.



Georg Cantor (1845–1918).

- Em 1872 Georg Cantor conhece

  Richard Dedekind (1831–1916).

- Em 1873 Georg Cantor demonstrou a incontabilidade da linha reta real.

Teoria dos Conjuntos

Descobertas de Cantor (cont.)

- Em 1874, considera pelo menos dois tipos diferentes de infinito:

- Em 1874, considera pelo menos dois tipos diferentes de infinito:
  - o conjunto dos números algébricos (raízes de equações polinomiais com coeficientes inteiros)

- Em 1874, considera pelo menos dois tipos diferentes de infinito:
  - o conjunto dos números algébricos (raízes de equações polinomiais com coeficientes inteiros)
  - o conjunto de números transcendentais (não-raiz de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros)

- Em 1874, considera pelo menos dois tipos diferentes de infinito:
  - o conjunto dos números algébricos (raízes de equações polinomiais com coeficientes inteiros)
  - o conjunto de números transcendentais (não-raiz de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros)
- Joseph Liouville (1844) tinha demonstrado a existência de números transcendentais via frações continuadas.

Joseph Liouville (1809–1882).

- ordinais: primeiro, segundo, terceiro, ... (tipos de ordem de conjuntos bem-ordenados)

- ordinais: primeiro, segundo, terceiro, ... (tipos de ordem de conjuntos bem-ordenados)
- cardinais: um, dois, três, ... (potência de um conjunto)

- Qual é o número ordinal do conjunto de todos os ordinais? (Burali-Forti em 1897)

- Qual é o número ordinal do conjunto de todos os ordinais? (Burali-Forti em 1897)

Cesare Burali-Forti (1861–1931).

- Qual é o número ordinal do conjunto de todos os ordinais? (Burali-Forti em 1897)

  Cesare Burali-Forti (1861–1931).
- Qual é o número cardinal do conjunto de todos os conjuntos? (Cantor)

Não existe cardinal maior que o tamanho dos inteiros, e menor que o tamanho dos reais.

- Axiomas 'auto-evidentes' como uma base

- Axiomas ‘auto-evidentes’ como uma base
- Zermelo (1908) iniciou;

Ernst Zermelo (1871–1953).

- Axiomas ‘auto-evidentes’ como uma base
- Zermelo (1908) iniciou;

  Ernst Zermelo (1871–1953).
- Fraenkel (1922 e 1925) aperfeiçoou: demonstrou a independência do ‘axioma da escolha’

  Abraham Fraenkel (1891–1965).

Definição (Extensão)

A extensão *de um conjunto é a coleção dos objetos que ele contém.*

Definição (Extensão)

A extensão *de um conjunto é a coleção dos objetos que ele contém.*

Definição (Pertinência)

Se S é um conjunto que contém x, x é um membro *de S. Podemos também dizer que x* pertence *a S.*

Definição (Extensão)

A extensão *de um conjunto é a coleção dos objetos que ele contém.*

Definição (Pertinência)

Se S é um conjunto que contém x, x é um membro *de S. Podemos também dizer que x* pertence *a S.*
Notação: $x \in S$.

Definição (Extensão)

A extensão *de um conjunto é a coleção dos objetos que ele contém.*

Definição (Pertinência)

Se S é um conjunto que contém x, x é um membro *de S. Podemos também dizer que x* pertence *a S.*
Notação: $x \in S$.
(Negação: '$x \notin S$' significa 'x não *está em S'.)*

Definição (Subconjunto)

Se todo elemento do conjunto S também for um elemento do conjunto R, dizemos que S é um subconjunto *de R.*

Definição (Subconjunto)

Se todo elemento do conjunto S também for um elemento do conjunto R, dizemos que S é um subconjunto *de R.*
Notação: $S \subseteq R$.

Definição (Subconjunto)

Se todo elemento do conjunto S também for um elemento do conjunto R, dizemos que S é um subconjunto *de R.*
Notação: $S \subseteq R$.

Definição (Subconjunto Próprio)

Se S for um subconjunto de R, mas existe pelo menos um elemento de R que não está em S, dizemos que S é um subconjunto próprio *de R.*

Definição (Subconjunto)

Se todo elemento do conjunto S também for um elemento do conjunto R, dizemos que S é um subconjunto *de R.*
Notação: $S \subseteq R$.

Definição (Subconjunto Próprio)

Se S for um subconjunto de R, mas existe pelo menos um elemento de R que não está em S, dizemos que S é um subconjunto próprio *de R.*
Notação: $S \subset R$.

Definição (Superconjunto)

Se todo elemento do conjunto S for também elemento do conjunto R, dizemos que R é um superconjunto *de S.*

Definição (Superconjunto)

Se todo elemento do conjunto S for também elemento do conjunto R, dizemos que R é um superconjunto *de S.*
Notação: $R \supseteq S$.

Definição (Superconjunto)

Se todo elemento do conjunto S for também elemento do conjunto R, dizemos que R é um superconjunto *de S.*
Notação: $R \supseteq S$.

Definição (Superconjunto Próprio)

Se R for um superconjunto de S, mas existe pelo menos um elemento de R que não está em S, dizemos que R é um superconjunto próprio *de S.*

Definição (Superconjunto)

Se todo elemento do conjunto S for também elemento do conjunto R, dizemos que R é um superconjunto *de S.*
Notação: $R \supseteq S$.

Definição (Superconjunto Próprio)

Se R for um superconjunto de S, mas existe pelo menos um elemento de R que não está em S, dizemos que R é um superconjunto próprio *de S.*
Notação: $R \supset S$.

Axioma (Existência)

Existe um conjunto com nenhum elemento.

Axioma (Existência)

Existe um conjunto com nenhum elemento.

Axioma (Extensionalidade)

Se todo elemento de X for um elemento de Y e todo elemento de Y for um elemento de X, então $X = Y$.

Axioma (Existência)

Existe um conjunto com nenhum elemento.

Axioma (Extensionalidade)

Se todo elemento de X for um elemento de Y e todo elemento de Y for um elemento de X, então $X = Y$.

Lema

Existe apenas um conjunto com nenhum elemento.

Axioma (Compreensão)

Seja $\mathbf{P}(x)$ *uma propriedade de* x. *Para qualquer conjunto* A, *existe um conjunto* B *tal que* $x \in B$ *se e somente se* $x \in A$ *e* $\mathbf{P}(x)$.

Axioma (Compreensão)

Seja $\mathbf{P}(x)$ uma propriedade de x. Para qualquer conjunto A, existe um conjunto B tal que $x \in B$ se e somente se $x \in A$ e $\mathbf{P}(x)$.

Lema

Para todo A, existe somente um conjunto B tal que $x \in B$ se e somente se $x \in A$ e $\mathbf{P}(x)$.

Axioma (Compreensão)

Seja $\mathbf{P}(x)$ *uma propriedade de* x. *Para qualquer conjunto* A, *existe um conjunto* B *tal que* $x \in B$ *se e somente se* $x \in A$ *e* $\mathbf{P}(x)$.

Lema

Para todo A, *existe somente um conjunto* B *tal que* $x \in B$ *se e somente se* $x \in A$ *e* $\mathbf{P}(x)$.

Definição

$\{x \in A \mid \mathbf{P}(x)\}$ *é o conjunto de todos os* $x \in A$ *com propriedade* $\mathbf{P}(x)$.

Axioma (Par)

Para quaisquer A e B, existe um conjunto C tal que $x \in C$ se e somente se $x = A$ ou $x = B$.

Axioma (Par)

Para quaisquer A e B, existe um conjunto C tal que $x \in C$ se e somente se $x = A$ ou $x = B$.

Notação: $C = \{A, B\}$

Axioma (Par)

Para quaisquer A e B, existe um conjunto C tal que $x \in C$ se e somente se $x = A$ ou $x = B$.
Notação: $C = \{A, B\}$

Axioma (União)

Para qualquer conjunto S, existe um conjunto U tal que $x \in U$ se e somente se $x \in A$ para algum $A \in S$.

Axioma (Par)

Para quaisquer A e B, existe um conjunto C tal que $x \in C$ se e somente se $x = A$ ou $x = B$.
Notação: $C = \{A, B\}$

Axioma (União)

Para qualquer conjunto S, existe um conjunto U tal que $x \in U$ se e somente se $x \in A$ para algum $A \in S$.
Notação: $U = \bigcup S$

Definição

A é um subconjunto *de B se e somente se todo elemento de A pertence a B. Ou seja, A é um subconjunto de B se, para todo x, $x \in A$ implica $x \in B$.*

Definição

A é um subconjunto *de B se e somente se todo elemento de A pertence a B. Ou seja, A é um subconjunto de B se, para todo* x, $x \in A$ *implica* $x \in B$.

Notação: $A \subseteq B$

Definição

A é um subconjunto *de B se e somente se todo elemento de A pertence a B. Ou seja, A é um subconjunto de B se, para todo* x, $x \in A$ *implica* $x \in B$.

Notação: $A \subseteq B$

Axioma (Conjunto das Partes)

Para qualquer conjunto S, existe um conjunto P tal que $X \in P$ *se e somente se* $X \subseteq S$.

Definição

A é um subconjunto *de B se e somente se todo elemento de A pertence a B. Ou seja, A é um subconjunto de B se, para todo* x*,* $x \in A$ *implica* $x \in B$*.*
Notação: $A \subseteq B$

Axioma (Conjunto das Partes)

Para qualquer conjunto S, existe um conjunto P tal que $X \in P$ *se e somente se* $X \subseteq S$*.*
Notação: *Tal P é escrito da forma* $\mathcal{P}(S)$

Definição

A é um subconjunto *de B se e somente se todo elemento de A pertence a B. Ou seja, A é um subconjunto de B se, para todo* x, $x \in A$ *implica* $x \in B$.

Notação: $A \subseteq B$

Axioma (Conjunto das Partes)

Para qualquer conjunto S, existe um conjunto P tal que $X \in P$ *se e somente se* $X \subseteq S$.

Notação: *Tal P é escrito da forma* $\mathcal{P}(S)$

Terminologia: $\mathcal{P}(S)$ *é o* conjunto das partes *de S.*

Definição

- *A* interseção *de* A *e* B*,* $A \cap B$*, é o conjunto de todos os* x *que pertencem a ambos* A *e* B*.*

Definição

- *A* interseção *de A e B, $A \cap B$, é o conjunto de todos os x que pertencem a ambos A e B.*
- *A* união *de A e B, $A \cup B$, é o conjunto de todos os x que pertencem a A ou a B.*

Definição

- *A* interseção *de A e B, $A \cap B$, é o conjunto de todos os x que pertencem a ambos A e B.*
- *A* união *de A e B, $A \cup B$, é o conjunto de todos os x que pertencem a A ou a B.*
- *A* diferença *de A e B, $A - B$, é o conjunto de todos os $x \in A$ que não pertencem a B.*

Definição

- *A* interseção *de A e B, $A \cap B$, é o conjunto de todos os x que pertencem a ambos A e B.*
- *A* união *de A e B, $A \cup B$, é o conjunto de todos os x que pertencem a A ou a B.*
- *A* diferença *de A e B, $A - B$, é o conjunto de todos os $x \in A$ que não pertencem a B.*
- *A* diferença simétrica *de A e B, $A \triangle B$, é o conjunto de todos os x que não pertencem a ambos A e B.*

Definição (Conjuntos Disjuntos)

- *Dois conjuntos A e B são ditos* disjuntos *se* $A \cap B = \emptyset$.

Definição (Conjuntos Disjuntos)

- *Dois conjuntos A e B são ditos* disjuntos *se* $A \cap B = \emptyset$.
- *Um conjunto S é um* sistema de conjuntos mutuamente disjuntos *se* $A \cap B = \emptyset$ *para todos os* $A, B \in S$ *tais que* $A \neq B$.