Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)
Centro de Informática (CIn) - Graduação em Engenharia da Computação

Matemática Discreta

1º Semestre de 2015 - 1ª Prova - 26 de Maio de 2015

1. (1,0) Use as identidades entre conjuntos, indicando as leis associativas e distributivas, para provar ou refutar a seguinte igualdade: $((A \cap B) - (B \cap C)) - \overline{(A \cap C)} = \emptyset$

2. (1,0) Responda e justifique apropriadamente:

a) O conjunto das cadeias de bits de tamanho infinito é enumerável?

b) Dê uma definição recursiva para o conjunto dos inteiros não negativos i tal que $i \equiv -14\ (mod\ 7)$.

c) Se f é uma função injetora de A em B e g é uma função de A em $f(A)$, de forma que $g(x) = f(x)$ então podemos afirmar que g é bijetora?

d) $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor$ é sempre igual a zero ? Se não diga em que condições o resultado é zero e quais seriam os outros resultados e em que situação.

3. (1,0) Use indução matemática para provar que $1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2 = \binom{2n+1}{3}$

4. (2,0) Responda conforme pedido:

a) Aplique o teorema binomial para encontrar o coeficiente de x^5 na expansão de $(1+4x)^9$.

b) Use o princípio da Casa dos Pombos para provar que entre 5 pontos num plano, cujas coordenadas são números inteiros, existem dois pares de pontos cujo ponto intermediário também possui coordenadas inteiras. *(O ponto intermediário entres os pontos (a,b) e (c,d) é o ponto $(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2})$).*

c) Aplique o algoritmo de Euclides para provar que os números $2k+1$ e $9k+4$ são primos entre si, onde $k \geq 0$.

d) Use o pequeno teorema de Fermat para provar que $23 \mid a^{154} - 1$, sendo $mdc(a, 23) = 1$ e a um inteiro positivo.

5. (1,0) Use o teorema fundamental da artimética na prova de que $\sqrt[3]{5}$ é irracional.

6. (1,0) Suponha que ao usar o teorema chinês do resto para realizar computação em paralelo definimos os pares $(z\ mod\ 25,\ z\ mod\ 6)$ para representar inteiros entre 0 e 149. Nesssa representação, x corresponde ao par $(10,5)$ e y corresponde ao par $(21,4)$. Que pares correspondem a $x+y$ e a $x.y$? Qual o valor de x? (Use o T.C.R., conforme estudamos, para calcular o valor de x).

Para quem não fez uma MP:

1. **(1,0)** Prove a seguinte identidade usando argumento combinatório:

$$\binom{3n}{2} = \binom{2n}{2} + \binom{n}{2} + 2n^2$$

2. **(1,0)** Use indução matemática para provar que $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$. Onde F_n é um número de Fibonacci