

**UFPE - Centro de Informática - Graduação em Engenharia da Computação**  
**Matemática Discreta – IF670 - Prova Final 2014.1 – 19/08/2014**

1. (1,5) Considere a seguinte versão de uma definição recursiva da função *Ackermann* (Esse nome foi dado em homenagem a um matemático alemão, aluno de um famoso e grande matemático chamado David Hilbert. Essa função é utilizada por exemplo, no estudo da complexidade de certos algoritmos).

$$A(0, n) = n + 1 \quad \text{se } n \geq 0$$

$$A(m, 0) = A(m - 1, 1) \quad \text{se } m \geq 1$$

$$A(m, n) = A(m - 1, A(m, n - 1)) \quad \text{se } m \geq 1 \text{ e } n \geq 1$$

- Encontre os valores de  $A(1,1)$  e de  $A(1,2)$ .
- Use indução matemática para provar que para  $n \geq 0$ ,  $A(1,n) = n+2$ .

3. (1,0) Use o algoritmo de Euclides para calcular um inverso negativo e o menor inverso positivo de 210 módulo 13. Encontre também uma solução negativa e a menor solução positiva para a congruência  $210x \equiv 8 \pmod{13}$ .

4. (1,0) Dê um exemplo de uma função  $f: Z \rightarrow Z$  de forma que:

- $f$  seja injetora mas não sobrejetora.
- $f$  seja sobrejetora mas não injetora.

5. (1,5) Use as identidades entre conjuntos para provar que:

- $(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B) = (A \cup B)$ .
- Os conjuntos  $(A - B)$ ,  $(B - A)$  e  $(A \cap B)$  são mutuamente disjuntos.

6. (2,0) Seja o seguinte conjunto parcialmente ordenado:  $(\{2,3,4,6,12,18,24\}, |)$ .

- Desenhe o seu diagrama de Hasse.
- Quais são os elementos minimais? E maximais?
- Encontre uma cadeia desse *poset* que tenha tamanho 3.
- Qual é o conjunto de limitantes inferiores de  $\{4,6,18\}$ ?
- Encontre o ínfimo, caso exista, de  $\{4,6,18\}$ .
- Qual é o conjunto de limitantes superiores de  $\{2,4,6\}$ ?
- Encontre o supremo, caso exista, de  $\{2,4,6\}$ .
- Encontre um reticulado nesse *poset* que contenha no mínimo 4 elementos.

7. (1,0) Seja  $R$  uma relação sobre  $N^* \times N^*$ , onde  $N^*$  é o conjunto dos números naturais positivos, definida como:  $(x,y)R(z,t) \leftrightarrow x+t = y+z$ .

- Mostre que  $R$  é uma relação de equivalência
- Encontre três elementos das seguintes classes de equivalência: **b.1)**  $[(1,1)]$       **b.2)**  $[(3,1)]$

8. (0,5) Como podemos calcular o fecho anti-simétrico de uma relação  $R$  sobre um conjunto  $S$ ?

9. (0,6) Seja  $G_5$  o grafo obtido a partir do  $K_5$  ao se omitir as arestas de um ciclo Hamiltoniano. Determine o número cromático de  $G_5$ . Justifique sua resposta mostrando a coloração em  $G_5$ .

10. (0,9) a) Quantos vértices de  $K_{m,n}$  possuem grau  $m$ ? e grau  $n$ ?

b) Para que valores de  $n$  o grafo  $K_n$  possui um circuito euleriano?

c) Seja  $G$  um grafo simples com  $n$  vértices. Qual é a relação entre a quantidade de arestas de  $G$  e do complemento de  $G$ ?