Universidade Federal de Pernambuco

Centro de Informática
Computação Gráfica – 2009.1
Lista de Exercícios – Parte 1

1. Considere pontos não colineares **a**, **b** e **c**; mostre que as coordenadas baricêntricas de um ponto **p** com respeito a esses três pontos, da forma $\mathbf{p}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}$ tal que $\alpha+\beta+\gamma=1$, são tais que $\alpha=\frac{\mathbf{área}(\mathbf{p},\mathbf{b},\mathbf{c})}{\mathbf{área}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}$, $\beta=\frac{\mathbf{área}(\mathbf{a},\mathbf{p},\mathbf{c})}{\mathbf{área}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}$ e $\gamma=\frac{\mathbf{área}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{p})}{\mathbf{área}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}$, onde **área**($\mathbf{p}_1$,$\mathbf{p}_2$,$\mathbf{p}_3$) é a área do triângulo de vértices $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, e $\mathbf{p}_3$.

2. Mostre que só existe uma única forma de se escrever um ponto qualquer do plano $\pi=\{(x,y,z)\in IE^3/6\mathrm{x}+2\mathrm{y}+3\mathrm{z}=6\}$ como combinação baricêntrica dos seguintes três pontos:(1, 0, 0), (0, 3, 0) e (0, 0, 2).

3. Considere o triângulo determinado pelos três pontos da questão anterior. Verifique (utilizando para isso um argumento baseado em coordenadas baricêntricas) se a reta que passa pelos pontos (−1,−1,−1) e (1/6 , 1, 1) intersecta o triângulo em seu interior.

4. Considere o triângulo formado pelos pontos: **a**=(0, 1), **b**=(2, 2) e **c**=(1, 0). Encontre (simplificando) a equação em coordenadas baricêntricas da circunferência centrada na origem de raio 1.

5. Considere um triângulo retângulo isósceles de IE^2, cujos vértices são **a**, **b** e **c**, e com o ângulo reto no ponto **c**. Sabendo que o tamanho de um cateto é 1, encontre a equação em coordenadas baricêntricas, da circunferência circunscrita ao triângulo.

6. Encontre a expressão matricial do operador afim do IR^3 que faz uma rotação anti-horária de 60º em torno da reta perpendicular ao plano $\pi=\{(x,y,z)\in IE^3/x+y+z=1\}$ e que passa no ponto (1,1,1), seguida de uma reflexão ortogonal em relação a π .

7. Explique por que a imagem de um paralelogramo por um operador afim não pode ser um losango, em geral.

8. Encontre a matriz em coordenadas homogêneas da projeção de um ponto qualquer de IE^3 sobre a reta dada parametricamente por: $r(t)=(x_0+at, y_0+bt, z_0+ct)$ com $t\in IR$, $(x_0, y_0, z_0)\in IE^3$ e $(a,b,c)\in IR^3$.

9. Considere um quadrado de vértices a=(0,0), b=(1,0), c=(1,1) e d=(0,1). Defina o operador afim R_p a rotação horária de 45º em torno do ponto p, e $\overline{R_p}$ rotação anti-horária de 45º em torno do ponto p. Defina o operador afim: $T_{p,q}(x,y)=\overline{R}_{R_q(p)}\circ R_q(x,y)$. Encontre a descrição mais simples de $T^{(k)}_{p,q}(x,y)$, dada por: $T^{(k)}_{p,q}(x,y)=T_{T^{(k-1)}_{a,b}(a),T^{(k-1)}_{a,b}(b)}\circ T^{(k-1)}_{a,b}(x,y)$.

10. Sejam $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, **…**, $\mathbf{p}_k$ pontos de $\boldsymbol{IE}^2$ e $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, **…**, $\mathbf{v}_k$ vetores de $\boldsymbol{IR}^2$. e **s** é um sistema de coordenadas de $\boldsymbol{IE}^2$. Utilizando a notação introduzida em classe, mostre que:

(a) $\left[\sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{k}}\alpha_{\mathrm{i}}\,\mathbf{p}_{\mathrm{i}}\right]_{\mathbf{s}}=\sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{k}}\alpha_{\mathrm{i}}\left[\mathbf{p}_{\mathrm{i}}\right]_{\mathbf{s}}$ nos casos em que $\sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{k}}\alpha_{\mathrm{i}}=1$ e $\sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{k}}\alpha_{\mathrm{i}}=0$.

(b) $\mathbf{A}\left[\sum_{i=1}^{k}\alpha_i \mathbf{v}_i\right]_s = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i \mathbf{A}[\mathbf{v}_i]_s$

11. Considere uma câmera virtual onde $\boldsymbol{V}=[1\ 1\ 1]^t$, $\boldsymbol{N}=[1\ -1\ 1]^t$ e $\boldsymbol{C}=[1\ 2\ 1]^t$. Descreva na notação vista em classe, a mudança de coordenadas do sistema mundial para o sistema de vista (este um sistema com base induzida ortonormal), de forma a evitar uma translação no final da mudança.

12. Encontre a razão cruzada das retas projetivas arbitrárias: $\overline{\mathbf{A}}$, $\overline{\mathbf{A}+\mathbf{B}}$, $\overline{\mathbf{B}}$ e $\overline{\mathbf{A}-\mathbf{B}}$.

13. Considere os pontos projetivos: $\overline{\mathbf{a}}\equiv\overline{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}}$, $\overline{\mathbf{b}}\equiv\overline{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}$, $\overline{\mathbf{c}}\equiv\overline{\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}}$ pertencentes à reta $\overline{L}$ e $\overline{\mathbf{a}'}\equiv\overline{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}}$, $\overline{\mathbf{b}'}\equiv\overline{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}}$, $\overline{\mathbf{c}'}\equiv\overline{\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}}$ pertencentes à reta $\overline{M}$. Encontre a expressão em coordenadas cartesianas da perspectividade $\Phi_1 : IRIP^2 \to IRIP^2$ tal que $\Phi_1(\overline{\mathbf{a}})=\overline{\mathbf{a}'}$ e $\Phi_1(\overline{\mathbf{b}})=\overline{\mathbf{b}'}$. Encontre também a expressão em coordenadas cartesianas da projetividade $\Phi_2 : IRIP^2 \to IRIP^2$ tal que $\Phi_2(\overline{\mathbf{a}})=\overline{\mathbf{a}'}$ e $\Phi_2(\overline{\mathbf{b}})=\overline{\mathbf{b}'}$ e $\Phi_2(\overline{\mathbf{c}})=\overline{\mathbf{c}'}$. Compare as duas e infira o por quê da projetividade ser mais geral que a perspectividade, tendo como base na sua argumentação o fato de que, para se determinar uma transformação linear do plano no plano basta se conhecer dois vetores de uma base e suas duas imagens.

14. Dadas as retas $\overline{\mathbf{L}_1}\equiv\overline{[1\ \ 1\ \ 1]}$, $\overline{\mathbf{L}_2}\equiv\overline{[1\ \ -1\ \ -1]}$, $\overline{\mathbf{L}_3}\equiv\overline{[0\ \ 1\ \ 1]}$ concorrentes no ponto $\overline{\mathbf{P}}$, e as retas $\overline{\mathbf{M}_1}\equiv\overline{[2\ \ 1\ \ 2]}$, $\overline{\mathbf{M}_2}\equiv\overline{[1\ \ 2\ \ -1]}$, $\overline{\mathbf{M}_3}\equiv\overline{[1\ \ -1\ \ 3]}$ concorrentes no ponto $\overline{\mathbf{Q}}$. Encontre o ponto de Pappus para estes dois feixes de retas, utilizando a ordem induzida pelos índices. Faça uma representação do Teorema de Pappus dual no plano afim, bem como do Teorema de Pappus aplicado aos duais dos elementos dados.

15. Considere os pontos projetivos: $\overline{\mathbf{a}}\equiv\overline{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}}$, $\overline{\mathbf{b}}\equiv\overline{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}}$, $\overline{\mathbf{c}}\equiv\overline{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}}$ e $\overline{\mathbf{d}}\equiv\overline{\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}}$. e $\overline{\mathbf{a}'}\equiv\overline{\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}}$, $\overline{\mathbf{b}'}\equiv\overline{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}}$, $\overline{\mathbf{c}'}\equiv\overline{\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}}$ e $\overline{\mathbf{d}'}\equiv\overline{\begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix}}$. (A)Encontre a expressão da colineação $\Phi : IRIP^2 \to IRIP^2$ em coordenadas cartesianas tal que $\Phi(\overline{\mathbf{a}})=\overline{\mathbf{a}'}$, $\Phi(\overline{\mathbf{b}})=\overline{\mathbf{b}'}$, $\Phi(\overline{\mathbf{c}})=\overline{\mathbf{c}'}$ e $\Phi(\overline{\mathbf{d}})=\overline{\mathbf{d}'}$. (B) Encontre a projetividade induzida por Φ sobre a reta $\overline{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}$, com pontos $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{d}}_c$ e $\overline{\mathbf{b}}$ sendo levados aos pontos $\overline{\mathbf{a}'}$, $\overline{\mathbf{d}'_c}$ e $\overline{\mathbf{b}'}$, respectivamente, da reta $\overline{\mathbf{a}'\times\mathbf{b}'}$.

16. Dados dois pontos $\overline{\mathbf{a}}\equiv\overline{\begin{bmatrix}\mathbf{x_a}\\\mathbf{y_a}\\\mathbf{z_a}\end{bmatrix}}$ e $\overline{\mathbf{b}}\equiv\overline{\begin{bmatrix}\mathbf{x_b}\\\mathbf{y_b}\\\mathbf{z_b}\end{bmatrix}}$, considere a parametrização $\overline{\mathbf{r}(\mathbf{t})}\equiv\overline{\mathbf{a}+\mathbf{tb}}$ no modelo circular (baseado em z=0). Quais são as condições em t e as coordenadas de **a** e **b** para o ponto no infinito (antípodas)?

17. Considere no modelo afim a parábola dada parametricamente por $(x=t,\ y=t^2,\ z=1),\ t\in IR$, e a hipérbole com os dois segmentos dados por: $(x=s,\ y=\sqrt{1+s^2},\ z=1),\ s\in IR$ e

$(x=s\,,\ y=-\sqrt{1+s^2}\,,\ z=1)\,,\ s\in IR$. Use argumentos de limite ($\lim_{t\to\infty} f(t)$) para fazer um desenho dessas curvas no modelo circular, e descreva as cônicas no espaço projetivo a partir dessas considerações.