

UFPE - CIN - Engenharia da Computação
Matemática Discreta – Prova Final 2017.1 – 11/07/2017

1. (1,5) Seja L_n o n-ésimo número de Lucas, definido recursivamente como: $L_0=2$, $L_1=1$ e para $n \geq 2$: $L_n=L_{n-1} + L_{n-2}$. Use indução matemática para provar que $L_0 + L_1 + \dots + L_n = L_{n+2} - 1$.

2. (1,0) Forneça uma definição recursiva para:

- a) A função $f(n) = 2^n$, onde n é um número natural.
- b) O conjunto $S = \{x \mid x \text{ é um número natural e } x \equiv 1 \pmod{8}\}$.

3. (1,5) Use as identidades entre conjuntos para determinar se a seguinte igualdade é verdadeira:

$$(A - B)' \cap (A) = (A \cup B) - (A \cap B)'$$

4. (1,0) Use o algoritmo de Euclides para calcular um inverso negativo e o menor inverso positivo de 210 módulo 13. Encontre também a menor solução positiva para a congruência $210x \equiv 8 \pmod{13}$.

5. (1,6) Seja o seguinte conjunto parcialmente ordenado:

$$(\{ \{0\}, \{1\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{3,4\}, \{0,1,2\}, \{1,3,4\} \}, \subseteq)$$

- a) Desenhe o diagrama de Hasse desse *poset*.
- b) Encontre os elementos minimais e maximais.
- c) Encontre um reticulado que seja subconjunto desse *poset* e que contenha elementos não comparáveis.
- d) Encontre os limitantes superiores e inferiores de $\{\{1,2\}, \{1,3\}\}$.

6. (1,0) Prove que a seguinte relação no conjunto dos inteiros é uma relação de equivalência e defina quais são as classes de equivalência: $R = \{ (x,y) \mid x \equiv y \pmod{6} \}$

7. (0,4) Seja R a seguinte relação no conjunto dos inteiros: $R = \{ (x,y) \mid x < y \}$.

- a) Qual o fecho reflexivo de R ?
- b) Qual o fecho simétrico de R ?

8. (2,0) Responda e Justifique:

- a) Qual o número cromático dos grafos C_n e $K_{m,n}$?
- b) Quantas arestas o grafo regular de grau 40 com 200 vértices possui?
- c) Quantas arestas tem o grafo $K_{m,n}$ e o grafo complementar a ele?
- d) Toda árvore não trivial é um grafo bipartido?
- e) Quantas folhas possui uma árvore binária cheia com 60 arestas?