UFPE – Cin – Matemática Discreta para Engenharia da Computação – IF670
Prova 1 – 02/05/2017

1. (2,4) Sejam A, B e C, conjuntos arbitrários. Determine se as seguintes sentenças são verdadeiras ou falsas. Justifique apresentando uma prova ou um contra-exemplo.

a) O conjunto $\mathrm{N}\times\mathrm{N}$, onde N é o conjunto os números naturais, é enumerável.

b) $\wp(A\times B) = \wp(A) \times \wp(B)$. Onde $\wp(S)$ signitica o conjunto das partes de S.

c) $B - (A \cap C) = B - (A \cap B \cap C)$. Use as identidades entre conjuntos para justificar a sua resposta.

d) Considerando que $A \subseteq B$ então $A \cap (U - B) = \varnothing$.

e) Se $\{2\} \in A$ e $\{3\} \in A$ então $\{2,3\} \subseteq A$.

f) Sejam as funções, *f, g* e *h*= $g \circ f$, onde *f:* $A \to B$, *g*:$B \to C$, *h*: $A\to C$ e a função *g* é bijetora. Logo, se a função *f* é injetora então a função *h* é bijetora.

2. (0,4) Qual é o conjunto S, definido recursivamente como a seguir?

- $3 \in S$
- Se x e $y \in S$ então $(x + y) \in S$ e $(x- y) \in S$

3. (1,2) Seja F_n um número de Fibonacci. Use indução matemática e a identidade de Pascal para provar a seguinte equação:

$$F_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots, \text{ para } n \in \mathrm{N}, \text{ onde } \mathrm{N} \text{ é o conjunto os números naturais.}$$

4. (2,0) Responda e justifique apropriadamente:

a) Sabendo que MDC(*m*, *n*) = 1 e que m e n possuem, respectivamente, 8 e 12 divisores positivos, quantos divisores possui o número *m.n*?
b) Use o algoritmo de Euclides para encontrar inteiros *m* e *n*, de forma que MDC(72,164) = 72*m* + 164*n*
c) Sejam *a* e *n* dois números inteiros. Prove que $(n - a)^2 \equiv a^2 \pmod{n}$.
d) Use o pequeno teorema de Fermat para encontrar o 3^{900} mod 29, sabendo que 29 é um número primo.

5. (1,0) Aplique o teorema chinês do resto para responder essa questão. Um bando de 19 piratas roubam uma sacola com moedas de ouro. Quando eles tentaram dividir a fortuna em partes iguais, sobraram 3 moedas. Na discussão sobre quem ficava com as três moedas que sobraram, um pirata foi morto. A seguir, na divisão das moedas em partes iguais entre os sobreviventes, sobraram 10 moedas. Novamente, surgiu uma disputa pela posse das dez moedas que sobraram e um pirata foi morto. Agora, o total das moedas foi distribuído, igualmente, entre os sobreviventes sem sobrar qualquer moeda. Qual é o menor número de moedas que a sacola poderia conter?

Extra: 2ª chamada de uma MP ou para substituir uma menor nota

Seja n um inteiro positivo. Mostre por argumento combinatório que

$$\binom{2n}{n+1} + \binom{2n}{n} = \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{n+1}$$

(*você também pode usar alguma(s) das identidades estudadas no assunto de contagem*)