

## Parte 1 (Relações e Ordens Parciais)

**1.1 (1,5)** Diga se cada sentença mostrada a seguir é verdadeira ou falsa. Justifique apropriadamente cada resposta. Em todos os casos, considere que  $R$  é uma relação em um conjunto  $A$ .

- a) Se  $R$  for uma relação de equivalência, então para todos os elementos  $a, b, c$  pertencentes a  $A$ , se  $b R c$  e  $c \in [a]$  então  $b \in [a]$
- b) Suponha que  $R$  é simétrica e transitiva. Consequentemente,  $R$  é reflexiva.
- c) O fecho reflexivo do fecho simétrico de uma relação  $R$  é o mesmo que o fecho simétrico do fecho reflexivo de  $R$ .
- d) Se  $R$  é simétrica então  $R^2$  também é simétrica.
- e) Se  $(A, R)$  é um poset que possui o maior e o menor elemento então  $A$  é um conjunto finito.

**1.2 (1,0)** Seja  $S = \{0, 1\}$  e considere a ordem parcial  $R$  definida em  $S \times S \times S$  da seguinte maneira: para todas as 3-uplas  $(a, b, c)$  e  $(d, e, f)$  em  $S \times S \times S$ ,  $(a, b, c) R (d, e, f) \Leftrightarrow a \leq d, b \leq e, e c \leq f$ , onde  $\leq$  denota a relação usual “menor ou igual” no conjunto dos inteiros.

- a) Desenhe o diagrama de Hasse para  $R$ .
- b) O conjunto  $(S \times S \times S, R)$  é um reticulado? Por quê?

**1.3 (1,0)**. Seja  $R$  uma relação sobre  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , onde  $\mathbb{N}$  é o conjunto dos números naturais, definida como:  $(x, y) R (z, w) \Leftrightarrow y = w$ . Mostre que  $R$  é uma relação de equivalência e descreva as classes de equivalências associadas.

## Parte 2 (Grafos e Árvores)

**2.1 (2,0)** Responda e justifique apropriadamente:

- a) Quantos vértices de  $K_{m,n}$  possuem grau  $m$ ? e grau  $n$ ?
- b) Encontre uma fórmula em termos de  $m$  e  $n$  para a quantidade de arestas de  $K_{m,n}$ .
- c) Seja  $G$  um grafo simples com  $n$  vértices. Qual é a relação entre a quantidade de arestas de  $G$  e do complemento de  $G$ ?
- d) O que você pode deduzir sobre a altura de uma árvore binária se ela possui 25 folhas?
- e) Encontre todas as árvores não isomorfas de 4 vértices.

**2.2 (0,5)** Suponha que uma pirâmide financeira  $X$  começou com uma pessoa vendendo um produto para outras 12 pessoas. Cada pessoa que compra o produto ou se compromete a vendê-lo para mais 12 pessoas que nunca compraram o produto antes ou não o vende para mais ninguém. Suponha que ninguém compra mais do que um produto da pirâmide  $X$  e que 100 pessoas, além da pessoa que começou o “negócio”, conseguiram vender o produto antes que a pirâmide acabasse. Quantas pessoas fizeram parte dessa pirâmide? E quantas ficaram no prejuízo? (ou seja, não venderam o produto para mais ninguém) Justifique a sua resposta através da aplicação dos teoremas estudados sobre árvores.

**2.3 (1,0)** Para cada item a seguir, dê exemplos de dois grafos não isomorfos, simples, conexos, com 5 vértices com as seguintes propriedades:

- a) não possua vértices com grau maior que 2;
- b) o número cromático seja igual a 4;
- c) não seja planar
- d) possua circuito, mas não seja hamiltoniano

## Segunda chamada da Mini-Prova

1. (0,5) Uma relação  $R$  em um conjunto  $A$  é considerada irreflexiva se e somente se  $\forall a \in A, (a,a) \notin R$ . Responda e justifique apropriadamente:
  - a) Se  $R$  é irreflexiva então  $R^2$  também é irreflexiva?
  - b) Em que condições é possível construir o fecho irreflexivo de  $R$ ?
2. (0,5) Suponha que um grafo planar  $G$  possui 8 vértices, cada um com grau 3. A representação planar de  $G$  divide o plano em quantas regiões?.