Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)
Centro de Informática (CIn) - Graduação em Ciência da Computação

Matemática Discreta

2º Semestre de 2015 - 1ª Prova - 23 de Outubro de 2015

1. (0,8) Prove ou refute usando as identidades entre conjuntos e identificando o uso das leis associativa e distributiva:

$$(A \cup (B \cap C)) \cap ((\overline{A} \cup (B \cap C)) \cap (B \cap \overline{C})) = \emptyset$$

2. (1,2) Responda e justifique:

a) Dê uma definição recursiva para a seguinte sequência: $a,\ b,\ a+b,\ a+2b,\ 2a+3b,\ 3a+5b\ldots$.

b) Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(n) = \lfloor n \rfloor$ e a função $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definida como $g(n) = n^2$. Compute $g \circ f(-4,7)$.

c) O conjunto das cadeias de bits de tamanho infinito é enumerável? Prove ou refute.

3. (1,0) Use indução matemática para provar que $f_n \leq 2^n$, onde $n \geq 1$ e f_n é o e-nésimo número de Fibonacci .

4. (0,5) Use o teorema binomial para encontrar o coeficiente de a^7b^6 na expansão de $(a+b)^{13}$;
5. (1,0) Prove a seguinte identidade usando argumento combinatório:

$$\binom{n}{2} = \binom{k}{2} + k.(n-k) + \binom{n-k}{2}$$

6. (0,5) Use o princípio da casa dos pombos na justificativa das seguintes perguntas: **a)** Quantas cartas precisam ser tiradas de um baralho convencional de 52 cartas para garantir que tiraremos duas cartas do mesmo naipe? **b)** E quantas cartas precisamos tirar para garantir que duas possuem valores iguais, independentemente do naipe?

7. (1,2) Responda e justifique:

a) Use o algoritmo de Euclides para calcular o menor inverso positivo de 210 módulo 13 ;

b) Use o pequeno teorema de Fermat para calcular $2^{2015}\ mod\ 11$.

c) Expresse os primos p menores que 28 como um par $(p\ mod\ 4,\ p\ mod\ 7)$.

8. (0,8) Sejam p e q primos distintos e $n = p.q$. Temos que $x^2 \equiv a\ (mod\ p)$ e $x^2 \equiv a\ (mod\ q)$. Use o teorema chinês do resto para mostrar que $x^2 \equiv a\ (mod\ n)$

Para quem não fez uma MP ou deseja substituir a nota de uma MP (2,0): Use prova por contradição e o teorema fundamental da aritmética para demonstrar que $\sqrt[k]{p}$ é irracional, onde p é um número primo e k é um número par maior que zero.