

UFPE – Cin – Prova Final de Matemática Discreta / Ciência da Computação – 2013.1

1. (1,5) Sejam A e B conjuntos arbitrários em um conjunto universo U . Considere também que $A \otimes B$ é o conjunto que contém todos os elementos que estão na união de A e B , mas não estão em ambos (ou seja, $(A \cup B) - (A \cap B)$).

a) Forneça uma lista em ordem crescente dos seguintes itens:

a.1) $|A|$, $|A \cup B|$, $|A \cap B|$, $|U|$, $|\emptyset|$

a.2) $|A - B|$, $|A \otimes B|$, $|A| + |B|$, $|A \cup B|$, $|\emptyset|$

b) Determine, usando as identidades entre conjuntos, se a seguinte igualdade é verdadeira:

$$A \otimes B = (A - B) \cup (B - A).$$

2. (1,5) Suponha que m é um inteiro positivo. Use indução matemática para provar que se a e b são inteiros com $a \equiv b \pmod{m}$ então $a^k \equiv b^k \pmod{m}$, onde $k \geq 0$.

3. (2,0) Quantos CD's João tem se (i) ao presentear quatro amigos com a mesma quantidade de CD's ainda sobra um CD; (ii) ao distribuir os CD's igualmente para os seus nove irmãos ainda sobram 2 CD's; (iii) ao dividir os CD's igualmente para os seus cinco primos ainda sobram 3 CD's; e (iv) ele possui mais que 200 CD's e menos que 400 CD's? Aplique o teorema chinês do resto para justificar a sua resposta.

4. (2,6) Seja A o conjunto das cadeias binárias, incluindo a cadeia vazia. Sejam R_1 , R_2 e R_3 relações binárias em A , onde $|x|$ significa o tamanho da cadeia x .

$x R_1 y \leftrightarrow |x| - |y|$ é par

$x R_2 y \leftrightarrow |x| - |y|$ é ímpar

$x R_3 y \leftrightarrow |x| \leq |y|$

- Identifique quais das relações são **relações de equivalência**;
- Para as que forem, apresente uma prova e identifique suas **classes de equivalência**;
- Para aquelas que não o são, quais as propriedades que faltam? Justifique.
- Identifique quais das relações são **relações de ordem parcial**. Se a relação R for uma ordem parcial, determine quais são os elementos maximais e minimais, e se (A, R) é um reticulado. Justifique.

5. (2,4) Responda cada um dos itens abaixo justificando a sua resposta. **(respostas sem justificativa ou com justificativa errada não são consideradas)**

a) Qual é a soma dos graus dos vértices de uma árvore com n vértices?

b) Toda árvore não trivial é um grafo bipartido? Por quê?

c) Toda árvore é um grafo planar? Por quê?

d) Que grafos bipartido completo $K_{m,n}$ são árvores, onde m e n são inteiros positivos?

e) Determine o número cromático do grafo obtido a partir de K_5 ao se omitir as arestas de um ciclo Hamiltoniano.

f) Para que valores de m e n o grafo bipartido completo $K_{m,n}$ possui um circuito euleriano? E um caminho euleriano que não é circuito?