

Probabilidade

-
- 1 – Medidas de Posição
 - 2 – Medida de Dispersão

Renata Souza

Medidas de Posição: Média ou Esperança Matemática

- ✦ Uma seguradora paga R\$ 30.000,00 em caso de acidente de carro e cobra uma taxa de R\$ 1.000,00. Sabe-se que a probabilidade de que um carro sofra um acidente é 3%. Quanto espera a seguradora ganhar por cada carro segurado?
- ◆ Solução: Suponhamos que entre 100 carros, 97 dão lucro de R\$ 1.000,00 e 3 dão prejuízo de R\$ 29.000,00.
 - ◆ Lucro total: $97 \times 1.000 - 3 \times 29.000 = 10.000,00$
 - ◆ Lucro médio por carro = $10.000,00 / 100 = \text{R\$ } 100,00$
 - ◆ Se chamamos X : lucro por carro e $E(X)$ por lucro médio por carro, teremos

Medidas de Posição: Média ou Esperança Matemática

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{97 \times 1.000,00 - 3 \times 29.000,00}{100} \\ &= \frac{97}{100} \times 1.000,00 - \frac{3}{100} \times 29.000,00 \\ &= 0,97 \times 1.000,00 - 0,03 \times 29.000,00 \end{aligned}$$

✦ Definição para o caso discreto $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \times p(x_i)$

✦ Definição para o caso contínuo $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$

✦ É um número real e também uma média ponderada. Notação: μ ou μ_x .

Exemplo: Caso Discreto

Suponha que um número seja selecionado entre 1 e 10.
Seja X o número de divisores do número selecionado.
Calcular o número médio de divisores do número selecionado.

Nº	Nº de Divisores
1	1
2	2
3	2
4	3
5	2
6	4
7	2
8	4
9	3
10	4

X	P(x)	X × P(X)
1	1/10	1/10
2	4/10	8/10
3	2/10	6/10
4	3/10	12/10
Total	1	2,7

$$E(X)=2,7$$

Exemplo: Caso Contínuo

✦ Seja X uma variável aleatória contínua com a seguinte função de densidade.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{para } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

✦ A esperança de X é

$$E(X) = \int_0^1 2xx dx = \int_0^1 2x^2 dx = 2 \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = 2/3$$

Medidas de Posição:

Propriedades da Média

✦ Sejam X e Y duas variáveis aleatórias e k uma constante.

- ✦ 1. $E(k)=k$, k sendo uma constante.
- ✦ 2. $E(KX)=kE(X)$.
- ✦ 3. $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$.
- ✦ 4. $E(X \pm k) = E(X) \pm k$.
- ✦ 5. $E(X - \mu) = E(X) - \mu = 0$
- ✦ 6. $E(XY) = E(X) \times E(Y)$ se X e Y são independentes.

Medidas de Posição: Mediana

✦ A mediana de uma variável aleatória é o valor que divide a distribuição em duas partes iguais, ou seja $F(Md)=0,5$ onde Md é a mediana.

✦ Exemplos

- ✦ Seja X uma v. a. contínua com a seguinte função de distribuição
- ✦ $F(x)=0$ para $x < 0$
- ✦ $F(x)=x^2$ para $0 \leq x < 1$
- ✦ $F(x)=1$ para $x \geq 1$
- ✦ Logo a mediana será o valor x tal que $F(x=md)=0,5$.
- ✦ A mediana é $\sqrt{1/2}$

Medidas de Posição: Moda

✦ É o valor da variável com maior probabilidade, se X é discreta, ou maior densidade se X for contínua.

✦ Exemplos:

● Se X é discreta tal que

X	-1	0	2
P(X)	0,3	0,2	0,5

● A moda $m_0 = 2$.

● Se X é contínua tal que $f(x) = 2x$ para $0 \leq x \leq 1$

● A moda m_0 é 1 e a mediana $F(md) = 0,5$

$$\int_0^{Md} 2x dx = 0,5 \Rightarrow \frac{2x^2}{2} \Big|_0^{Md} = Md^2 = 0,5$$

● Mediana é 0,5.

Medidas de Dispersão: Variância

✦ Define-se a variância de uma variável aleatória como sendo

$$\text{Var}(X) = \sigma_X^2 = E[(X - \mu_X)^2]$$

✦ Para X discreta $\sigma_X^2 = \sum (X_i - \mu_{(X)})^2 P(x_i)$

✦ Para X contínua $\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f(x) dx$

Medidas de Dispersão: Desvio Padrão

- ✦ O desvio padrão é a raiz quadrada da variância

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$$

- ✦ Pode-se encontrar o desvio usando a variância dada por

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - (\mu_X)^2$$

Medidas de Dispersão:

Propriedades da Variância

- ✦ 1. Seja k uma constante. A variância de uma constante é zero. $\text{Var}(k)=0$.
- ✦ 2. $\text{Var}(kX)=k^2\text{Var}(X)$.
- ✦ 3. $\text{Var}(X\pm k)=\text{Var}(X)$

Exemplo

✦ Seja X discreta tal que

X	-1	0	2
P(X)	0,3	0,2	0,5

✦ A esperança de X é

$$\mu(X) = \sum_{i=1}^3 x_i p(x_i) = -1 \times 0,3 + 0 \times 0,2 + 2 \times 0,5 = 0,7$$

✦ A variância de X é

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^3 (x_i - \mu(x))^2 p(x_i) = (-1,7)^2 0,3 + (-0,7)^2 0,2 + (1,3)^2 0,5 = 1,81$$

✦ O desvio padrão é

$$\sigma_X = \sqrt{1,041} = 1,020$$

Exemplo

- ✦ Seja X uma variável aleatória contínua com a seguinte função de densidade.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{para } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- ✦ A esperança de X é $2/3$.

- ✦ A variância de X é

$$\text{Var}(X) = \int_0^1 (x - 2/3)^2 2x dx = 1/18$$

- ✦ O desvio padrão é

$$\sigma_x = \sqrt{1/18} = 0,235$$