Matemática Discreta
Para Computação

Aula de Monitoria - Miniprova 1

2013.1

Roteiro

- Provas e Proposições
- Conjuntos

Provas e Proposições

Proposição - Sentença que ou é verdadeira ou é falsa.
ex: Hoje é sábado. -> É uma proposição.
Ta chovendo? -> Não é proposição, não pode ser julgada como V ou F.

Teorema - Proposição que foi provada como verdade.
ex: Teorema de Pitágoras

Axiomas - Proposição que se assume como verdadeira, sem precisar ser provada.
ex: Dois pontos distintos definem uma reta.

Conjectura - Proposição que ainda não foi nem provada nem refutada.
ex: Conjectura de Goldbach

Predicado - Função que mapeia cada n para uma proposição que depende de n de alguma maneira.
ex: 2 x 0 é par, 2 x 1 é par, 2 x 2 é par ...
Podemos definir o predicado da seguinte forma:
P(n) = 2 x n é par.

Quando vamos provar algo com o Quantificador Universal temos que mostrar que para todos os valores do domínio aquele predicado é verdadeiro.

ex: An $(n^2 + n + 1)$ é primo

Teríamos que mostrar que para qualquer valor de n, n^2+n+1 é primo. Porém para $n = 40$, temos um contra-exemplo, pois obtemos um número composto. Logo a proposição é falsa.

Já quando vamos provar algo com o Quantificador Existencial temos que mostrar que existe um valor que faz com que aquele predicado fique verdadeiro.

ex: En $(n^2 + n + 1)$ é primo

Se pegarmos $n = 2$ teremos $2^2+2+1 = 7$, que é primo. Portanto a proposição é verdadeira.

Provas e Proposições

Equivalências:

P == ¬¬P   P -> Q == ¬P v Q

¬(P ^ Q) == (¬P v ¬Q)   e   ¬(P v Q) == (¬P ^ ¬Q)   (De Morgan)

¬An P(n) == En ¬P(n)   e   ¬En P(n) == An ¬P(n)

Tipos de provas:

- Enumeração - Usa os conectivos lógicos e as regras de inferência.
  a. Eliminação do E e da Implicação
  b. Inclusão do E, do OU, e da Implicação
  c. Lei do terceiro excluído
  d. Principio da contradição (raa)
  e. "Falso conclui qualquer coisa" (ex falso quodlibet)
- Contrapositiva - Queremos provar P -> Q, e provamos ¬Q -> ¬P.
- Prova por casos - Listamos todos os casos possíveis e mostramos que todos são V.
- Contradição - Assume-se o oposto do que quer provar como verdade, e chega num absurdo, logo o que se assumiu tem que ser falso. Fazendo com que a proposição inicial seja verdadeira.
- Direta - P -> Q, assumimos P como verdade e fazendo operações válidas chegamos em Q.

1ª) Se a soma de dois números inteiros é par, então a sua diferença também é par

2ª) A soma de dois números racionais é racional

3ª) Sendo a e b inteiros, se $a^2 = b^2$ então $a = b$. V ou F? Justifique

4ª) Dado qualquer inteiro n: n^2 é par se e somente se n é par

5ª) Prove que $\sqrt{2}$ é irracional

6ª) Existem números irracionais x e y de forma que x^y é racional.

7ª) Dado qualquer natural n, se $n! > (n+1)$ então $n>2$

8ª) Mostre que se n é um número inteiro e n^3+5 é ímpar, então n é par, usando:

a) Uma demonstração por contraposição

b) Uma demonstração por contradição

9ª) Seja as seguintes proposições:

1. Hoje não está ensolarado e está mais frio que ontem.
2. Iremos passear somente se estiver ensolarado.
3. Se não formos passear iremos dormir mais cedo.
4. Se formos dormir mais cedo acordaremos às 6h.

Mostre que acordaremos às 6h.

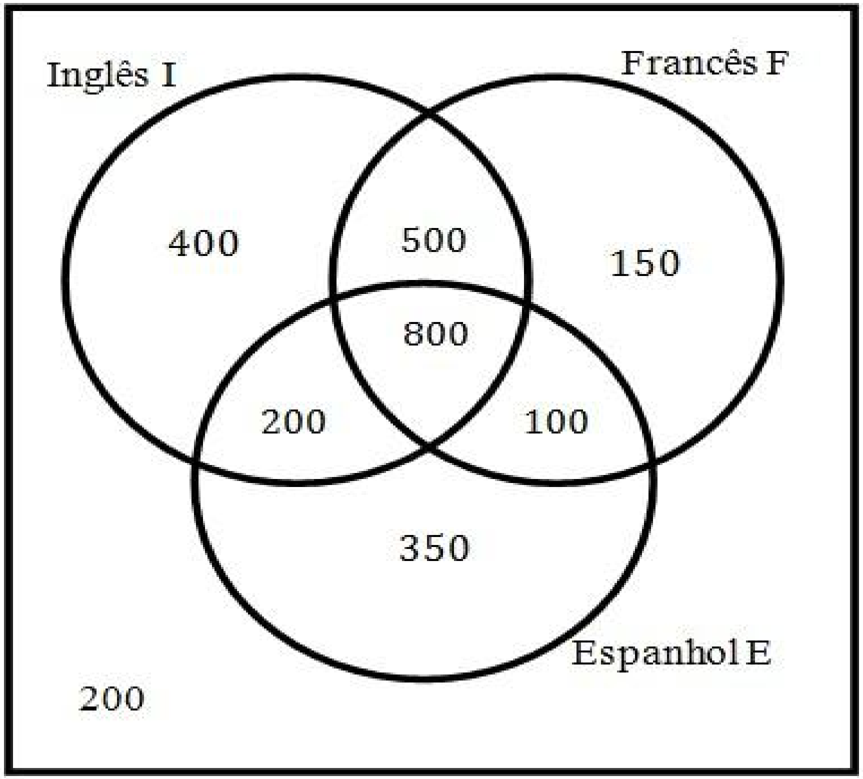
Conjuntos

Existem diversas maneiras de descrevermos conjuntos, como:

- A = {1,2,3,4,5}
- B = {x | x é um número par}
- 5 pertence a C

  x pertence a C $\rightarrow$ x+5 pertence a C

Diagrama de Venn



- Cardinalidade: Seja A um conjunto finito que possui exatamente *n* elementos.Dizemos que *n* é a cardinalidade de A.Notação: $|A| = n$
- Conjunto das partes: Seja S um conjunto.O conjunto das partes de S é o conjunto que contém exatamente todos os subconjuntos de S, e é representado por P(S).
- A cardinalidade de P(S) é 2^n, onde n é o número de elementos de S.

Conjuntos

- Produto Cartesiano: Sejam A e B conjuntos arbitrários, o produto cartesiano de A e B, representado por A x B, é o conjunto dos pares ordenados (a,b) tal que a pertence a A e b pertence a B.
- $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Propriedades entre conjuntos

1) Comutativa: A U B = B U A

e A ∩ B = B ∩ A.

2) Associativa: (A U B) U C = A U (B U C) e

A ∩(B ∩ C) = (A ∩ B) ∩ C

3) Distributiva: A U (B ∩ C) = (A U B) ∩ (A U C)

e A ∩ (B U C) = (A ∩ B) U (A ∩ C)

4) Identidade: A U ∅ = A e A ∩ U = A

5) Dominação: A U U = U e A ∩ ∅ = ∅

6) Complemento: A U A = U, A ∩ A = ∅ e A = A

Propriedades entre conjuntos

7) Idempotência: $A \cup A = A$ e $A \cap A = A$

8) Leis de De Morgan: $(A \cup B)' = A' \cap B'$ e

$(A \cap B)' = A' \cup B'$

-

A diferença simétrica de dois conjuntos A e B, denotada por $A \otimes B$, é o conjunto que contém os elementos que pertencem a exatamente um deles.Determine, usando as identidades entre conjuntos, se a seguinte igualdade é verdadeira: $A \otimes B = (A - B) \cup (B - A)$

9ª) Use as identidades entre conjuntos para determinar se a seguinte igualdade é verdadeira:

$(A \cup (B - A)) \cap (A \cup B') = A$

12ª) Sejam **A** e **B** conjuntos arbitrários. Prove que:

$$P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$$

Dúvidas

?

Questões do sucesso

1) Prove por contradição que não existe um número racional r tal que $r^3 + r + 1 = 0$

2) Mostre que essas proposições são equivalentes:

1. N é par.
2. N-1 é ímpar.
3. N^2 é par.

3) Mostre que $\sqrt{p}$ é irracional se p for primo.

Questões do sucesso

Determine se a diferença simétrica entre conjuntos é associativa ou não, conforme segue: $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$

Sejam A, B e C conjuntos arbitrários. Se $A \otimes C = B \otimes C$, então podemos concluir que $A = B$?