Capítulo 5

Probabilidade combinatória

5.1 Eventos e probabilidades

A teoria da probabilidade é uma das áreas mais importantes da matemática do ponto de vista de aplicações. Neste livro. não tentamos introduzir até mesmo as noções mais básicas da teoria da probabilidade; nosso único objetivo é ilustrar a importância dos resultados combinatórios sobre o Triângulo de Pascal explicando um resultado chave em teoria da probabilidade, a Lei dos Grandes Números. Para fazer isso, falamos um pouco sobre o que é probabilidade.

Se fizermos uma observação sobre nosso mundo, ou realizarmos um experimento, o resultado sempre dependerá do acaso (até um certo ponto, que varia a cada caso). Pense na meteorologia, no mercado de ações, ou num experimento médico. A teoria da probabilidade é uma maneira de modelar essa dependência do acaso.

Começamos fazendo uma lista mental de todos os resultados possíveis de um experimento (ou observação, que não precisamos distinguir). Esses resultados possíveis formam um conjunto S. Talvez o experimento mais simples seja jogar uma moeda. Isso tem dois resultados: Ca (cara) e Co (coroa). Portanto nesse caso $S = \{Ca, Co\}$. Como um outro exemplo, os resultados do arremesso de um dado formam o conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Neste livro, assumimos que o conjunto $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ de resultados possíveis de nosso experimento é finito. O conjunto S é frequentemente chamado de *espaço amostral*.

Todo subconjunto de S é chamado de *evento* (o evento de que o resultado observado recai sobre esse subconjunto). Portanto se estamos arremessando um dado, o subconjunto $P = \{2, 4, 6\} \subseteq S$ pode ser pensado como o evento de que jogamos um número par. Igualmente, o subconjunto $M = \{4, 5, 6\} \subseteq S$ corresponde ao evento de que jogamos um número maior que 3.

A interseção de dois subconjuntos corresponde ao evento de que ambos eventos ocorrem; por exemplo, o subconjunto $M \cap P = \{4, 6\}$ corresponde ao evento de que jogamos um número melhor-que-a-média que é também par. Dois eventos A e B (i.e., dois subconjuntos de S) são chamados *exclusivos* se eles nunca ocorrem ao mesmo tempo, i.e., $A \cap B = \emptyset$. Por exemplo, o evento $I = \{1, 3, 5\}$ de que o resultado de jogar um dado é ímpar e o evento P que é par são exclusivos, pois $P \cap I = \emptyset$.

5.1 A que evento a união de dois subconjuntos corresponde?

Portanto seja $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ o conjunto de resultados possíveis de um experimento. Para obter um espaço amostral assumimos que cada resultado $s_i \in S$ tem uma "probabilidade" $\mathsf{P}(s_i)$ tal que

(a) $\mathsf{P}(s_i) \geq 0$ para todo $s_i \in S$,

e

(b) $\mathsf{P}(s_1) + \mathsf{P}(s_2) + \ldots + \mathsf{P}(s_k) = 1$.

Então chamamos S, juntamente com essas probabilidades, um *espaço de probabilidade*. Por exemplo, se jogamos uma moeda "honesta", então $\mathsf{P}(Ca) = \mathsf{P}(Co) = 1/2$. Se o dado no nosso exemplo é de boa qualidade, então teremos $\mathsf{P}(i) = 1/6$ para todo resultado i.

Um espaço de probabilidade no qual todo resultado tem a mesma probabilidade é chamado de *espaço de probabilidade uniforme*. Discutiremos apenas espaços uniformes aqui, pois eles são os mais fáceis de imaginar e são os melhores para a ilustração de métodos combinatórios. Mas você deveria ficar advertido de que em modelagem mais complicada, espaços de probabilidade não-uniformes são muito frequentemente necessários. Por exemplo, se estamos observando se um dia é chuvoso ou não, teremos um espaço amostral de 2-elementos $S = \{\text{CHUVOSO}, \text{NÃO-CHUVOSO}\}$, mas esses dois tipicamente *não* terão a mesma probabilidade.

A probabilidade de um evento $A \subseteq S$ é definida como a soma das probabilidades dos resultados em A, e é representada por $\mathsf{P}(A)$. Se o espaço de probabilidade é uniforme, então a probabilidade de A é

$$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{|A|}{k}.$$

5.2 Prove que a probabilidade de qualquer evento é no máximo 1.

5.3 Qual é a probabilidade do evento E de que joguemos um número par com o dado? Qual é a probabilidade do evento $T = \{3, 6\}$ de que joguemos um número que é divisível por 3?

5.4 Prove que se A e B são exclusivos, então $\mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A \cup B)$.

5.5 Prove que para quaisquer dois eventos A e B,

$$\mathsf{P}(A \cap B) + \mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B).$$

5.2 Repetição independente de um experimento

Vamos repetir nosso experimento n vezes. Podemos considerar esse como um único grande experimento, e um resultado possível desse experimento repetido é uma seqüência de comprimento n, consistindo de elementos de S. Por conseguinte o espaço amostral correspondente a esse experimento repetido é o conjunto S^n de tais seqüências. Consequentemente o número de resultados desse "grande" experimento é k^n. Consideramos toda seqüência igualmente provável, o que significa que o consideramos um espaço de probabilidade uniforme. Por conseguinte, se $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é um resultado do "grande" experimento, então temos

$$\mathsf{P}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{1}{k^n}.$$

Como um exemplo, considere o experimento de jogar uma moeda duas vezes. Então $S = \{Ca, Co\}$ (cara,coroa) para um único arremesso de moeda, e portanto o espaço amostral para os dois arremessos de moeda é $\{CaCa, CaCo, CoCa, CoCo\}$. A probabilidade de cada um desses resultados é $1/4$.

Essa definição pretende modelar a situação em que o resultado de cada experimento repetido é independente dos resultados anteriores, no sentido do dia-a-dia de que "não pode possivelmente haver qualquer influência mensurável de um experimento sobre o outro". Não podemos nos deixar levar às questões filosóficas que essa noção levanta; tudo o que podemos fazer é dar uma definição matemática que podemos conferir com exemplos que ela expressa a noção informal acima.

Uma noção chave em probabilidade é *independência* de eventos. Informalmente, isso significa que informação sobre um (se ele ocorreu ou não) não influencia a probabilidade do outro. Formalmente, dois eventos A e B são *independentes* se $\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$. Por exemplo, se $P = \{2, 4, 6\}$ é o evento de que o resultado de jogar um dado é par, e $T = \{3, 6\}$ é o evento de que ele é um múltiplo de 3, então o evento E e o evento T são independentes: temos $P \cap T = \{6\}$ (a única possibilidade de se jogar um número que é par e divisível por 3 é jogar 6), e portanto

$$\mathsf{P}(P \cap T) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \mathsf{P}(P)\mathsf{P}(T).$$

Considere novamente o experimento de arremessar uma moeda duas vezes. Seja A o evento de que o primeiro arremesso é cara; seja B o evento de que o segundo arremesso é cara. Então temos $\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(CaCa) + \mathsf{P}(CaCo) = 1/4 + 1/4 = 1/2$, igualmente $\mathsf{P}(B) = 1/2$, e $\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(CaCa) = 1/4 = (1/2) \cdot (1/2)$. Portanto A e B são eventos independentes (como deveriam ser).

5.6 Que pares entre os eventos P, I, T, M são independentes? Que pares são exclusivos?

5.7 Mostre que $\emptyset$ é independente de todo evento. Existe algum outro evento com essa propriedade?

5.8 Considere um experimento com espaço amostral S repetido n vezes ($n \geq 2$). Suponha que $s \in S$. Seja A o evento de que o primeiro resultado é s, e seja B o evento de que o último resultado é s. Prove que A e B são independentes.

5.9 Quantas pessoas você acha que existem no mundo que têm o mesmo aniversário que sua mão, pai, e cônjuge?

5.3 A Lei dos Grandes Números

Nesta seção estudamos um experimento que consiste de n arremessos de moeda independentes. Por simplicidade, assuma que n é par, de modo que $n = 2m$ para algum inteiro m. Todo resultado é uma seqüência de comprimento n, na qual cada elemento é Ca ou Co. Um resultado típico seria algo como:

$$CaCaCoCoCoCaCoCaCoCoCaCoCaCaCaCaCoCaCoCo$$

(para $n = 20$).

A "Lei dos Grandes Números" diz que se arremessamos uma moeda muitas vezes, o número de 'caras' será aproximadamente o mesmo que o número de 'coroas'. Como podemos tornar esse enunciado preciso? Certamente, isso não será *sempre* verdadeiro; pode-se ser extremamente sortudo ou azarado, e ter um rajada vencedora ou perdedora de comprimento arbitrário. Também, não podemos afirmar que o número de caras é igual ao número de coroas; apenas que eles são próximos. O teorema seguinte é a forma mais simples da Lei dos Grandes Números.

Teorema 5.3.1 *Suponha que $0 \le t \le m$. Então a probabilidade de que dos $2m$ arremessos independentes de moeda, o número de caras é menor que $m - t$ ou maior que $m + t$, é no máximo $e^{-t^2/(m+t)}$.*

Vamos discutir isso um pouco. Estamos falando da "Lei dos Grandes Números", portanto podemos assumir que $m > 100$. Se escolhermos, digamos, $t = 3\sqrt{m}$, então é fácil verificar que $t^2/(m + t) > 5$. Portanto obtemos um caso especial interessante:

Corolário 5.3.2 *Com probabilidade no mínimo $0,99$, o número de caras entre $2m$ arremessos de moeda independentes está entre $m - 3\sqrt{m}$ e $m + 3\sqrt{m}$.*

Se m é muito grande, então $3\sqrt{m}$ é muito menor que m, portanto obtemos que o número de caras é muito próximo a m. Por exemplo, se $m = 1.000.000$ então $3\sqrt{m} = 0,003m$, e portanto segue que com probabilidade no mínimo $0,99$, o número de caras está entre $1/3$ de um percentual de $m = n/2$.

Gostaríamos de mostrar que a Lei dos Grandes Números não é uma força misteriosa, mas uma simples conseqüência das propriedades dos coeficientes binomiais.

Prova. Suponha que A_k represente o evento de que arremessamos exatamente k caras. Está claro que os eventos A_k são mutuamente exclusivos. Está claro também que para todo resultado do experimento, exatamente um dos A_k ocorre.

O número de resultados para os quais A_k ocorre é o número de seqüências de comprimento n consistindo de k 'caras' e $n - k$ 'coroas'. Se especificarmos quais das n posições são 'caras', estamos resolvidos. Isso pode ser feito de $\binom{n}{k}$ maneiras, de modo que o conjunto A_k tem $\binom{n}{k}$ elementos. Como o número total de resultados é 2^n, obtemos o seguinte.

$$\mathsf{P}(A_k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}.$$

Qual é a probabilidade de que o número de caras seja longe do esperado, que é $m = n/2$? Digamos, ela é menor que $m - t$ ou maior que $m + t$, onde t é qualquer inteiro positivo não maior que m? Usando o exercício 5.4, vemos que a probabilidade de que isso aconteça é

$$\frac{1}{2^{2m}}\left(\binom{2m}{0}+\binom{2m}{1}+\ldots+\binom{2m}{m-t-1}+\binom{2m}{m+t+1}+\ldots\right.$$
$$\left.+\binom{2m}{2m-1}+\binom{2m}{2m}\right).$$

Agora podemos usar o Lema 3.8.2, com $k = m - t$, e obter que

$$\binom{2m}{0}+\binom{2m}{1}+\ldots+\binom{2m}{m-t-1}<2^{2m-1}\binom{2m}{m-t}\Big/\binom{2m}{m}$$

Por (3.9), isso pode ser limitado por cima por

$$2^{2m-1}e^{-t^2/(m+t)}.$$

Pela simetria do Triângulo de Pascal, temos também que

$$\binom{2m}{m+t+1}+\ldots+\binom{2m}{2m-1}+\binom{2m}{2m}<2^{2m}e^{-t^2/(m+t)}.$$

Daí obtemos que a probabilidade de que arremessemos menos que $m-t$ ou mais que $m+t$ caras é menor que $e^{-t^2/(m+t)}$. Isso prova o teorema. □

5.4 A Lei dos Pequenos Números e a Lei dos Números Muito Grandes

Existem duas "leis" estatísticas adicionais (metade sérias): uma *Lei dos Pequenos Números* e a *Lei dos Números Muito Grandes*.

A primeira diz que você pode encontrar muitos padrões estranhos ou interessantes se você olhar para exemplos pequenos, que não generalizam para números maiores, simplesmente porque para números pequenos existem muitas coincidências. Por exemplo, "todo número ímpar é um primo" é verdadeiro em relação a 3,5 e 7 (e pode-se ficar tentado a dizer que é verdadeiro também com relação a 1, que é ainda "mais simples" que primos: ao invés de dois divisores, ele tem apenas um). É claro que isso falha para 9.

Primos são estranhos (como veremos) e na sua seqüência irregular, um monte de padrões estranhos podem ser observados, que então falham se continuamos para números maiores. Um exemplo dramático é a fórmula $n^2 - n + 41$. Ela dá um primo para $n = 0, 1, \ldots, 40$, mas para $n = 41$ obtemos $41^2 - 41 + 41 = 41^2$, que não é um primo.

Números de Fibonacci não são tão estranhos quanto primos: vimos que muitas propriedades interessantes deles, e derivamos uma fórmula explícita no Capítulo 4. Mesmo assim, pode fazer observações para o início da seqüência que não permanecem válidas se as verificarmos suficientemente longe. Por exemplo, o Exercício 4.16 deu uma fórmula (falsa) para os números de Fibonacci, a saber $\lceil e^{n/2-1} \rceil$, que estava correta para os primeiros 10 inteiros positivos n. Existem muitas fórmulas que dão seqüências de inteiros, mas essas seqüências podem começar de umas tantas maneiras: somos limitados a encontrar seqüências diferentes que começam da mesma maneira.

Portanto o moral da "Lei dos Pequenos Números" é que para fazer um enunciado matemático, ou mesmo estabelecer uma conjectura matemática, não é suficiente observar algum padrão ou regra, porque você pode observar apenas instâncias pequenas e existem muitas coincidências para essas. Não há nada de errado com fazer conjecturas em matemática, generalizando fatos observados em casos especiais, mas mesmo uma conjectura precisa de alguma outra justificativa (um argumento impreciso, ou um caso especial demonstrável). Um teorema, é claro, precisa de muito mais: uma prova exata.

A Lei dos Números Muito Grandes diz que coincidências estranhas podem também ser observadas se olharmos para conjuntos grandes de dados. Um amigo nosso diz: "Conheço 2 pessoas que nasceram no dia de Natal. Elas se queixam que elas ganham apenas um conjunto de presentes... Isso é realmente estranho. Existem muito mais pessoas nascidas no dia de Natal que em outros dias?" Não, essa não é a explicação. A probabilidade de que uma pessoa nasça no dia de Natal é $1/365$ (vamos ignorar anos bissextos), logo, se alguém conhece, digamos, 400 pessoas, então você pode esperar que 1 ou 2 delas tenham o aniversário no Natal. É claro que, você provavelmente não se lembra dos aniversários da maioria das pessoas que você conhece; mas você tende a se lembrar daqueles que se queixam de não ganhar um número suficiente de presentes!

Você acharia estranho, até mesmo curioso, se alguém tivesse o mesmo aniversário que sua mãe, pai, e esposa? Mas se você resolveu o exercício 5.9, você sabe que temos provavelmente cerca de 40 ou algo parecido de pessoas no mundo, e provavelmente um par delas nos EEUU.

Essa é uma área fértil para os tablóides e também para os que acreditam no paranormal. É melhor parar por aqui.

Exercícios de Revisão

5.10 Jogamos um dado duas vezes. Qual é a probabilidade de que a soma dos pontos seja 8?

5.11 Escolha um inteiro uniformemente do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 30\}$. Seja A o evento de que ele é divisível por 2; seja B o evento de que ele é divisível por 3; seja C o evento de que ele é divisível por 7.

(a) Determine as probabilidades de A, B e C.

(b) Quais dos pares (A, B), (B, C) e (A, C) são independentes?

5.12 Sejam A e B eventos independentes. Expresse a probabilidade $\mathsf{P}(A \cup B)$ em termos das probabilidades de A e B.

5.13 Selecionamos um subconjunto X do conjunto $S = \{1, 2, \ldots, 100\}$ aleatoriamente and uniformemente (de modo que todo subconjunto tem a mesma probabilidade de ser selecionado). Qual é a probabilidade de que

(a) X tenha um número par de elementos;

(b) ambos 1 e 100 pertença a X;
(c) o maior elemento de S seja 50;
(d) S tenha no máximo 2 elementos.

5.14 Jogamos uma moeda n vezes ($n \geq 1$). Para quais valores de n os seguintes pares de eventos são independentes?
(a) A primeira jogada foi Cara; o número de Caras foi par.
(b) A primeira jogada foi Cara; o número de Caras foi mais que o número de Coroas.
(c) O número de Caras foi par; o número de Caras foi mais que o número de Coroas.