

# 3

Variáveis Aleatórias  
Discretas e  
Distribuições de  
Probabilidade

# 3

## Variáveis Aleatórias Discretas e Distribuições de Probabilidade

### Objetivos do aprendizado

- a. Determinar probabilidades a partir de funções de probabilidade
- b. Determinar probabilidades a partir de funções de distribuição cumulativa.
  - a. Calcular média e variância para variáveis discretas.

# 3-1 Variáveis aleatórias discretas

---

## Exemplos 3.1 e 3.2

- **3.1 Um sistema de comunicação de voz contem 48 linhas externas. Dado um tempo, o sistema é observado e algumas das linhas estão sendo usadas. Seja  $X$  o número de linhas uso.  $X$  pode assumir valores inteiros 0 até 48. For exemplo,  $x=10$ .**
- **3.2 Seja  $X$  o número de bits com erro nos quatro próximos bits transmitidos. Os valores possíveis para  $X$  são  $\{0,1,2,3,4\}$ .**

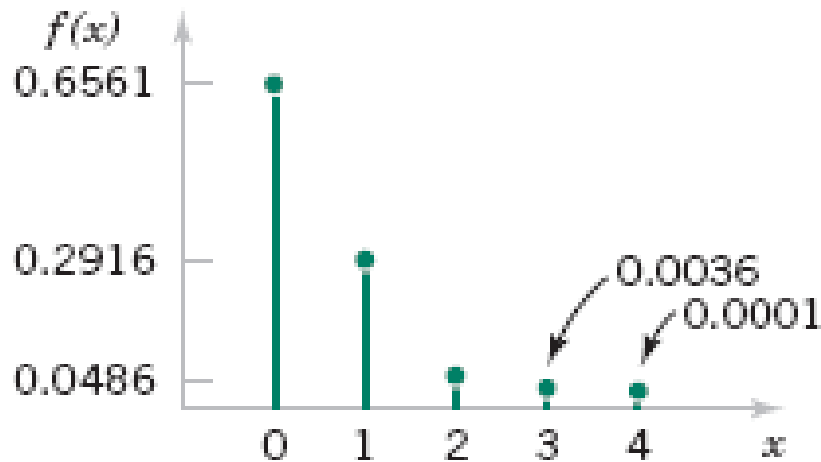
## 3-2 Distribuições de probabilidade e funções de probabilidade

---

As probabilidades para os valores da variável  $X$  do exemplo 3.2 são:

$$P(X=0)=0,6561 \quad P(X=1)= 0,2916 \quad P(X=2)= 0,0486$$

$$P(X=3)=0,0036 \quad P(X=4)= 0,0001$$



**Figura 3-1** Distribuição de probabilidade para bits com erro.

## 3-2 Distribuições de probabilidade e funções de probabilidade

---

### Definição

**Para uma variável aleatória  $X$  com possíveis valores  $x_1, \dots, x_n$ , a função de probabilidade é uma função tal que**

$$(1) \quad f(x_i) \geq 0$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n f(x_i) = 1$$

$$(3) \quad f(x_i) = P(X = x_i) \tag{3-1}$$

## Exemplo 3-5

### *Contaminação de pastilhas*

Seja a variável aleatória  $X$  o de pastilhas de semicondutores que necessitam ser analisadas, de modo a detectar uma grande partícula de contaminação. Seja 0,01 a probabilidade de uma pastilha conter uma grande partícula e que as pastilhas sejam independentes. Determine a distribuição de probabilidade de  $X$ . Seja  $p$  uma pastilha em que uma grande partícula esta presente e  $a$  uma pastilha em que essa partícula esteja ausente.

O espaço amostral do experimento é infinito. Isto é  $S = \{p, ap, aap, aaap, aaaap, \dots\}$ .

Considere  $P(X=1) = p=0,01$ ,  $P(X=2)=0,99(0,01)=0,0099$

## Exemplo 3-5 (continuação)

### *Contaminação de pastilhas*

Uma formula geral é:

$$P(X = x) = \underbrace{P(aa \dots ap)}_{(x-1)a's} = 0.99^{x-1} (0.01), \quad \text{para } x = 1, 2, 3, \dots$$

Temos que  $f(x) \geq 0$ . O fato da soma das probabilidades é igual a 1 é deixado como exercício.

Esse é um exemplo de uma variável aleatória geométrica.

# 3-3 Funções de Distribuição Acumulada

## Definição

A função de distribuição acumulada ou cumulativa de uma variável discreta  $X$  é denotada por  $F(x)$

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

$F(x)$  satisfaz as seguintes propriedades

(1)  $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$

(2)  $0 \leq F(x) \leq 1$

(3) If  $x \leq y$ , then  $F(x) \leq F(y)$

(3-2)

## Exemplo 3-8

Suponha que uma produção diária de 850 peças fabricadas contenha 50 delas que não obedecem aos requerimentos do consumidor. Duas peças são selecionadas ao acaso, sem reposição, da batelada. Seja a variável aleatória  $X$  o número de peças não-conformes a amostra. Qual é a função de distribuição cumulativa de  $X$ ?

$$P(X = 0) = \frac{800}{850} \cdot \frac{799}{849} = 0.886$$

$$P(X = 1) = 2 \cdot \frac{800}{850} \cdot \frac{50}{849} = 0.111$$

$$P(X = 2) = \frac{50}{850} \cdot \frac{49}{849} = 0.003$$

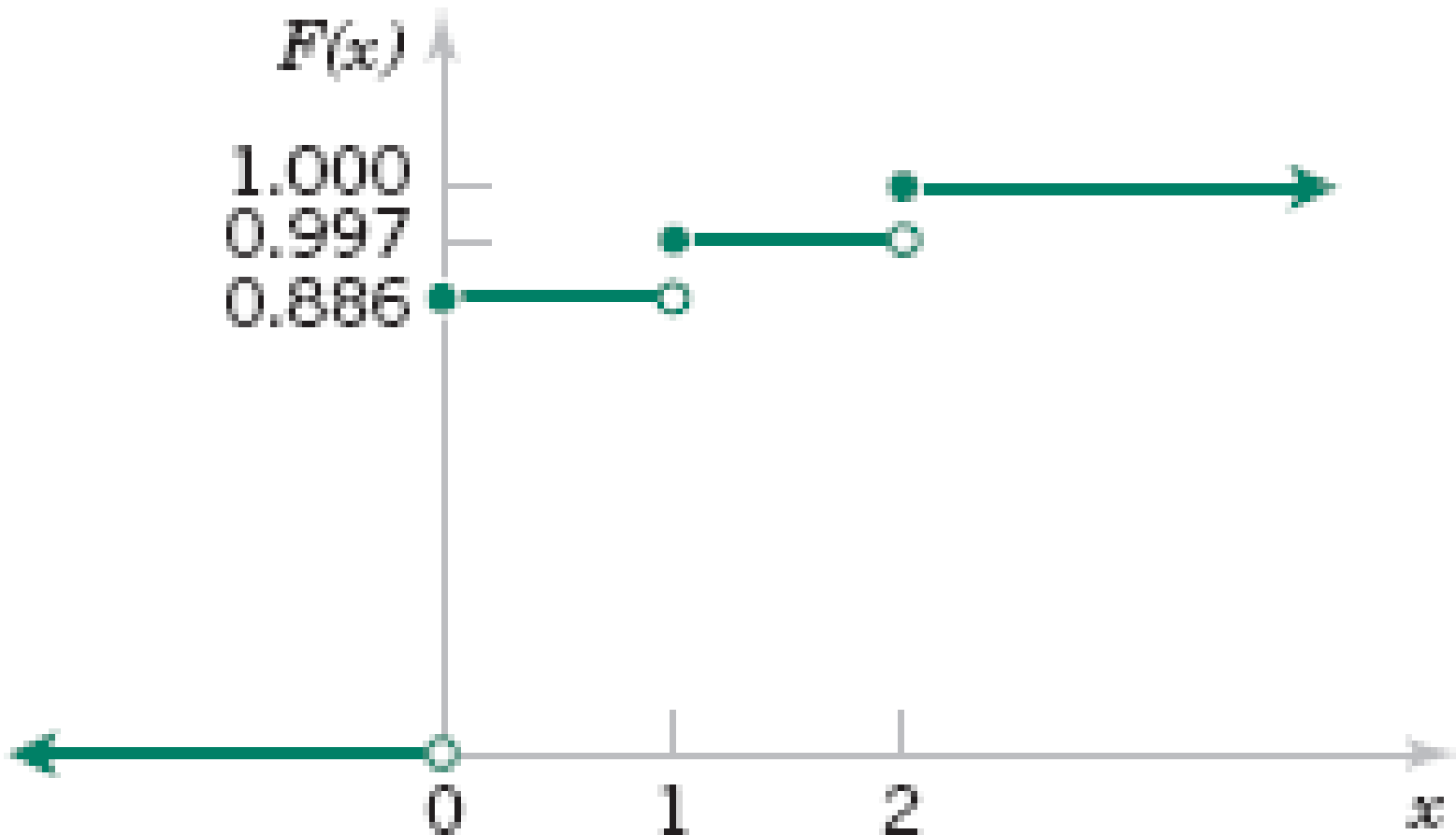
Logo

$$F(0) = P(X \leq 0) = 0.886$$

$$F(1) = P(X \leq 1) = 0.886 + 0.111 = 0.997$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = 1$$

## Exemplo 3-8



**Figura 3-4** Função de distribuição acumulada para o Exemplo 3-8

# 3-4 Média e Variância de uma Variável Discreta

---

## Definição

A média de uma variável  $X$  é

$$\mu = E(X) = \sum_x xf(x) \quad (3-3)$$

A variância de uma variável  $X$  é

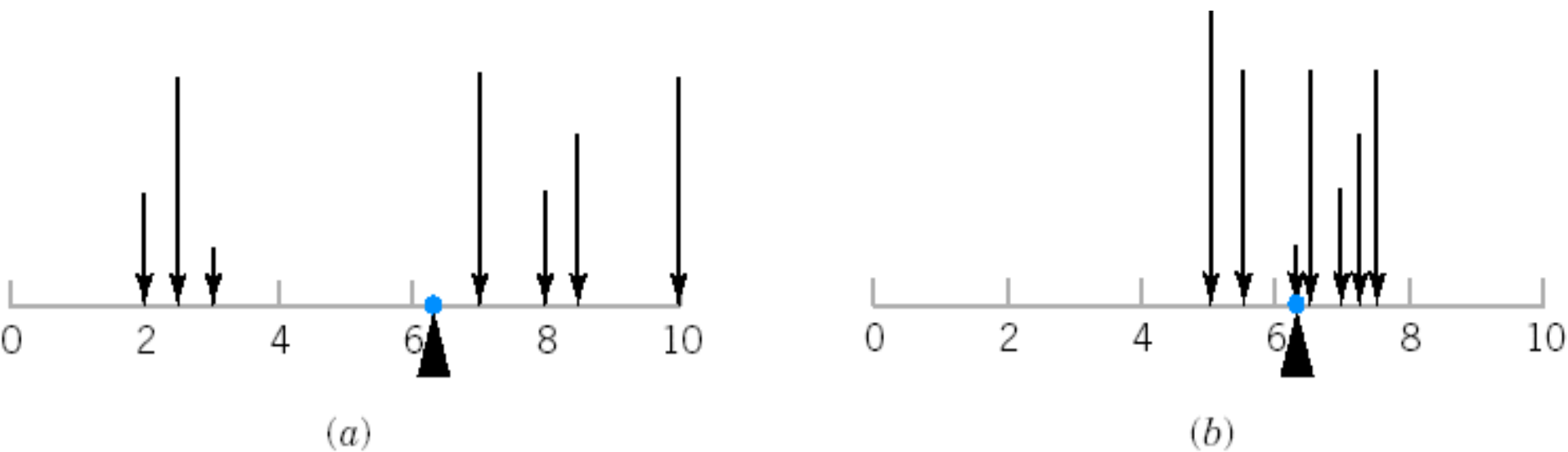
$$\sigma^2 = V(X) = E(X - \mu)^2 = \sum_x (x - \mu)^2 f(x) = \sum_x x^2 f(x) - \mu^2$$

O desvio padrão de uma variável  $X$  é

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}.$$

## 3-4 Média e Variância da uma Variável Discreta

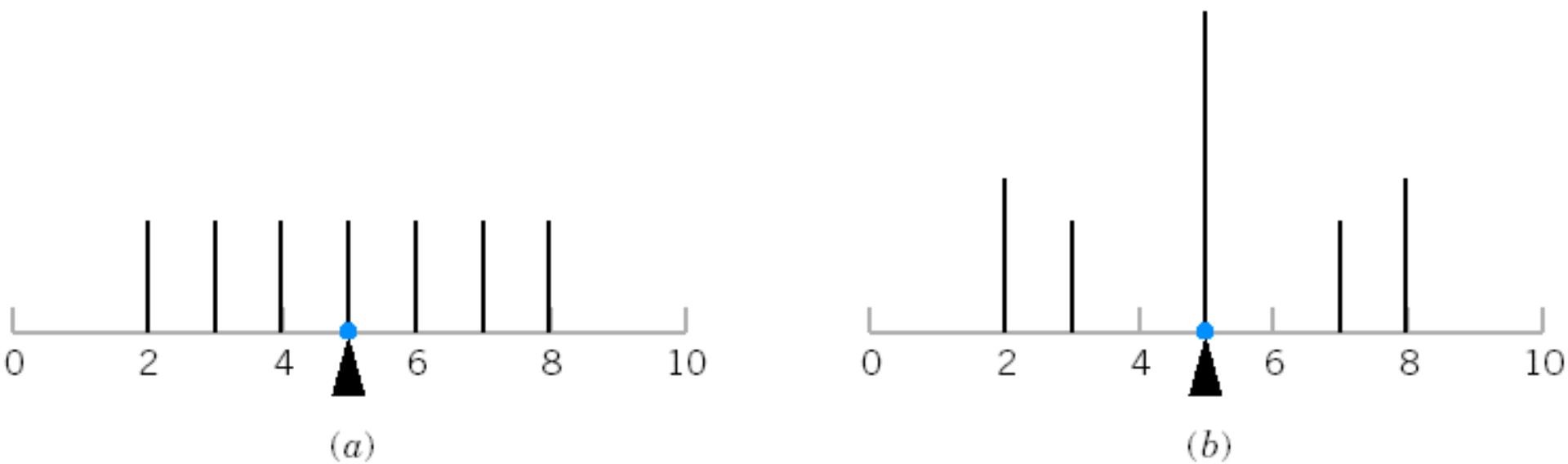
---



**Figure 3-5** Uma distribuição de probabilidade como um carregamento com média igual ao ponto de equilíbrio. (a) e (b) ilustram médias iguais, porém (a) ilustra uma variância maior.

## 3-4 Média e Variância da uma Variável Discreta

---



**Figura 3-6** As distribuições de probabilidade ilustradas em (a) e (b) diferem, muito embora elas tenham médias e variâncias iguais.

## Exemplo 3-11

O número de mensagens enviadas por hora, através de uma rede de computadores, tem a seguinte distribuição

$x =$ No de mensagens	10	11	12	13	14	15
$f(x)$	0.08	0.15	0.30	0.20	0.20	0.07

Determine a média e o desvio-padrão do número de mensagens enviadas por hora

$$E(X) = 10(0.08) + 11(0.15) + \cdots + 15(0.07) = 12.5$$

$$V(X) = 10^2(0.08) + 11^2(0.15) + \cdots + 15^2(0.07) - 12.5^2 = 1.85$$

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1.85} = 1.36$$

# 3-4 Média e Variância da uma Variável Discreta

---

A variância de uma v.a.  $X$  pode ser considerada como o valor esperado de uma função de  $X$ , isto é,  $h(x)=(X-\mu)^2$

Se  $X$  é uma variável aleatória discreta com função de probabilidade  $f(x)$

$$E[h(X)] = \sum_x h(x)f(x) \quad (3-4)$$

# 4

Variáveis Aleatórias  
Contínuas e  
Distribuições de  
Probabilidade

## Objetivos do aprendizado

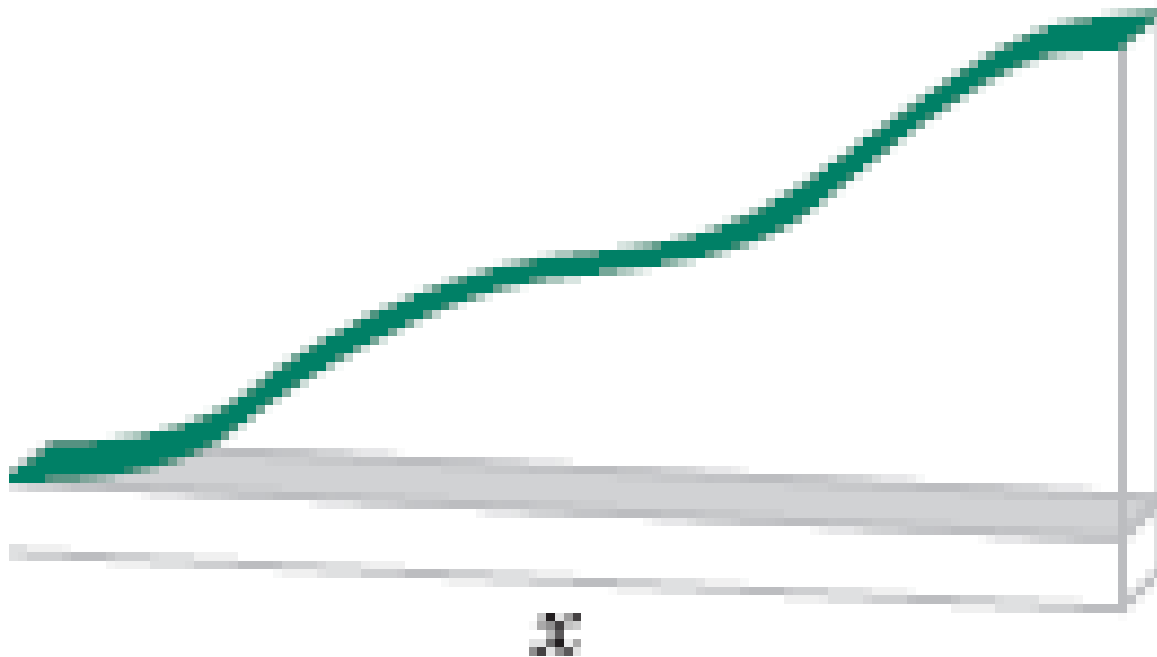
- a. Determinar probabilidades a partir de funções de densidade de probabilidade
- b. Determinar probabilidades a partir de funções de distribuição cumulativa e funções de distribuição cumulativa a partir de funções de densidades de probabilidade e o contrario.
- c. Calcular média e variância para variáveis contínuas.

# 4-1 Variáveis Aleatórias Contínuas

- tempo de resposta de um sistema computacional;
  - rendimento de um processo químico;
  - tempo de vida de um componente eletrônico;
  - resistência de um material; etc.
- 
- Variáveis aleatórias discretas com grande número de possíveis resultados (podem ser aproximadas para contínuas):
    - número de transações por segundo de uma CPU;
    - número de defeitos numa amostra de 5.000 itens; etc.

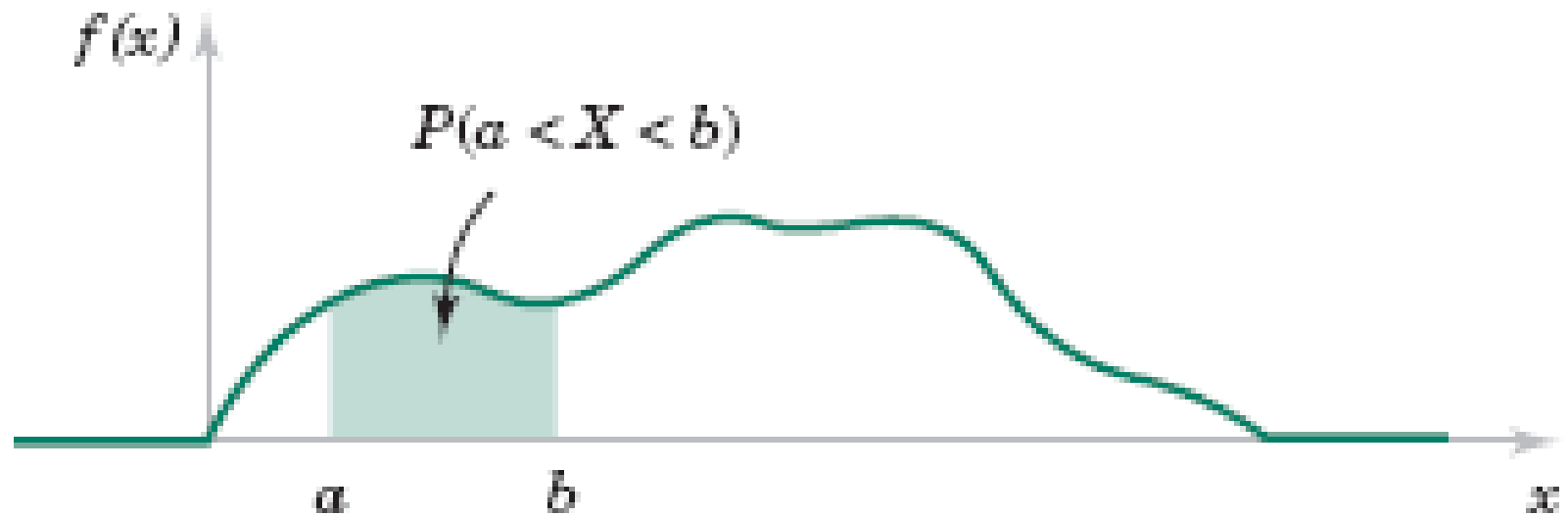
## 4-2 Distribuições de Probabilidades e Funções de Densidades de Probabilidades

---



**Figura 4-1** Função de densidade de uma carga ao longo de uma viga longa e delgada.

# 4-2 Distribuições de Probabilidades e Funções de Densidades de Probabilidades



**Figura 4-2** Probabilidade determinada a partir da área sob  $f(x)$ .

# 4-2 Distribuições de Probabilidades e Funções de Densidades de Probabilidades

## Definição

Para uma v.a. contínua  $X$ , a função de densidade de probabilidade é uma função tal que

$$(1) \quad f(x) \geq 0$$

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

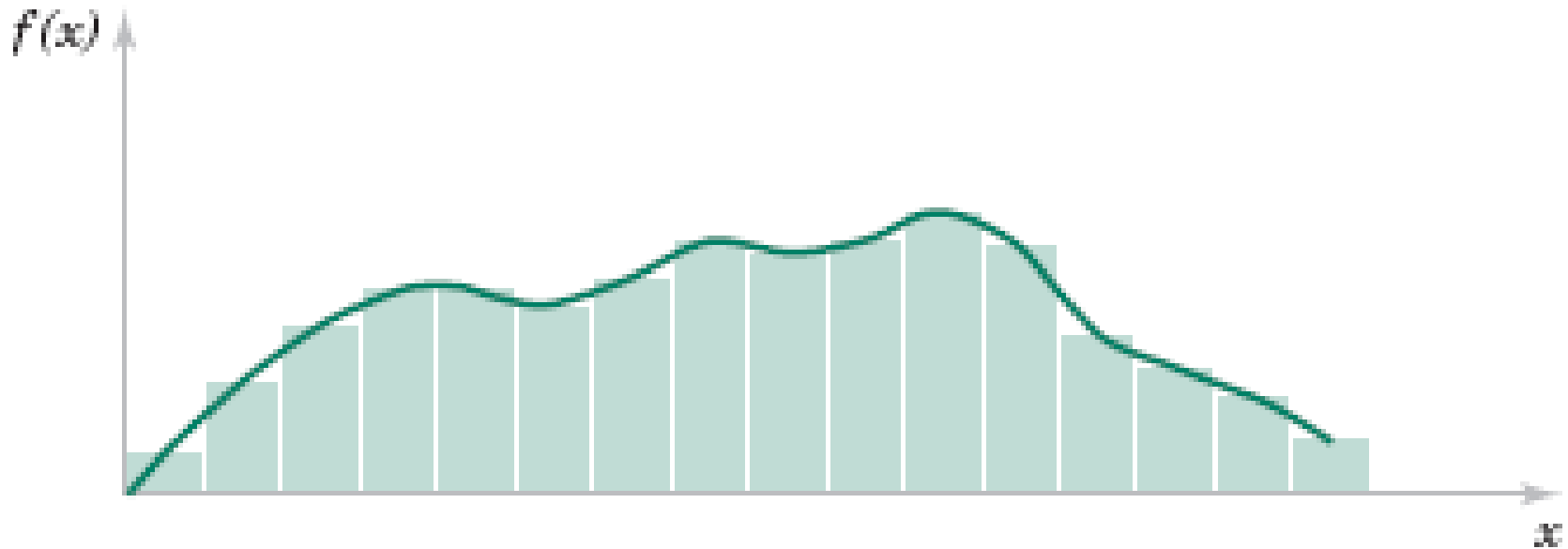
$$(3) \quad P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx = \text{Área sob } f(x) \text{ de } a \text{ e } b$$

Para qualquer  $a$  e  $b$

(4-1)

# 4-2 Distribuições de Probabilidades e Funções de Densidades de Probabilidades

---



**Figura 4-3** Um histograma aproxima uma função de densidade de probabilidade

## **4-2 Distribuições de Probabilidades e Funções de Densidades de Probabilidades**

Se  $X$  é uma v.a. contínua, então para qualquer  $x_1$  e  $x_2$

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 \leq X < x_2) = P(x_1 < X < x_2) \quad (4-2)$$

# 4-2 Distribuições de Probabilidades e Funções de Densidades de Probabilidades

---

## Exemplo 4-2

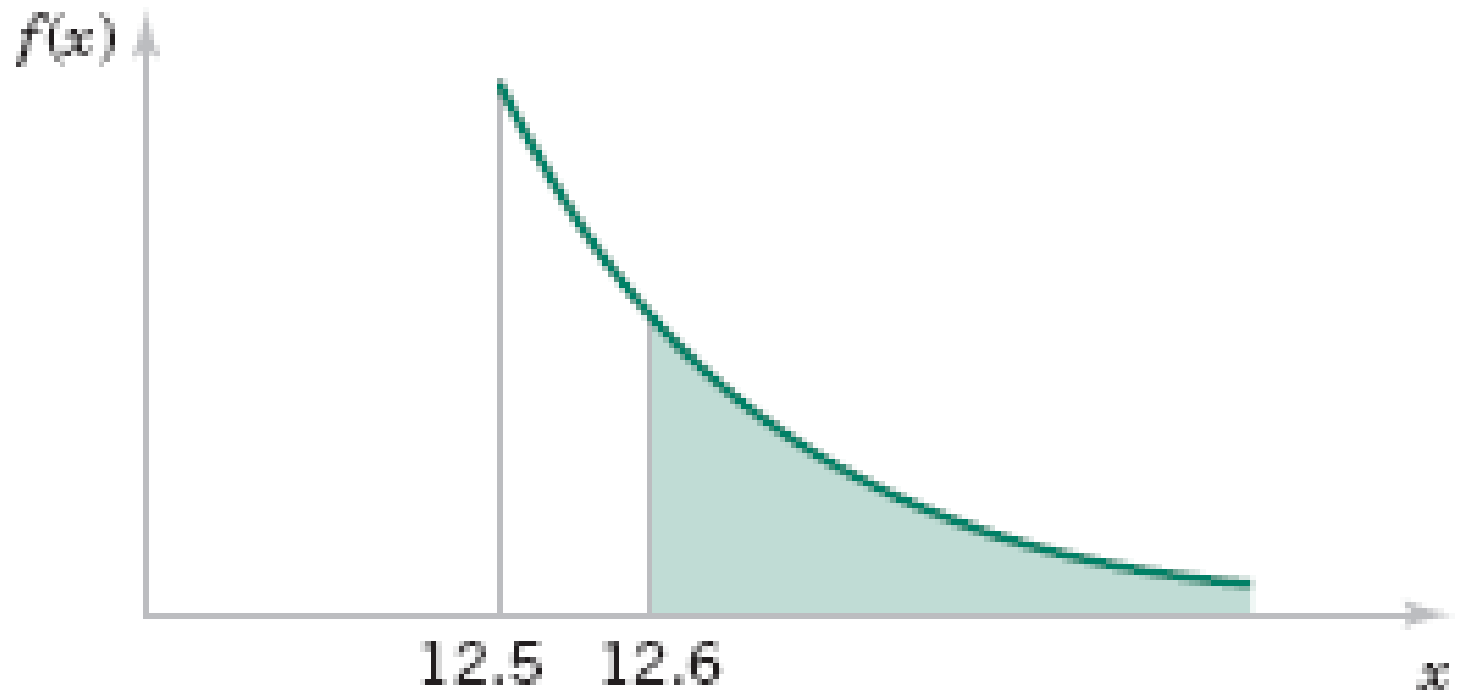
Seja a v.a. contínua  $X$  o diâmetro de um orifício perfurado em uma placa com um componente metálico. O diâmetro alvo é 12,5 milímetros. A maioria dos distúrbios aleatórios no processo resulta em diâmetros maiores. Dados históricos mostram que a distribuição de  $X$  pode ser modelada por uma função de densidade dada abaixo

$$f(x) = 20e^{-20(x-12,5)}, x \geq 12,5$$

Se uma peça com diâmetro maior que 12,60 milímetros for descartada, qual será a proporção de peças descartadas? Uma peça é descartada se  $X > 12,60$

$$P(X > 12.60) = \int_{12.6}^{\infty} f(x) dx = \int_{12.6}^{\infty} 20e^{-20(x-12.5)} dx = -e^{-20(x-12.5)} \Big|_{12.6}^{\infty} = 0.135$$

## 4-2 Distribuições de Probabilidades e Funções de Densidades de Probabilidades



**Figura 4-5** Função de densidade de probabilidade para o Exemplo 4-2.

## 4-2 Distribuições de Probabilidades e Funções de Densidades de Probabilidades

### Exemplo 4-2 (continuação)

Que proporção de peças está entre 12,5 e 12,6 milímetros?

$$P(12.5 < X < 12.6) = \int_{12.5}^{12.6} f(x) dx = -e^{-20(x-12.5)} \Big|_{12.5}^{12.6} = 0.865$$

Uma vez que a área total sob  $f(x)$  é igual a 1, podemos também calcular  $P(12,5 < X < 12,6) = 1 - P(X > 12,6) = 1 - 0,135 = 0,865$

## 4-3 Funções de Distribuição Acumulada

---

### Definição

A função de distribuição acumulada de uma v.a. contínua é

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du \quad (4-3)$$

para  $-\infty < x < \infty$ .

## 4-3 Funções de Distribuição Acumulada

---

### Exemplo 4-4

Para a operação de perfuração no Exemplo 4-2,  $F(x)$  é dada por

$$F(x) = 0 \quad \text{for } x < 12.5$$

para  $12.5 \leq x$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{12.5}^x 20e^{-20(u-12.5)} du \\ &= 1 - e^{-20(x-12.5)} \end{aligned}$$

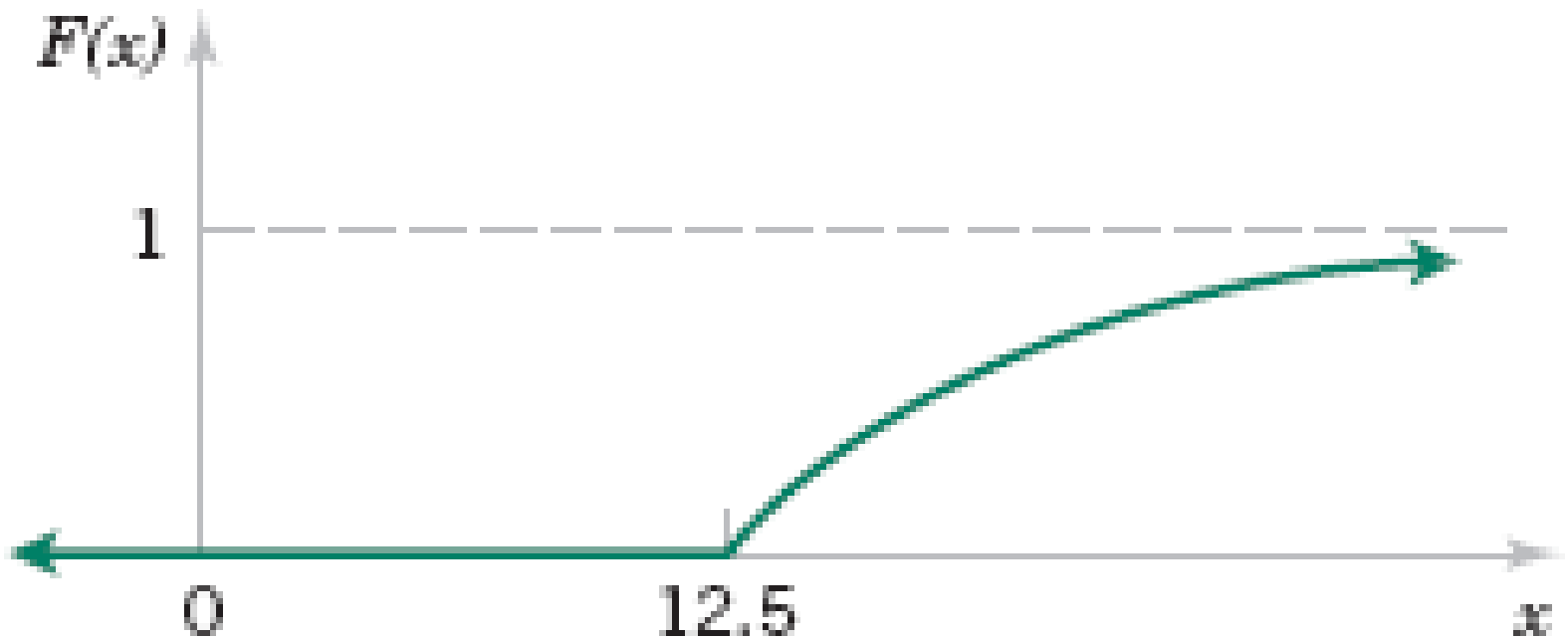
Logo

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 12.5 \\ 1 - e^{-20(x-12.5)} & 12.5 \leq x \end{cases}$$

Figura 4.7 mostra o gráfico da  $F(x)$

# 4-3 Funções de Distribuição Acumulada

---



**Figura 4-7** Função de distribuição acumulada para o Exemplo 4-4.

# 4-4 Média e Variância de uma Variável Aleatória Contínua

---

## Definição

Suponha  $X$  uma v.a. contínua, com uma função de densidade de probabilidade  $f(x)$ . A média de  $X$  é

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx \quad (4-4)$$

A variância de  $X$  é

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2$$

O desvio padrão é  $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ .

# 4-4 Média e Variância de uma Variável Aleatória Contínua

---

Valor esperado de uma função de uma variável aleatória contínua  $X$ .


$$E[h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x) dx \quad (4-5)$$

# 4-4 Média e Variância de uma Variável Aleatória Contínua

---

## Exemplo 4-8

Considerando os dados do Exemplo 4-2, a média é

$$E(X) = \int_{12.5}^{\infty} xf(x) dx = \int_{12.5}^{\infty} x 20e^{-20(x-12.5)} dx$$

$$E(X) = -xe^{-20(x-12.5)} - \frac{e^{-20(x-12.5)}}{20} \Big|_{12.5}^{\infty} = 12.5 + 0.05 = 12.55$$

A variância é

$$V(X) = \int_{12.5}^{\infty} (x - 12.55)^2 f(x) dx$$

$$V(X)=0,0025$$