Matemática Discreta

Provas Anteriores

1 Lógica e Prova

1.1 Introdução a Lógica e Tabela Verdade

1. $\{0,25\ pt\}$ Dê um exemplo de uma sentença que é uma proposição e justifique porque ela é uma proposição.
   Resposta: "João gosta de futebol" é uma proposição porque pode ser verdadeiro ou falso, mas não ambos.

2. $\{0,25\ pt\}$ Dê um exemplo de uma sentença que não é uma proposição e justifique porque ela não é uma proposição.
   Resposta: "Faça todos as questões da prova" não é uma proposição porque não é nem verdadeiro nem falso.

3. $\{0,5\ pt\}$ Faça a tabela verdade de $(p \to \neg q) \to (q \vee \neg p)$.
   Resposta:

p	q	$\neg q$	$(p \to \neg q)$	$\neg p$	$(q \vee \neg p)$	$(p \to \neg q) \to (q \vee \neg p)$
F	F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T
T	F	T	T	F	F	F
T	T	F	F	F	T	T

4. $\{0,4\ pt\}$ Prove **por tabela verdade** que $\neg((q \wedge (q \vee p)) \vee \neg q) \equiv \mathsf{F}$.
   Resposta:

p	q	$q \vee p$	$q \wedge (q \vee p)$	$\neg q$	$(q \wedge (q \vee p)) \vee \neg q$	$\neg((q \wedge (q \vee p)) \vee \neg q)$
F	F	F	F	T	T	F
F	T	T	T	F	T	F
T	F	T	F	T	T	F
T	T	T	T	F	T	F

5. $\{0,7\ pt\}$ Prove por tabela verdade que $((p \to q) \wedge (p \to r)) \equiv (p \to (q \wedge r))$.
   Resposta:
   Seja LE (lado esquerdo) $= (p \to q) \wedge (p \to r)$ e

LD (lado direito) = $p \to (q \wedge r)$.

p	q	r	$p \to q$	$p \to r$	LE	$q \wedge r$	LD	$LE \leftrightarrow LD$
F	F	F	T	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	T	T	F	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	F	F	T
T	T	F	T	F	F	F	F	T
T	T	T	T	T	T	T	T	T

Resposta 1: Como a 9a coluna é uma tautologia, $((p \to q) \wedge (p \to r)) \equiv (p \to (q \wedge r))$.
Resposta 2: Como a coluna LD e LE têm os mesmos valores a cada linha, $((p \to q) \wedge (p \to r)) \equiv (p \to (q \wedge r))$.

6. $\{0,7\ pt\}$ Prove por tabela verdade que $((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \equiv \neg(p \to \neg(q \vee r))$.
Resposta:

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (q \vee r)$	$q \vee r$	$\neg(q \vee r)$	$p \to \neg(q \vee r)$	$\neg(p \to \neg(q \vee r))$
F	F	F	F	F	F	F	T	T	F
F	F	T	F	F	F	T	F	T	F
F	T	F	F	F	F	T	F	T	F
F	T	T	F	F	F	T	F	T	F
T	F	F	F	F	F	F	T	T	F
T	F	T	F	T	T	T	F	F	T
T	T	F	T	F	T	T	F	F	T
T	T	T	T	T	T	T	F	F	T

Como as colunas 6 e 10 têm o mesmo comportamento linha a linha, as expressões $((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ e $\neg(p \to \neg(q \vee r))$ são logicamente equivalentes.

7. $\{0,7\ pt\}$ Prove por tabela verdade que $((p \to r) \vee (q \to r)) \equiv ((p \wedge q) \to r)$.
Resposta:

p	q	r	$p \to r$	$q \to r$	$(p \to r) \vee (q \to r)$	$(p \wedge q)$	$(p \wedge q) \to r$
F	F	F	T	T	T	F	T
F	F	T	T	T	T	F	T
F	T	F	T	F	T	F	T
F	T	T	T	T	T	F	T
T	F	F	F	T	T	F	T
T	F	T	T	T	T	F	T
T	T	F	F	F	F	T	F
T	T	T	T	T	T	T	T

Como as colunas 6 e 8 têm o mesmo comportamento linha a linha, as expressões $((p \to r) \vee (q \to r))$ e $((p \wedge q) \to r)$ são logicamente equivalentes.

8. $\{0,7\ pt\}$ Prove por tabela verdade que
$(\ (\ p \to ((q \vee \neg\neg\neg q) \wedge q)\ )\ \wedge\ (\neg p \to q)\ \ )\ \equiv\ q.$

Resposta: Sejam

$$A = q \vee \neg\neg\neg q$$
$$B = (q \vee \neg\neg\neg q) \wedge q$$
$$C = p \rightarrow ((q \vee \neg\neg\neg q) \wedge q)$$
$$D = \neg p$$
$$E = \neg p \rightarrow q$$
$$F = (\ p \rightarrow ((q \vee \neg\neg\neg q) \wedge q)\ )\ \wedge\ (\neg p \rightarrow q)$$

p	q	$\neg q$	$\neg\neg q$	$\neg\neg\neg q$	A	B	C	D	E	F
F	F	T	F	T	T	F	T	T	F	F
F	T	F	T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	F	F	F	T	F
T	T	F	T	F	T	T	T	F	T	T

Como as colunas 2 e 11 têm o mesmo comportamento linha a linha, as expressões são logicamente equivalentes.

9. $\{0,7\ pt\}$ Prove por tabela verdade que

$$(\ ((s \wedge s) \vee \neg q)\ \wedge\ (((\neg q \rightarrow \neg q) \wedge \neg q) \vee s)\ )\ \equiv\ (q \rightarrow s)$$

Resposta:

q	s	$s \wedge s$	$\neg q$	$(s \wedge s)$ $\vee \neg q$	$\neg q \rightarrow \neg q$	$(\neg q \rightarrow \neg q)$ $\wedge \neg q$	$((\neg q \rightarrow \neg q)$ $\wedge \neg q) \vee s$	$((s \wedge s) \vee \neg q) \wedge$ $(((\neg q \rightarrow \neg q) \wedge \neg q) \vee s)$	$q \rightarrow s$
F	F	F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T	F	F	F	F
T	T	T	F	T	T	F	T	T	T

Como as colunas 9 e 10 têm o mesmo comportamento linha a linha, as expressões são logicamente equivalentes.

10. $\{0,3\ pt\}$ Traduza para uma fórmula da lógica proposicional: Se chove e molha, então ou vou à praia ou não molha (mas não ambos).
Resposta:
$p =$ chove
$q =$ molha
$r =$ vou à praia
Tradução: $p \wedge q \rightarrow r \oplus \neg q$

11. $\{0,5\ pt\}$ Faça a tabela verdade da sua tradução do Quesito 10.
Resposta:

p	q	r	$p \wedge q$	$\neg q$	$r \oplus \neg q$	$p \wedge q \rightarrow r \oplus \neg q$
F	F	F	F	T	T	T
F	F	T	F	T	F	T
F	T	F	F	F	F	T
F	T	T	F	F	T	T
T	F	F	F	T	T	T
T	F	T	F	T	F	T
T	T	F	T	F	F	F
T	T	T	T	F	T	T

12. $\{0,2\ pt\}$ Responda “Sim” ou “Não”: a frase do Quesito 10 é uma tautologia?

    Resposta: Não.

13. $\{0,3\ pt\}$ Traduza para uma fórmula da lógica proposicional: Ganhar ou perder (ou ambos) implica em aprender e não perder.
    Resposta:
    p = ganhar
    q = perder
    r = aprender
    Tradução: $p \vee q \to r \wedge \neg q$

14. $\{0,5\ pt\}$ Faça a tabela verdade da sua tradução do Quesito 13.
    Resposta:

p	q	r	$p \vee q$	$\neg q$	$r \wedge \neg q$	$p \vee q \to r \wedge \neg q$
F	F	F	F	T	F	T
F	F	T	F	T	T	T
F	T	F	T	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	T	F	F
T	F	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F
T	T	T	T	F	F	F

15. $\{0,2\ pt\}$ Responda “Sim” ou “Não”: a frase do Quesito 13 é uma contradição?

    Resposta: Não.

16. Traduza cada sentença abaixo em uma fórmula da lógica de predicados. Não precisa definir o domínio. Ele é dado no enunciado: consiste de todas as pessoas do planeta. Para definir suas fórmulas, use as funções proposicionais

$$HUMANA(x) = \text{“}x \text{ é humana”}$$
$$MORTAL(x) = \text{“}x \text{ é mortal”}.$$

    a) $\{0,2\ pt\}$ Para toda pessoa, se ela é humana, então ela é mortal.
    Resposta: $\forall x(HUMANA(x) \to MORTAL(x))$

    b) $\{0,2\ pt\}$ Sócrates é humano.
    Resposta: $HUMANA(Sócrates)$

    c) $\{0,2\ pt\}$ Sócrates é mortal.
    Resposta: $MORTAL(Sócrates)$

    d) $\{0,2\ pt\}$ Não é verdade que existe uma pessoa que seja humana e não seja mortal.
    Resposta: $\neg\exists x(HUMANA(x) \wedge \neg MORTAL(x))$

17. Traduza cada sentença abaixo em uma fórmula da lógica de predicados. Não precisa definir o domínio. Ele é dado no enunciado: consiste de todas as pessoas do planeta. Para definir suas fórmulas, use as funções proposicionais

$FACEBOOK(x) =$ "x está no Facebook"
$INTERNET(x) =$ "x gosta da Internet".

a) $\{0,2\ pt\}$ Não é verdade que existe alguém que, se ela está no Facebook, então ela não gosta da Internet.
Resposta: $\neg\exists x(FACEBOOK(x) \to \neg INTERNET(x))$

b) $\{0,2\ pt\}$ Fulano não está no Facebook.
Resposta: $\neg FACEBOOK(Fulano)$

c) $\{0,2\ pt\}$ Se existe alguém que está no Facebook, então existe alguém que gosta da Internet.
Resposta: $(\exists x(FACEBOOK(x))) \to (\exists y(INTERNET(y))$
Outra resposta possível: $(\exists x(FACEBOOK(x))) \to (\exists x(INTERNET(x))$

d) $\{0,2\ pt\}$ Para toda pessoa, ela está no Facebook e ela gosta da Internet.
Resposta: $\forall x(FACEBOOK(x) \wedge INTERNET(x))$

18. Traduza cada sentença abaixo em uma fórmula da lógica proposicional.

a) $\{0,2\ pt\}$ A Microsoft tem lucro se, e somente se, a Apple tem prejuízo.
Resposta: $p \leftrightarrow q$, onde $p =$ *A Microsoft tem lucro* e $q =$ *A Apple tem prejuizo.*

b) $\{0,3\ pt\}$ (A Microsoft tem lucro e a Apple tem prejuízo) ou (não é verdade que a Microsoft tem lucro e não é verdade que a Apple tem prejuízio) (ou ambos).
Obs. Os parênteses acima servem para tirar a ambiguidade da frase.
Resposta: $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$, onde $p =$ *A Microsoft tem lucro* e $q =$ *A Apple tem prejuizo.*

c) $\{0,5\}$ Faça a tabela verdade do se-e-somente-se das proposições descobertas nas letras a) e b) e responda "Sim" ou "Não" se elas são logicamente equivalentes ou não.
Resposta: Sim.

p	q	$p \wedge q$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p \wedge \neg q)$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$	$p \leftrightarrow q$	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$
F	F	F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	F	F	T
T	F	F	F	T	F	F	F	T
T	T	T	F	F	F	T	T	T

19. Traduza cada sentença abaixo em uma fórmula da lógica proposicional.

a) $\{0,2\ pt\}$ Não é verdade que, (se a Copa for no Brasil, então não haverá mais engarrafamentos).
Obs. Os parênteses acima servem para tirar a ambiguidade da frase.
Resposta: $\neg(p \to \neg q)$, onde $p =$ *A Copa será no Brasil* e $q =$*Haverá engarrafamentos.*

b) $\{0,3\ pt\}$ A Copa será no Brasil e haverá engarrafamentos.

Resposta: $p \wedge q$, onde $p =$ *A Copa será no Brasil* e $q =$*Haverá engarrafamentos.*

c) $\{0,5\}$ Faça a tabela verdade do se-e-somente-se das proposições descobertas nas letras a) e b) e responda "Sim" ou "Não" se elas são logicamente equivalentes ou não.
Resposta: Sim.

p	q	$\neg q$	$p \to \neg q$	$\neg(p \to \neg q)$	$p \wedge q$	$\neg(p \to \neg q) \leftrightarrow (p \wedge q)$
F	F	T	T	F	F	T
F	T	F	T	F	F	T
T	F	T	T	F	F	T
T	T	F	F	T	T	T

20. $\{0,7\ pt\}$ Traduza a frase abaixo para lógica proposicional:

Se eu me eleger e eu for honesto, então não haverá milagres ou eu não sou honesto (mas não ambos).

Obs 1. Deixe claro quais frases suas variáveis p, q, r, s, t, etc. representam.

Obs 2. Existe mais de uma resposta correta. Escolha uma.

Resposta:

$$p = Eu\ me\ elejo$$
$$q = Eu\ sou\ honesto$$
$$r = Haver\acute{a}\ milagres$$

Resposta 1: $(p \wedge q) \to (\neg r \oplus \neg q)$.
Resposta 2: $((p \wedge q) \to \neg r) \oplus \neg q$.

21. $\{0,7\ pt\}$ Traduza a frase abaixo para lógica proposicional:

Se não é verdade que eu sou famoso e não é verdade que eu sou político, então se eu apareço na TV, então eu sou importante.

Obs. Deixe claro quais frases suas variáveis p, q, r, s, t, etc. representam.
Resposta:

$$p = Eu\ sou\ famoso$$
$$q = Eu\ sou\ pol\acute{\imath}tico$$
$$r = Eu\ apareco\ na\ TV$$
$$s = Eu\ sou\ importante$$

$(\neg p \wedge \neg q) \to (r \to s)$.

1.2 Lógica Proposicional e de Predicados - Prova de Equivalências

1. $\{1,0\ pt\}$ Prove, sem usar a tabela verdade, que

$$(p \to \neg q) \wedge (p \to \neg r) \equiv \neg((q \vee r) \wedge p).$$

Justifique cada passo da prova com uma equação em anexo.
Resposta:

$$\begin{array}{ll} (p \to \neg q) \land (p \to \neg r) & \\ \equiv p \to (\neg q \land \neg r) & [27] \\ \equiv \neg p \lor (\neg q \land \neg r) & [22] \\ \equiv \neg p \lor \neg (q \lor r) & [17] \\ \equiv \neg (p \land (q \lor r)) & [16] \\ \equiv \neg ((q \lor r) \land p) & [11] \end{array}$$

2. $\{0,8\ pt\}$ Prove **com equivalências lógicas** que

$$\neg(p \lor (p \land r)) \lor (\neg(q \lor \neg r)) \equiv (p \to \neg q) \land (p \to r).$$

Justifique cada passo de prova com as equações em anexo.
Resposta:

$$\begin{array}{lr} \neg(p \lor (p \land r)) \lor (\neg(q \lor \neg r)) & \\ \equiv (\neg p) \lor (\neg(q \lor \neg r)) & [18] \\ \equiv (\neg p) \lor (\neg q \land \neg\neg r) & [17] \\ \equiv (\neg p) \lor (\neg q \land r) & [9] \\ \equiv p \to (\neg q \land r) & [22] \\ \equiv (p \to \neg q) \land (p \to r) & [27] \end{array}$$

3. $\{2,0\ pt\}$ Prove que

$$((r \lor s) \leftrightarrow q) \ \equiv \ (((\neg r \land \neg s) \lor q) \land (\neg q \lor (r \lor s)))$$

Resposta:

$$\begin{array}{ll} (r \lor s) \leftrightarrow q & \\ \equiv ((r \lor s) \to q) \land (q \to (r \lor s)) & [31] \\ \equiv (\neg(r \lor s) \lor q) \land (q \to (r \lor s)) & [22] \\ \equiv (\neg(r \lor s) \lor q) \land (\neg q \lor (r \lor s)) & [22] \\ \equiv ((\neg r \land \neg s) \lor q) \land (\neg q \lor (r \lor s)) & [17] \end{array}$$

4. $\{2,0\ pt\}$ Prove que

$$((r \lor s) \leftrightarrow q) \ \equiv \ (((\neg r \land \neg s) \lor q) \land (\neg q \lor (r \lor s)))$$

Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12), (13), (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
Resposta:

$$\begin{array}{ll} (r \lor s) \leftrightarrow q & \\ \equiv ((r \lor s) \to q) \land (q \to (r \lor s)) & [31] \\ \equiv (\neg(r \lor s) \lor q) \land (q \to (r \lor s)) & [22] \\ \equiv (\neg(r \lor s) \lor q) \land (\neg q \lor (r \lor s)) & [22] \\ \equiv ((\neg r \land \neg s) \lor q) \land (\neg q \lor (r \lor s)) & [17] \end{array}$$

5. $\{1,3\ pt\}$ Prove que $((q \wedge r) \vee ((\neg p \rightarrow p) \rightarrow p)) \equiv \mathsf{T}$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
Resposta:

$$\begin{array}{lr}
(q \wedge r) \vee ((\neg p \rightarrow p) \rightarrow p) & \\
\equiv (q \wedge r) \vee (\neg(\neg p \rightarrow p) \vee p) & [22] \\
\equiv (q \wedge r) \vee (\neg(\neg\neg p \vee p) \vee p) & [22] \\
\equiv (q \wedge r) \vee (\neg(p \vee p) \vee p) & [9] \\
\equiv (q \wedge r) \vee (\neg p \vee p) & [7] \\
\equiv (q \wedge r) \vee \mathsf{T} & [10,20] \\
\equiv \mathsf{T} & [5]
\end{array}$$

6. $\{1,3\ pt\}$ Prove que $((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \equiv \neg(p \rightarrow \neg(q \vee r))$ utilizando as equações em anexo. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

$$\begin{array}{lr}
(p \wedge q) \vee (p \wedge r) & \\
\equiv p \wedge (q \vee r) & [15] \\
\equiv \neg(\neg p) \wedge (q \vee r) & [9] \\
\equiv \neg(\neg p) \wedge \neg(\neg(q \vee r)) & [9] \\
\equiv \neg((\neg p) \vee (\neg(q \vee r))) & [17] \\
\equiv \neg(p \rightarrow (\neg(q \vee r))) & [22]
\end{array}$$

Outra resposta possível:

$$\begin{array}{lr}
\neg(p \rightarrow \neg(q \vee r)) & \\
\equiv p \wedge (q \vee r) & [25] \\
\equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) & [15]
\end{array}$$

7. $\{4,0\ pt\}$ Prove que $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv (p \leftrightarrow \neg q)$. **Não utilize a equação 34.** Justifique cada passo de prova com uma das equações ou regra de inferência no verso.
Resposta:

$$\begin{array}{lr}
\neg(p \leftrightarrow q) & \\
\equiv \neg((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) & [31] \\
\equiv \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) & [22,22] \\
\equiv \neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p) & [16] \\
\equiv (\neg\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg\neg q \wedge \neg p) & [17,17] \\
\equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) & [9,9] \\
\equiv ((p \wedge \neg q) \vee q) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee \neg p) & [14] \\
\equiv ((p \vee q) \wedge (q \vee \neg q)) \wedge ((\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q)) & [10,14] \\
\equiv ((p \vee q) \wedge \mathsf{T}) \wedge (\mathsf{T} \wedge (\neg p \vee \neg q)) & [10,20] \\
\equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) & [10,3] \\
\equiv (p \vee \neg\neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q) & [9] \\
\equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg\neg q \vee p) & [10,10] \\
\equiv (p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg q \rightarrow p) & [22,22] \\
\equiv p \leftrightarrow \neg q & [31]
\end{array}$$

8. $\{1,3\ pt\}$ Prove que $((p \to r) \vee (q \to r)) \equiv ((p \wedge q) \to r)$ utilizando as equações em anexo. **Não utilize a equação 30.** Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

$$\begin{array}{lr}
(p \to r) \vee (q \to r) & \\
\equiv (\neg p \vee r) \vee (q \to r) & [22] \\
\equiv (\neg p \vee r) \vee (\neg q \vee r) & [22] \\
\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (r \vee r) & [10,12] \\
\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee r & [7] \\
\equiv \neg(p \wedge q) \vee r & [16] \\
\equiv (p \wedge q) \to r & [22]
\end{array}$$

9. $\{1,3\ pt\}$ Prove que $(\ (\ p \to ((q \vee \neg\neg\neg q) \wedge q)\ ) \wedge (\neg p \to q)\ )\ \equiv\ q$ utilizando as equações em anexo. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

$$\begin{array}{lr}
(\ p \to ((q \vee \neg\neg\neg q) \wedge q)\ )\ \wedge\ (\neg p \to q) & \\
\equiv (\ p \to ((q \vee \neg q) \wedge q)\ )\ \wedge\ (\neg p \to q) & [9] \\
\equiv (\ p \to (\mathsf{T} \wedge q)\ )\ \wedge\ (\neg p \to q) & [20] \\
\equiv (p \to q)\ \wedge\ (\neg p \to q) & [10,3] \\
\equiv (p \vee \neg p) \to q & [28] \\
\equiv \mathsf{T} \to q & [20] \\
\equiv \neg \mathsf{T} \vee q & [22] \\
\equiv \mathsf{F} \vee q & [2] \\
\equiv q & [10,4]
\end{array}$$

10. $\{1,0\ pt\}$ Prove utilizando as equações em anexo que:

$$(\ \forall x \neg \exists y(\ (\exists z Q(x,y,z)) \to P(x,y)\ )\ ) \equiv (\ \forall x \forall y(\ \neg(\forall z \neg Q(x,y,z)) \wedge \neg P(x,y)\ )\ )$$

Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

$$\begin{array}{lr}
\forall x \neg \exists y(\ (\exists z Q(x,y,z)) \to P(x,y)\ ) & \\
\equiv \forall x \forall y \neg(\ (\exists z Q(x,y,z)) \to P(x,y)\ ) & [35] \\
\equiv \forall x \forall y(\ (\exists z Q(x,y,z)) \wedge \neg P(x,y)\ ) & [26] \\
\equiv \forall x \forall y(\ \neg\neg(\exists z Q(x,y,z)) \wedge \neg P(x,y)\ ) & [9] \\
\equiv \forall x \forall y(\ \neg(\forall z \neg Q(x,y,z)) \wedge \neg P(x,y)\ ) & [36]
\end{array}$$

11. $\{2,0\ pt\}$ Prove utilizando as equações em anexo que:

$$(\ \ ((p \to q) \wedge (q \to p)) \to (p \to q)\ \ ) \equiv \mathsf{T}$$

Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
Resposta:

$$\begin{array}{ll}
((p \to q) \wedge (q \to p)) \to (p \to q) & \\
= ((p \to q) \to (p \to q)) \vee ((q \to p) \to (p \to q)) & [30] \\
= (\neg(p \to q) \vee (p \to q)) \vee ((q \to p) \to (p \to q)) & [22] \\
= \mathsf{T} \vee ((q \to p) \to (p \to q)) & [10,20] \\
= \mathsf{T} & [10,5]
\end{array}$$

12. $\{1,3\ pt\}$ Prove que

$$(\ ((s \wedge s) \vee \neg q)\ \ \wedge\ \ (((\neg q \to \neg q) \wedge \neg q) \vee s)\ )\ \equiv\ (q \to s)$$

utilizando as equações em anexo. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

$$\begin{array}{ll}
((s \wedge s) \vee \neg q)\ \ \wedge\ \ (((\neg q \to \neg q) \wedge \neg q) \vee s) & \\
\equiv (s \vee \neg q)\ \ \wedge\ \ (((\neg q \to \neg q) \wedge \neg q) \vee s) & [8] \\
\equiv (s \vee \neg q)\ \ \wedge\ \ (((\neg(\neg q) \vee \neg q) \wedge \neg q) \vee s) & [22] \\
\equiv (s \vee \neg q)\ \ \wedge\ \ (((q \vee \neg q) \wedge \neg q) \vee s) & [9] \\
\equiv (s \vee \neg q)\ \ \wedge\ \ ((\mathsf{T} \wedge \neg q) \vee s) & [20] \\
\equiv (s \vee \neg q)\ \ \wedge\ \ (\neg q \vee s) & [11,3] \\
\equiv \neg q \vee s & [10,8] \\
\equiv q \to s & [22]
\end{array}$$

13. $\{1,0\ pt\}$ Prove utilizando as equações em anexo que:

$$(\ \ \forall x \exists y (\neg P(x,y) \wedge \neg Q(x,y))\ \ ) \equiv (\ \ \neg \exists x \forall y (P(x,y) \vee Q(x,y))\ \ )$$

Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
Resposta:

$$\begin{array}{ll}
\forall x \exists y (\neg P(x,y) \wedge \neg Q(x,y)) & \\
\equiv \forall x \exists y \neg (P(x,y) \vee Q(x,y)) & [17] \\
\equiv \forall x \neg \forall y (P(x,y) \vee Q(x,y)) & [36] \\
\equiv \neg \exists x \forall y (P(x,y) \vee Q(x,y)) & [35]
\end{array}$$

14. $\{2,0\ pt\}$ Prove utilizando as equações em anexo que:

$$(\ \neg(\neg p \wedge q) \wedge \neg(\neg q \wedge p)\ ) \equiv (p \leftrightarrow q)$$

Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

$$\begin{array}{ll}
\neg(\neg p \wedge q) \wedge \neg(\neg q \wedge p) & \\
(\neg\neg p \vee \neg q) \wedge \neg(\neg q \wedge p) & [16] \\
(\neg\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg\neg q \vee \neg p) & [16] \\
(p \vee \neg q) \wedge (\neg\neg q \vee \neg p) & [9] \\
(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg p) & [9] \\
(q \rightarrow p) \wedge (q \vee \neg p) & [10,22] \\
(q \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow q) & [10,22] \\
p \leftrightarrow q & [11,31]
\end{array}$$

15. $\{1,0\ pt\}$ Prove que

$$(\ \ ((p \wedge \neg q) \wedge (r \vee \neg(\neg p \vee q))) \rightarrow (p \wedge \neg q)\ \ )\ \ \equiv\ \ \mathsf{T}$$

utilizando as equações em anexo. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

$$\begin{array}{lr}
(p \wedge \neg q) \wedge (r \vee \neg(\neg p \vee q)) \rightarrow (p \wedge \neg q) & \\
\equiv (p \wedge \neg q) \wedge (r \vee (\neg(\neg p) \wedge \neg q))) \rightarrow (p \wedge \neg q) & [17] \\
\equiv (p \wedge \neg q) \wedge (r \vee (p \wedge \neg q)) \rightarrow (p \wedge \neg q) & [9] \\
\equiv (p \wedge \neg q) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee r) \rightarrow (p \wedge \neg q) & [10] \\
\equiv (p \wedge \neg q) \rightarrow (p \wedge \neg q) & [19] \\
\equiv \neg(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) & [22] \\
\equiv \mathsf{T} & [10,20]
\end{array}$$

16. $\{1,0\ pt\}$ Sejam as premissas

$$\begin{array}{l}
\exists z(\neg R(z) \vee \neg S(z)), \\
(\neg\exists x \neg(P(x))) \vee (\forall z(R(z) \wedge S(z)))\ \text{ e} \\
(\forall x(P(x))) \rightarrow (\exists y(Q(y))).
\end{array}$$

Conclua, usando as equações em anexo, que $\exists y(Q(y))$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

1. $\exists z(\neg R(z) \vee \neg S(z))$ [Premissa]
2. $\exists z \neg(R(z) \wedge S(z))$ [16 em 1]
3. $\neg \forall z(R(z) \wedge S(z))$ [36 em 1]
4. $(\neg \exists x \neg(P(x))) \vee (\forall z(R(z) \wedge S(z)))$ [Premissa]
5. $(\neg \exists x \neg(P(x)))$ [40 em 3 e 4]
6. $\forall x \neg\neg(P(x))$ [35 em 5]
7. $\forall x(P(x))$ [9 em 6]
8. $(\forall x(P(x))) \rightarrow (\exists y(Q(y)))$ [Premissa]
9. $\exists y(Q(y))$ [37 em 7 e 8]

17. $\{1,0\ pt\}$ Prove que

$$\begin{aligned}&\forall x \forall z(\ \neg P(x,z) \wedge (\exists k \forall y(Q(x,z,k,y) \wedge \neg R(x,z,k,y)))\ )\\ \equiv\ &\neg \exists x \exists z(\ P(x,z) \vee (\forall k \exists y(\neg Q(x,z,k,y) \vee R(x,z,k,y)))\ )\end{aligned}$$

utilizando as equações em anexo. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

$$\begin{array}{ll}\forall x \forall z(\ \neg P(x,z) \wedge (\exists k \forall y(Q(x,z,k,y) \wedge \neg R(x,z,k,y)))\ ) & \\ \equiv \forall x \forall z(\ \neg P(x,z) \wedge (\exists k \forall y(\neg\neg Q(x,z,k,y) \wedge \neg R(x,z,k,y)))\ ) & [9] \\ \equiv \forall x \forall z(\ \neg P(x,z) \wedge (\exists k \forall y \neg(\neg Q(x,z,k,y) \vee R(x,z,k,y)))\ ) & [17] \\ \equiv \forall x \forall z(\ \neg P(x,z) \wedge (\exists k \neg \exists y(\neg Q(x,z,k,y) \vee R(x,z,k,y)))\ ) & [35] \\ \equiv \forall x \forall z(\ \neg P(x,z) \wedge (\neg \forall k \exists y(\neg Q(x,z,k,y) \vee R(x,z,k,y)))\ ) & [36] \\ \equiv \forall x \forall z \neg(\ P(x,z) \vee (\forall k \exists y(\neg Q(x,z,k,y) \vee R(x,z,k,y)))\ ) & [17] \\ \equiv \forall x \neg \exists z(\ P(x,z) \vee (\forall k \exists y(\neg Q(x,z,k,y) \vee R(x,z,k,y)))\ ) & [35] \\ \equiv \neg \exists x \exists z(\ P(x,z) \vee (\forall k \exists y(\neg Q(x,z,k,y) \vee R(x,z,k,y)))\ ) & [35]\end{array}$$

18. $\{1,0\ pt\}$ Prove que

$$p \wedge ((\neg\neg\neg\neg p \vee p) \vee (r \rightarrow s)) \quad \equiv \quad p$$

utilizando as equações em anexo. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

$$\begin{array}{ll}p \wedge ((\neg\neg\neg\neg p \vee p) \vee (r \rightarrow s)) & \\ \equiv p \wedge ((\neg\neg p \vee p) \vee (r \rightarrow s)) & [9] \\ \equiv p \wedge ((p \vee p) \vee (r \rightarrow s)) & [9] \\ \equiv p \wedge (p \vee (r \rightarrow s)) & [7] \\ \equiv p & [19]\end{array}$$

Lembre-se: $\neg\neg\neg\neg p \vee p$ significa $(\neg\neg\neg\neg p) \vee p$.

19. $\{1,0\ pt\}$ Sejam as premissas

$$(\ \forall x(Q(x) \rightarrow R(x))\ ) \rightarrow (\ \exists y \forall k(S(y,k) \wedge P(y,k))\ ) \ \text{ e}$$
$$\forall y \exists k(\neg S(y,k) \vee \neg P(y,k)).$$

Conclua, usando as equações em anexo, que $\exists x(Q(x) \land \neg R(x))$.

Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

1. $\forall y \exists k(\neg S(y,k) \lor \neg P(y,k))$ [Premissa]
2. $\forall y \exists k \neg(S(y,k) \land P(y,k))$ [16 em 1]
3. $\forall y \neg \forall k(S(y,k) \land P(y,k))$ [36 em 2]
4. $\neg \exists y \forall k(S(y,k) \land P(y,k))$ [35 em 3]
5. $(\ \forall x(Q(x) \to R(x))\ ) \to (\ \exists y \forall k(S(y,k) \land P(y,k))\ )$ [Premissa]
6. $\neg \forall x(Q(x) \to R(x))$ [38 em 4 e 5]
7. $\exists x \neg(Q(x) \to R(x))$ [36 em 6]
8. $\exists x(Q(x) \land \neg R(x))$ [26 em 7]

20. $\{1,0\ pt\}$ Prove que

$$(\ \forall x \exists k(Q(x,k) \lor R(x,k))\ ) \lor (\ \exists z \forall w(\neg R(z,w) \land S(z,w))\ )$$
$$\equiv \neg(\ \ (\ \exists x \forall k \neg(Q(x,k) \lor R(x,k))\ ) \land (\ \forall z \exists w(R(z,w) \lor \neg S(z,w))\ )\ \ )$$

Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

$$\begin{array}{ll}
(\ \forall x \exists k(Q(x,k) \lor R(x,k))\ ) \lor (\ \exists z \forall w(\neg R(z,w) \land S(z,w))\ ) & \\
\equiv (\ \forall x \exists k \neg\neg(Q(x,k) \lor R(x,k))\ ) \lor (\ \exists z \forall w(\neg R(z,w) \land S(z,w))\ ) & [9] \\
\equiv (\ \forall x \neg \forall k \neg(Q(x,k) \lor R(x,k))\ ) \lor (\ \exists z \forall w(\neg R(z,w) \land S(z,w))\ ) & [36] \\
\equiv (\ \neg \exists x \forall k \neg(Q(x,k) \lor R(x,k))\ ) \lor (\ \exists z \forall w(\neg R(z,w) \land S(z,w))\ ) & [35] \\
\equiv (\ \neg \exists x \forall k \neg(Q(x,k) \lor R(x,k))\ ) \lor (\ \exists z \forall w(\neg R(z,w) \land \neg\neg S(z,w))\ ) & [9] \\
\equiv (\ \neg \exists x \forall k \neg(Q(x,k) \lor R(x,k))\ ) \lor (\ \exists z \forall w \neg(R(z,w) \lor \neg S(z,w))\ ) & [17] \\
\equiv (\ \neg \exists x \forall k \neg(Q(x,k) \lor R(x,k))\ ) \lor (\ \exists z \neg \exists w(R(z,w) \lor \neg S(z,w))\ ) & [35] \\
\equiv (\ \neg \exists x \forall k \neg(Q(x,k) \lor R(x,k))\ ) \lor (\ \neg \forall z \exists w(R(z,w) \lor \neg S(z,w))\ ) & [36] \\
\equiv \neg(\ \ (\ \exists x \forall k \neg(Q(x,k) \lor R(x,k))\ ) \land (\ \forall z \exists w(R(z,w) \lor \neg S(z,w))\ )\ \ ) & [36]
\end{array}$$

21. $\{0,5\ pt\}$ Prove que as fórmulas das respostas das letras **a)** e **d)** do Quesito 16 da Seção 1.1 são logicamente equivalentes utilizando as equações em anexo. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

$$\begin{array}{ll}
\neg \exists x(HUMANA(x) \land \neg MORTAL(x)) & \\
\equiv \forall x \neg(HUMANA(x) \land \neg MORTAL(x)) & [35] \\
\equiv \forall x(\neg HUMANA(x) \lor \neg\neg MORTAL(x)) & [16] \\
\equiv \forall x(\neg HUMANA(x) \lor MORTAL(x)) & [9] \\
\equiv \forall x(HUMANA(x) \to MORTAL(x)) & [22]
\end{array}$$

22. $\{0,7\ pt\}$ Prove que

$$\neg(p \wedge (p \vee \neg p)) \vee (\neg(\neg q \vee \neg r)) \;\equiv\; p \rightarrow (q \wedge r)$$

utilizando as equações em anexo. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

$$\begin{array}{lr}
\neg(p \wedge (p \vee \neg p)) \vee (\neg(\neg q \vee \neg r)) & \\
\equiv \neg(p \wedge \mathsf{T}) \vee (\neg(\neg q \vee \neg r)) & [20] \\
\equiv \neg(p) \vee (\neg(\neg q \vee \neg r)) & [3] \\
\equiv \neg(p) \vee (\neg\neg q \wedge \neg\neg r) & [17] \\
\equiv \neg(p) \vee (q \wedge \neg\neg r) & [9] \\
\equiv \neg(p) \vee (q \wedge r) & [9] \\
\equiv p \rightarrow (q \wedge r) & [22]
\end{array}$$

23. $\{0,5\ pt\}$ Prove que as fórmulas das respostas das letras **a)** e **d)** do Quesito 17 da Seção 1.1 são logicamente equivalentes utilizando as equações em anexo. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

$$\begin{array}{lr}
\neg\exists x(FACEBOOK(x) \rightarrow \neg INTERNET(x)) & \\
\equiv \forall x(\neg(FACEBOOK(x) \rightarrow \neg INTERNET(x)) & [35] \\
\equiv \forall x(FACEBOOK(x) \wedge INTERNET(x)) & [25]
\end{array}$$

24. $\{0,7\ pt\}$ Prove que

$$\forall x(P(x) \rightarrow \neg\exists y(\neg Q(x,y) \rightarrow \neg R(x,y))) \;\equiv\; \forall x(\forall y(R(x,y) \wedge \neg Q(x,y)) \vee \neg P(x))$$

utilizando as equações em anexo. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

$$\begin{array}{lr}
\forall x(P(x) \rightarrow \neg\exists y(\neg Q(x,y) \rightarrow \neg R(x,y))) & \\
\equiv \forall x(P(x) \rightarrow \forall y \neg(\neg Q(x,y) \rightarrow \neg R(x,y))) & [35] \\
\equiv \forall x(P(x) \rightarrow \forall y \neg(R(x,y) \rightarrow Q(x,y))) & [23] \\
\equiv \forall x(P(x) \rightarrow \forall y(R(x,y) \wedge \neg Q(x,y))) & [26] \\
\equiv \forall x(\neg P(x) \vee \forall y(R(x,y) \wedge \neg Q(x,y))) & [22] \\
\equiv \forall x(\forall y(R(x,y) \wedge \neg Q(x,y)) \vee \neg P(x)) & [10]
\end{array}$$

25. $\{1,0\ pt\}$ Prove que $(p \leftrightarrow q) \ \equiv ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$ utilizando as equações em anexo, **exceto a equação 33, que não pode ser usada**. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

$$
\begin{array}{lr}
p \leftrightarrow q & \\
\equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) & [31] \\
\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) & [22,22] \\
\equiv ((\neg p \vee q) \wedge \neg q) \vee ((\neg p \vee q) \wedge p) & [15,15] \\
\equiv (\neg q \wedge (\neg p \vee q)) \vee (p \wedge (\neg p \vee q)) & [11,11] \\
\equiv ((\neg q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge q)) \vee ((p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q)) & [15,15] \\
\equiv ((\neg q \wedge \neg p) \vee \mathsf{F}) \vee ((p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q)) & [11,21] \\
\equiv ((\neg q \wedge \neg p) \vee \mathsf{F}) \vee (\mathsf{F} \vee (p \wedge q)) & [21] \\
\equiv ((\neg q \wedge \neg p) \vee (\mathsf{F} \vee (p \wedge q)) & [4] \\
\equiv (\neg q \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) & [10,4] \\
\equiv (p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg p) & [10] \\
\equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) & [11]
\end{array}
$$

26. Seja o domínio as cidades do Brasil. Sejam

$$
\begin{array}{l}
P(x) = \textit{vai ter passeata em } x \\
B(x) = \textit{a passagem de ônibus vai ficar mais barata em } x
\end{array}
$$

a)$\{0,25\}$ Traduza para lógica de predicados usando $P(x)$ e $B(x)$ dados no enunciado: Se existe uma cidade que não vai ter passeata, então não é verdade que, para toda cidade, a passagem de ônibus vai ficar mais barata.

Resposta:

$(\exists x(\neg P(x))) \rightarrow \neg(\forall x(B(x)))$

b)$\{0,25\}$ Traduza para lógica de predicados usando $P(x)$ e $B(x)$ dados no enunciado: (toda cidade vai ter passeata) ou (não é verdade que em toda cidade a passagem de ônibus vai ficar mais barata) (ou ambos).

Obs. Os parênteses da frase servem para tirar a ambiguidade.

Resposta:

$\forall x P(x) \vee \neg \forall x B(x)$

c)$\{0,5\ pt\}$ Prove que os predicados encontrados nas letras **a)** e **b)** acima são logicamente equivalentes utilizando as equações em anexo. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

$$
\begin{array}{lr}
(\exists x(\neg P(x))) \rightarrow \neg(\forall x(B(x))) & \\
\equiv \neg(\exists x(\neg P(x))) \vee \neg(\forall x B(x)) & [22] \\
\equiv \neg\neg(\forall x P(x)) \vee \neg(\forall x B(x)) & [36] \\
\equiv \forall x P(x) \vee \neg \forall x B(x) & [9]
\end{array}
$$

27. $\{1,0\ pt\}$ Prove que $((p \wedge \neg r) \rightarrow (q \rightarrow r)) \equiv ((p \wedge q) \rightarrow r)$ utilizando as equações em anexo. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

$$
\begin{array}{lr}
((p \wedge \neg r) \rightarrow (q \rightarrow r)) & \\
\equiv \neg(p \wedge \neg r) \vee (q \rightarrow r) & [22] \\
\equiv (\neg p \vee \neg\neg r) \vee (q \rightarrow r) & [16] \\
\equiv (\neg p \vee r) \vee (q \rightarrow r) & [9] \\
\equiv (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) & [22] \\
\equiv (p \wedge q) \rightarrow r & [30]
\end{array}
$$

28. Seja o domínio o conjunto dos **jogos** da Copa das Confederações.
Sejam

$$B(x) = \textit{o Brasil ganha o jogo } x$$
$$N(x) = \textit{Neymar faz gol neste jogo } x.$$

a) $\{0,25\ pt\}$ Traduza para lógica de predicados usando $B(x)$ e $N(x)$ dados no enunciado: Não é verdade que, para todos os jogos, se o Brasil ganhar o jogo, então Neymar faz gol neste jogo.
Resposta:
$\neg(\forall x(B(x) \rightarrow N(x)))$

b) $\{0,25\ pt\}$ Traduza para lógica de predicados usando $B(x)$ e $N(x)$ dados no enunciado: Existe um jogo que o Brasil ganha e Neymar não faz gol neste jogo.
Resposta:
$\exists x(B(x) \wedge \neg N(x))$

c) $\{0,5\ pt\}$ Prove que os predicados encontrados nas letras **a)** e **b)** acima são logicamente equivalentes utilizando as equações em anexo. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
Resposta:

$$
\begin{array}{lr}
\neg(\forall x(B(x) \rightarrow N(x))) & \\
\equiv \exists x(\neg(B(x) \rightarrow N(x))) & [36] \\
\equiv \exists x(B(x) \wedge \neg N(x)) & [26]
\end{array}
$$

29. $\{1,3\ pt\}$ Prove que $(((p \wedge q) \wedge p) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)) \equiv (\neg(p \wedge q))$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

$$
\begin{array}{lr}
((p \wedge q) \wedge p) \rightarrow (\neg p \vee \neg q) & \\
((p \wedge p) \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q) & [11,13] \\
(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q) & [8] \\
\neg(p \wedge q) \vee (\neg p \vee \neg q) & [22] \\
\neg(p \wedge q) \vee \neg(p \wedge q) & [16] \\
\neg(p \wedge q) & [7]
\end{array}
$$

$$(\forall x(P(x))) \rightarrow (\exists y(P(y)) \wedge \forall x(P(x))) \equiv \neg(\forall x(P(x))) \vee (\exists y(P(y)))$$

utilizando as equações em anexo. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

$$
\begin{array}{lr}
(\forall x(P(x))) \rightarrow (\exists y(P(y)) \wedge \forall x(P(x))) & \\
\equiv \neg(\forall x(P(x))) \vee (\exists y(P(y)) \wedge \forall x(P(x))) & [22] \\
\equiv (\neg(\forall x(P(x))) \vee (\exists y(P(y)))) \wedge (\neg(\forall x(P(x))) \vee (\forall x(P(x)))) & [14] \\
\equiv (\neg(\forall x(P(x))) \vee (\exists y(P(y)))) \wedge \mathsf{T} & [10,20] \\
\equiv \neg(\forall x(P(x))) \vee (\exists y(P(y))) & [3]
\end{array}
$$

30. $\{1,3\ pt\}$ Prove que $(((p \wedge (\neg\neg\neg p)) \vee p) \rightarrow (\neg(p \vee (\neg\neg p)) \rightarrow \neg p)) \equiv \mathsf{T}$

Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

$$
\begin{array}{lr}
((p \wedge (\neg\neg\neg p)) \vee p) \rightarrow (\neg(p \vee (\neg\neg p)) \rightarrow \neg p) & \\
\equiv ((p \wedge \neg p) \vee p) \rightarrow (\neg(p \vee p) \rightarrow \neg p) & [9,9] \\
\equiv (\mathsf{F} \vee p) \rightarrow (\neg(p \vee p) \rightarrow \neg p) & [21] \\
\equiv p \rightarrow (\neg(p \vee p) \rightarrow \neg p) & [10,4] \\
\equiv p \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg p) & [7] \\
\equiv p \rightarrow (\neg\neg p \vee \neg p) & [22] \\
\equiv p \rightarrow (p \vee \neg p) & [9] \\
\equiv p \rightarrow \mathsf{T} & [20] \\
\equiv \neg p \vee \mathsf{T} & [22] \\
\equiv \mathsf{T} & [5]
\end{array}
$$

31. $\{1,0\ pt\}$] Prove que

$$(\exists x(P(x)) \wedge \neg(\forall x(\neg P(x)))) \rightarrow \exists x(P(x)) \ \equiv\ \mathsf{T}$$

utilizando as equações em anexo. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

$$\begin{array}{ll}
(\exists x(P(x)) \wedge \neg(\forall x(\neg P(x)))) \rightarrow \exists x(P(x)) & \\
\equiv (\exists x(P(x)) \wedge (\exists x \neg(\neg P(x)))) \rightarrow \exists x(P(x)) & [36] \\
\equiv (\exists x(P(x)) \wedge (\exists x(P(x)))) \rightarrow \exists x(P(x)) & [9] \\
\equiv (\exists x(P(x))) \rightarrow \exists x(P(x)) & [8] \\
\equiv \neg(\exists x(P(x))) \vee \exists x(P(x)) & [22] \\
\equiv \mathsf{T} & [10{,}20]
\end{array}$$

32. $\{1,3\ pt\}$ Prove que $((q \rightarrow \neg p) \rightarrow q) \equiv q$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
Resposta:

$$\begin{array}{ll}
(q \rightarrow \neg p) \rightarrow q & \\
\equiv \neg(q \rightarrow \neg p) \vee q & [22] \\
\equiv \neg(\neg q \vee \neg p) \vee q & [22] \\
\equiv (\neg\neg q \wedge \neg\neg p) \vee q & [17] \\
\equiv (q \wedge p) \vee q & [9{,}9] \\
\equiv q \vee (q \wedge p) & [10] \\
\equiv q & [18]
\end{array}$$

33. $\{0,7\ pt\}$ Veja abaixo a prova de que $(\neg(\neg p \vee q)) \equiv (p \wedge \neg q)$.

$$\begin{array}{ll}
\neg(\neg p \vee q) & \\
\equiv \neg\neg p \wedge \neg q & [17] \\
\equiv p \wedge \neg q & [9]
\end{array}$$

Use sua criatividade e invente proposições para p e q e depois escreva a prova deste teorema em português.

Resposta:
$p =$ Eu me elejo
$q =$ Eu sou honesto

Não é verdade que eu não me elejo ou eu sou honesto é logicamente equivalente a não ser verdade que eu não me elejo e a não ser verdade que eu sou honesto (pela equação 17). Não ser verdade que eu não me elejo e não ser verdade que eu sou honesto é logicamente equivalente a eu me eleger e a não ser honesto (pela equação 9).

34. $\{3,3\ pt\}$ Prove que $(p \leftrightarrow \neg p) \equiv \mathsf{F}$

Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
Resposta:

$$
\begin{array}{lr}
p \leftrightarrow \neg p & \\
\equiv (p \wedge \neg p) \vee (\neg p \wedge \neg\neg p) & [33] \\
\equiv (p \wedge \neg p) \vee (\neg p \wedge p) & [9] \\
\equiv (p \wedge \neg p) \vee \mathsf{F} & [11,21] \\
\equiv p \wedge \neg p & [4] \\
\equiv \mathsf{F} & [21]
\end{array}
$$

35. $\{1,3\ pt\}$ Prove que $(p \leftrightarrow \neg p) \equiv \mathsf{F}$

    Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
    Resposta:

$$
\begin{array}{lr}
p \leftrightarrow \neg p & \\
\equiv (p \wedge \neg p) \vee (\neg p \wedge \neg\neg p) & [33] \\
\equiv (p \wedge \neg p) \vee (\neg p \wedge p) & [9] \\
\equiv (p \wedge \neg p) \vee \mathsf{F} & [11,21] \\
\equiv p \wedge \neg p & [4] \\
\equiv \mathsf{F} & [21]
\end{array}
$$

36. $\{0,7\ pt\}$ Veja abaixo a prova de que $(p \rightarrow \neg q) \equiv \neg(p \wedge q)$.

$$
\begin{array}{ll}
p \rightarrow \neg q & \\
\equiv \neg p \vee \neg q & [22] \\
\equiv \neg(p \wedge q) & [16]
\end{array}
$$

    Use sua criatividade e invente proposições para p e q e depois escreva a prova deste teorema em português.

    Resposta:
    $p =$ Eu me elejo
    $q =$ Eu sou honesto

    Se eu me eleger, então eu não sou honesto é logicamente equivalente a eu não me eleger ou a eu não ser honesto. Eu não me eleger ou eu não ser honesto é logicamente equivalente a não ser verdade que eu me elejo e que eu sou honesto.

1.3 Lógica Proposicional - Prova de Premissa-Conclusão

1. $\{1,0\ pt\}$ Sejam

$$
\begin{array}{l}
p = \textit{eu tomo a vacina H1N1} \\
q = \textit{eu passo mal} \\
r = \textit{eu morro} \\
s = \textit{eu assisto à aula}
\end{array}
$$

    Se eu tomo a vacina H1N1, então eu passo mal e não morro. Se eu não tomo a vacina H1N1, então eu morro ou não passo mal (ou ambos). Se eu passo mal, então eu não assisto à aula. Eu assisti à aula.

Dadas as premissas acima, prove que eu não tomei a vacina H1N1.
Resposta:

1. $p \to (q \land \neg r)$	[Premissa]
2. $\neg p \to (r \lor \neg q)$	[Premissa]
3. $q \to (\neg s)$	[Premissa]
4. s	[Premissa]
5. $\neg\neg s$	[9 em (4)]
6. $\neg q$	[38 em (3) e (5)]
7. $\neg q \lor \neg\neg r$	[41 em (6)]
8. $\neg(q \land \neg r)$	[16 em (7)]
9. $\neg p$	[38 em (1) e (7)]

2. $\{1\ pt\}$ Dadas as 3 premissas $p \to q$, p e $\neg q$. Conclua que $(1 > 2)$. Justifique cada passo de prova com uma das equações ou regra de inferência em anexo.
Resposta:

1. $p \to q$	[Premissa]
2. $\neg q$	[Premissa]
3. $\neg p$	[38 em (1) e (2)]
4. p	[Premissa]
5. $p \land \neg p$	[43 em (3) e (4)]
6. F	[21 em (5)]
7. $(1 > 2) \lor \mathsf{F}$	[41 em (6)]
8. $(1 > 2)$	[4]

3. $\{1,0\ pt\}$ Dada a premissa $\neg(p \to p)$, prove que $(q \lor r)$. Justifique cada passo de prova com uma equação ou regra de inferência em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

1. $\neg(p \to p)$	[Premissa]
2. $p \land (\neg p)$	[26 em (1)]
3. p	[42 em (2)]
4. $\neg p$	[42 em (2)]
5. $p \lor q$	[41 em (3)]
6. $\neg p \lor r$	[41 em (4)]
7. $q \lor r$	[45 em (6) e (7)]

4. $\{1,0\ pt\}$ Dadas as premissas $((t \land u) \to (\neg s))$, $(\neg(t \land u) \to (q \land p))$, $(\neg q \lor \neg p)$ e s. Prove que F (falso). Justifique cada passo de prova com uma equação ou regra de inferência em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

1. $\neg(t \wedge u) \rightarrow (q \wedge p)$	[Premissa]
2. $\neg q \vee \neg p$	[Premissa]
3. $\neg(q \wedge p)$	[16 em (2)]
4. $\neg\neg(t \wedge u)$	[38 em (1) e (3)]
5. $t \wedge u$	[9 em (4)]
6. $(t \wedge u) \rightarrow (\neg s)$	[Premissa]
7. $\neg s$	[37 em (5) e (6)]
8. s	[Premissa]
9. $s \wedge \neg s$	[43 em (7) e (8)]
10. F	[21 em (9)]

5. $\{1,0\ pt\}$ Dadas as premissas $(p \rightarrow \neg q)$, q, $(\neg(p \vee t) \rightarrow s)$ e $(\neg t)$, prove s usando as equações em anexo.
Resposta:

1. $p \rightarrow \neg q$	[Premissa]
2. q	[Premissa]
3. $\neg(p \vee t) \rightarrow s$	[Premissa]
4. $\neg t$	[Premissa]
5. $\neg\neg q$	[9 em 2]
6. $\neg p$	[38 em 1 e 5]
7. $\neg p \wedge \neg t$	[43 em 4 e 6]
8. $\neg(p \vee t)$	[17 em 7]
9. s	[37 em 3 e 8]

6. $\{2,0\ pt\}$ Dadas as premissas $((t \rightarrow s) \rightarrow (q \wedge r))$ e $\neg t$, prove r usando as equações em anexo.
Resposta:

1. $\neg t$	[Premissa]
2. $\neg t \vee s$	[41 em 1]
3. $t \rightarrow s$	[22 em 2]
4. $(t \rightarrow s) \rightarrow (q \wedge s)$	[Premissa]
5. $q \wedge s$	[37 em 3 e 4]
6. s	[42 em 5]

7. $\{1,0\ pt\}$ Dadas as premissas $\neg(p \rightarrow q) \vee (r \wedge s)$ e $\neg((r \wedge s) \wedge \neg t)$, prove que $((p \rightarrow q) \rightarrow t)$ usando as equações em anexo.
Resposta:

1. $\neg(p \rightarrow q) \vee (r \wedge s)$	[Premissa]
2. $\neg((r \wedge s) \wedge \neg t)$	[Premissa]
3. $(p \rightarrow q) \rightarrow (r \wedge s)$	[22 em 1]
4. $\neg(\neg((r \wedge s) \rightarrow t))$	[26 em 2]
5. $(r \wedge s) \rightarrow t$	[9 em 4]
6. $(p \rightarrow q) \rightarrow t$	[39 em 3 e 5]

8. $\{2,0\ pt\}$ Dadas as premissas $((k \vee s) \rightarrow (p \vee q))$, $\neg q$ e k, prove que $(p \vee t)$ usando as equações em anexo.

Resposta:

1. k	[Premissa]
2. $k \vee s$	[41 em 1]
3. $(k \vee s) \to (p \vee q)$	[Premissa]
4. $p \vee q$	[37 em 2 e 3]
5. $\neg q$	[Premissa]
6. p	[40 em 4 e 5]
7. $p \vee t$	[41 em 6]

9. $\{1,0\ pt\}$ Sejam as premissas $\neg p \vee r$, $\neg\neg\neg t$ e $\neg t \to \neg\neg p$. Prove que $s \vee r$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
Resposta:

1. $\neg\neg\neg t$	[Premissa]
2. $\neg t$	[9 em 1]
3. $\neg t \to \neg\neg p$	[Premissa]
4. $\neg\neg p$	[37 em 2 e 3]
5. $\neg p \vee r$	[Premissa]
6. r	[40 em 4 e 5]
7. $s \vee r$	[41 em 6]

10. $\{1,0\ pt\}$ Sejam as premissas $(p \vee (s \wedge \neg s)) \to q$ e $\neg(t \wedge u) \to \neg q$.
Prove que $(p \to (t \wedge u)) \vee k$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
Resposta:

1. $(p \vee (s \wedge \neg s)) \to q$	[Premissa]
2. $\neg(t \wedge u) \to \neg q$	[Premissa]
3. $(p \vee \mathsf{F}) \to q$	[21 em 1]
4. $p \to q$	[4 em 3]
5. $\neg\neg q \to \neg\neg(t \wedge u)$	[23 em 2]
6. $q \to \neg\neg(t \wedge u)$	[9 em 5]
7. $q \to (t \wedge u)$	[9 em 6]
8. $p \to (t \wedge u)$	[39 em 4 e 7]
9. $(p \to (t \wedge u)) \vee k$	[41 em 8]

11. $\{1,0\ pt\}$ Sejam as premissas $(p \leftrightarrow q)$ e $(q \leftrightarrow r)$. Conclua que $(p \leftrightarrow r)$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
Resposta:

1. $p \leftrightarrow q$	[Premissa]
2. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	[31 em 1]
3. $q \leftrightarrow r$	[Premissa]
4. $(q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow q)$	[31 em 1]
5. $p \rightarrow q$	[42 em 2]
6. $q \rightarrow p$	[42 em 2]
7. $q \rightarrow r$	[42 em 4]
8. $r \rightarrow q$	[42 em 4]
9. $p \rightarrow r$	[39 em 5 e 7]
10. $r \rightarrow p$	[39 em 8 e 6]
11. $(p \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow p)$	[43 em 9 e 10]
12. $p \leftrightarrow r$	[31 em 11]

12. $\{1,0\ pt\}$ Sejam as premissas $((r \vee s) \rightarrow (q \leftrightarrow t))$, $(\neg\neg\neg\neg r)$, $t \rightarrow p$ e q. Conclua p. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
Resposta:

1. $(r \vee s) \rightarrow (q \leftrightarrow t)$	[Premissa]
2. $\neg\neg\neg\neg r$	[Premissa]
3. $t \rightarrow p$	[Premissa]
4. q	[Premissa]
5. r	[9,9 em 2]
6. $r \vee s$	[41 em 5]
7. $q \leftrightarrow t$	[37 em 1 e 6]
8. $(q \rightarrow t) \wedge (t \rightarrow q)$	[31 em 7]
9. $q \rightarrow t$	[42 em 8]
10. $q \rightarrow p$	[39 em 9 e 3]
11. p	[37 em 4 e 10]

13. $\{0,8\ pt\}$ Dadas as premissas $((\neg t \vee r) \rightarrow (t \vee (p \rightarrow q))$ e $(s \wedge \neg t)$, prove que $(s \wedge (p \rightarrow q))$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
Resposta:

1. $(\neg t \vee r) \rightarrow (t \vee (p \rightarrow q))$	[Premissa]
2. $s \wedge \neg t$	[Premissa]
3. $\neg t$	[42 em 2]
4. $\neg t \vee r$	[41 em 3]
5. $t \vee (p \rightarrow q)$	[37 em 4 e 1]
6. $p \rightarrow q$	[40 em 3 e 5]
7. s	[42 em 2]
8. $s \wedge (p \rightarrow q)$	[43 em 6 e 7]

14. $\{0,8\ pt\}$ Dadas as premissas $((\neg t \vee r) \rightarrow (t \vee (p \rightarrow q))$ e $(s \wedge \neg t)$, prove que $(s \wedge (p \rightarrow q))$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da

lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
Resposta:

1. $(\neg t \vee r) \rightarrow (t \vee (p \rightarrow q))$	[Premissa]
2. $s \wedge \neg t$	[Premissa]
3. $\neg t$	[42 em 2]
4. $\neg t \vee r$	[41 em 3]
5. $t \vee (p \rightarrow q)$	[37 em 4 e 1]
6. $p \rightarrow q$	[40 em 3 e 5]
7. s	[42 em 2]
8. $s \wedge (p \rightarrow q)$	[43 em 6 e 7]

2 Estruturas Básicas: Conjuntos, Funções, Sequências e Somatórios

2.1 Conjuntos

1. Seja $A \triangle B$ a *diferença simétrica* dada por

$$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B).$$

Prove as equações abaixo. Cada passo da prova deve ser justificada com a "Definição de $\triangle$" ou pelas equações em anexo.

a) $\{0,4\ pt\}$ $A \triangle A = \emptyset$
Resposta:

$$\begin{array}{ll} A \triangle A & \\ = (A \cup A) - (A \cap A) & [\text{Def. } \triangle] \\ = A - (A \cap A) & [70] \\ = A - A & [71] \\ = \{x \mid x \in A \wedge x \notin A\} & [62] \\ = \{x \mid x \in A \wedge x \in \overline{A}\} & [65] \\ = \{x \mid x \in A \cap \overline{A}\} & [60] \\ = \{x \mid x \in \emptyset\} & [84] \\ = \emptyset & [47] \end{array}$$

b) $\{0,4\ pt\}$ $A \triangle B = B \triangle A$
Resposta:

$$\begin{array}{ll} A \triangle B & \\ = (A \cup B) - (A \cap B) & [\text{Def. } \triangle] \\ = (B \cup A) - (A \cap B) & [73] \\ = (B \cup A) - (B \cap A) & [74] \\ = B \triangle A & [\text{Def. } \triangle] \end{array}$$

c) $\{0,4\ pt\}$ $A \triangle U = \overline{A}$, onde U é o conjunto universo.

Resposta:

$$
\begin{array}{ll}
A \triangle U & \\
= (A \cup U) - (A \cap U) & [\text{Def. } \triangle] \\
= U - (A \cap U) & [68] \\
= U - A & [67] \\
= \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\} & [62] \\
= \{x \mid x \in U \wedge x \in \overline{A}\} & [65] \\
= \{x \mid x \in U \cap \overline{A}\} & [60] \\
= \{x \mid x \in \overline{A} \cap U\} & [74] \\
= \{x \mid x \in \overline{A}\} & [67] \\
= \overline{A} & [47]
\end{array}
$$

2. {2,5 pt} Prove que

$$(\ ((A \cap B) \ \cup \ (A \cap C)) \ \cap \ U \ ) \ \cup \ (\overline{C \cup \overline{E}}) \ = \ (\overline{C} \cap E) \ \cup \ (A \cap (B \cup C)),$$

onde U é o conjunto universo.

Resposta:

$$
\begin{array}{ll}
(\ ((A \cap B) \ \cup \ (A \cap C)) \ \cap \ U \ ) \ \cup \ (\overline{C \cup \overline{E}}) & \\
= (\ (A \cap (B \ \cup \ C)) \ \cap \ U \ ) \ \cup \ (\overline{C \cup \overline{E}}) & [77] \\
= (\ A \cap (B \ \cup \ C) \ ) \ \cup \ (\overline{C \cup \overline{E}}) & [67] \\
= (\ A \cap (B \ \cup \ C) \ ) \ \cup \ (\overline{C} \cap \overline{\overline{E}}) & [79] \\
= (\ A \cap (B \ \cup \ C) \ ) \ \cup \ (\overline{C} \cap E) & [72] \\
= (\overline{C} \cap E) \ \cup \ (\ A \cap (B \ \cup \ C) \ ) & [73]
\end{array}
$$

3. $\{3,5 \ pt\}$ Prove que $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *sem* utilizar a equação 76. Ou seja, cada passo de prova deve ser justificado por uma equação da página seguinte *exceto* a equação 76.

Resposta:

$$
\begin{array}{ll}
A \cup (B \cup C) & \\
= \{x \mid x \in A \vee (x \in (B \cup C))\} & [57] \\
= \{x \mid x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)\} & [58] \\
= \{x \mid (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C\} & [12] \\
= \{x \mid x \in (A \cup B) \vee x \in C\} & [58] \\
= \{x \mid x \in (A \cup B) \cup C\} & [58] \\
= (A \cup B) \cup C & [47]
\end{array}
$$

4. $\{1.0 \ pt\}$ Prove que $(x \in U) \equiv \mathsf{T}$, onde U é o conjunto universo.

Resposta:

$$
\begin{array}{ll}
x \in U & \\
\equiv x \in (A \cup \overline{A}) & [83] \\
\equiv x \in A \ \vee \ x \in \overline{A} & [58] \\
\equiv x \in A \ \vee \ x \notin A & [65] \\
\equiv x \in A \ \vee \ \neg(x \in A) & [46] \\
\equiv \mathsf{T} & [20]
\end{array}
$$

5. $\{1,0\ pt\}$ Prove que $((A - C) \cap (C - B)) = \emptyset$
Resposta:

$$
\begin{array}{lr}
(A - C) \cap (C - B) & \\
= \{x \mid x \in (A - C) \wedge x \in (C - B)\} & [59] \\
= \{x \mid (x \in A \wedge x \notin C) \wedge (x \in (C - B)\} & [63] \\
= \{x \mid (x \in A \wedge x \notin C) \wedge (x \in C \wedge x \notin B)\} & [63] \\
= \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in C \wedge x \notin C)\} & [11{,}13] \\
= \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in C \wedge \neg(x \in C))\} & [46] \\
= \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \wedge \mathsf{F}\} & [21] \\
= \{x \mid F\} & [6] \\
= \emptyset & [53]
\end{array}
$$

6. Sejam as equações

$$
\begin{array}{ll}
P(x) = x \notin x & (85) \\
S = \{x \mid P(x)\} & (86)
\end{array}
$$

Prove o Paradoxo de Russell utilizando as equações de 1 a 86. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12), (13), (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

a) $\{1,5\ pt\}$ Dada a premissa $S \in S$, concluímos F.
Resposta:

$$
\begin{array}{lr}
1.\ S \in S & [\text{Premissa}] \\
2.\ S \in \{x \mid P(x)\} & [86] \\
3.\ P(S) & [48] \\
4.\ S \notin S & [85] \\
5.\ \neg(S \in S) & [46] \\
6.\ (S \in S) \wedge \neg(S \in S) & [43 \text{ em } (1) \text{ e } (5)] \\
7.\ \mathsf{F} & [21]
\end{array}
$$

b) $\{1,5\ pt\}$ Dada a premissa $S \notin S$, concluímos F.
Resposta:

$$
\begin{array}{lr}
1.\ S \notin S & [\text{Premissa}] \\
2.\ \neg(S \in S) & [46] \\
3.\ \neg(S \in \{x \mid P(x)\}) & [86] \\
4.\ \neg(P(S)) & [48] \\
5.\ \neg(S \notin S) & [85] \\
6.\ \neg(\neg(S \in S)) & [46] \\
7.\ S \in S & [9] \\
8.\ (S \in S) \wedge \neg(S \in S) & [43 \text{ em } (2) \text{ e } (7)] \\
9.\ \mathsf{F} & [21]
\end{array}
$$

7. $\{4,0\ pt\}$ Prove que $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 das equações do verso. A única **exceção** a esta regra é o uso das equações (10), (11), (12), (13), (73), (74), (75) e (76) que podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

$$
\begin{array}{ll}
(A - B) \cap (B - A) & \\
= \{x \mid x \in (A - B) \wedge x \in (B - A)\} & [59] \\
= \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \in (B - A)\} & [63] \\
= \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in B \wedge x \notin A)\} & [63] \\
= \{x \mid (x \in A \wedge x \notin A) \wedge (x \in B \wedge x \notin B)\} & [11,13] \\
= \{x \mid (x \in A \wedge \neg(x \in A)) \wedge (x \in B \wedge x \notin B)\} & [46] \\
= \{x \mid (x \in A \wedge \neg(x \in A)) \wedge (x \in B \wedge \neg(x \in B)\} & [46] \\
= \{x \mid \mathsf{F} \wedge (x \in B \wedge \neg(x \in B))\} & [21] \\
= \{x \mid \mathsf{F} \wedge \mathsf{F}\} & [21] \\
= \{x \mid \mathsf{F}\} & [6] \\
\emptyset & [53]
\end{array}
$$

8. $\{1,0\ pt\}$ Prove que $(A \cup (B - A)) = (A \cup B)$. Justifique cada passo de prova com uma equação ou regra de inferência em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12), (13), (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
Resposta:

$$
\begin{array}{ll}
A \cup (B - A) & \\
= \{x \mid (x \in A) \vee (x \in (B - A))\} & [57] \\
= \{x \mid (x \in A) \vee ((x \in B) \wedge (x \notin A))\} & [62] \\
= \{x \mid ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge ((x \in A) \vee (x \notin A))\} & [14] \\
= \{x \mid ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge ((x \in A) \vee \neg(x \in A))\} & [46] \\
= \{x \mid ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge \mathsf{T}\} & [20] \\
= \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\} & [3] \\
= A \cup B & [57]
\end{array}
$$

9. $\{2,25\ pt\}$ Prove que $((A - B) - A) = \emptyset$. Justifique cada passo de prova com uma equação ou regra de inferência em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
Resposta:

$$
\begin{array}{ll}
(A - B) - A & \\
= \{x \mid (x \in (A - B)) \wedge x \notin A\} & [62] \\
= \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \notin A\} & [63] \\
= \{x \mid (x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin A)\} & [11,13] \\
= \{x \mid (x \notin B) \wedge (x \in A \wedge \neg(x \in A)\} & [46] \\
= \{x \mid (x \notin B) \wedge \mathsf{F}\} & [21] \\
= \{x \mid \mathsf{F}\} & [6] \\
= \emptyset & [53]
\end{array}
$$

10. $\{2,25\ pt\}$ Dadas as premissas $(x \in \overline{B})$, $(\neg(x \in B) \rightarrow (x \in D))$, $((x \in D) \rightarrow ((x \in A) \wedge (x \in C)))$, conclua que $x \in (A \cup E)$. Justifique cada passo de prova com uma equação ou regra de inferência em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10),

(11), (12), (13), (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
Resposta:

1. $x \in \overline{B}$	[Premissa]
2. $x \notin B$	[65 em (1)]
3. $\neg(x \in B)$	[46 em (2)]
4. $\neg(x \in B) \rightarrow (x \in D)$	[Premissa]
5. $(x \in D) \rightarrow ((x \in A) \wedge (x \in C))$	[Premissa]
6. $\neg(x \in B) \rightarrow ((x \in A) \wedge (x \in C))$	[39 em (4) e (5)]
7. $(x \in A) \wedge (x \in C)$	[37 em (3) e (6)]
8. $(x \in A)$	[42 em (7)]
9. $(x \in A) \vee (x \in E)$	[41 em (8)]
10. $x \in (A \cup E)$	[58 em (9)]

11. $\{1,0\ pt\}$ Prove que $((A \cup B) \cap \overline{A}) = (B - A)$. Justifique cada passo de prova com uma equação ou regra de inferência em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12), (13), (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
Resposta:

$$
\begin{array}{lr}
(A \cup B) \cap \overline{A} & \\
= \{x \mid (x \in (A \cup B)) \wedge (x \in \overline{A})\} & [59] \\
= \{x \mid ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge (x \in \overline{A})\} & [57] \\
= \{x \mid ((x \in A \vee (x \in B)) \wedge (x \notin A)\} & [65] \\
= \{x \mid ((x \in A \vee (x \in B)) \wedge \neg(x \in A)\} & [46] \\
= \{x \mid (\neg(x \in A) \wedge (x \in A)) \vee (\neg(x \in A) \wedge (x \in B))\} & [11,15] \\
= \{x \mid \mathsf{F} \vee (\neg(x \in A) \wedge (x \in B))\} & [11,21] \\
= \{x \mid \neg(x \in A) \wedge (x \in B)\} & [11,4] \\
= B - A & [11,64]
\end{array}
$$

12. $\{2,25\ pt\}$ Prove que $\overline{A \cap \overline{A}} = \{x \mid \mathsf{T}\}$. Justifique cada passo de prova com uma equação ou regra de inferência em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
Resposta:

$$
\begin{array}{lr}
\overline{A \cap \overline{A}} & \\
= \{x \mid x \notin (A \cap \overline{A})\} & [64] \\
= \{x \mid \neg(x \in (A \cap \overline{A}))\} & [46] \\
= \{x \mid \neg(x \in A \wedge x \in \overline{A})\} & [60] \\
= \{x \mid \neg(x \in A \wedge x \notin A)\} & [65] \\
= \{x \mid \neg(x \in A \wedge \neg(x \in A))\} & [46] \\
= \{x \mid \neg(\mathsf{F})\} & [21] \\
= \{x \mid \mathsf{T}\} & [1]
\end{array}
$$

13. $\{2,25\ pt\}$ Dada a premissa $x \notin A$, conclua que $x \notin (A \cap B)$. Justifique cada passo de prova com uma equação ou regra de inferência em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja,

as equações (10), (11), (12), (13), (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

1. $x \notin A$	[Premissa]
2. $\neg(x \in A)$	[46 em (1)]
3. $\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)$	[41 em (2)]
4. $\neg((x \in A) \wedge (x \in B))$	[17 em (3)]
5. $\neg(x \in (A \cap B))$	[60 em (4)]
6. $x \notin (A \cap B)$	[46 em (5)]

14. $\{4,0\ pt\}$ Prove que $(A - (B \cup C)) = ((A - B) \cap (A - C))$. Justifique cada passo de prova com uma das equações ou regra de inferência no verso. Somente as equações (10), (11), (12), (13), (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

$$
\begin{array}{ll}
A - (B \cup C) & \\
= \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin (B \cup C))\} & [62] \\
= \{x \mid (x \in A) \wedge \neg(x \in (B \cup C))\} & [46] \\
= \{x \mid (x \in A) \wedge \neg((x \in B) \vee (x \in C))\} & [58] \\
= \{x \mid (x \in A) \wedge (\neg(x \in B) \wedge \neg(x \in C))\} & [17] \\
= \{x \mid (x \in A) \wedge ((x \notin B) \wedge \neg(x \in C))\} & [46] \\
= \{x \mid (x \in A) \wedge ((x \notin B) \wedge (x \notin C))\} & [46] \\
= \{x \mid ((x \in A) \wedge (x \in A)) \wedge ((x \notin B) \wedge (x \notin C))\} & [8] \\
= \{x \mid ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \wedge ((x \in A) \wedge (x \notin C))\} & [11,13] \\
= \{x \mid (x \in (A - B)) \wedge ((x \in A) \wedge (x \notin C))\} & [63] \\
= \{x \mid (x \in (A - B)) \wedge (x \in (A - C))\} & [63] \\
= (A - B) \cap (A - C) & [59]
\end{array}
$$

15. $\{2,0\ pt\}$ Prove utilizando as equações em anexo que:

$$\overline{\emptyset} = \{x \mid \mathsf{T}\}$$

Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12), (13), (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

$$
\begin{array}{ll}
\overline{\emptyset} & \\
= \{x \mid x \notin \emptyset\} & [64] \\
= \{x \mid \neg(x \in \emptyset)\} & [46] \\
= \{x \mid \neg\mathsf{F}\} & [54] \\
= \{x \mid \mathsf{T}\} & [1]
\end{array}
$$

16. $\{4,0\ pt\}$ Sejam as premissas $(x \in (A \cap B))$ e $(\ (x \in (B \cup C)) \rightarrow (x \in D)\ )$. Conclua que $x \in (D \cup A)$.

Justifique cada passo de prova com uma das equações ou regra de inferência no verso. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12), (13), (73), (74), (75) e (76)

podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
Resposta:

1. $x \in (A \cap B)$	[Premissa]
2. $(x \in A) \wedge (x \in B)$	[60 em (1)]
3. $x \in B$	[42 em (2)]
4. $(x \in B) \vee (x \in C)$	[41 em (3)]
5. $x \in (B \cup C)$	[58 em (4)]
6. $(x \in (B \cup C)) \rightarrow (x \in D)$	[Premissa]
7. $x \in D$	[37 em (5) e (6)]
8. $(x \in D) \vee (x \in A)$	[41 em (7)]
9. $x \in (D \cup A)$	[58 em (8)]

17. $\{2,0\ pt\}$ Prove utilizando as equações em anexo que:

$$\overline{(\overline{A} \cap \overline{A})} \cup (\overline{B} \cap (C \cap \overline{C})) = A$$

Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12), (13), (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
Resposta:

$$\begin{array}{ll}
\overline{(\overline{A} \cap \overline{A})} \cup (\overline{B} \cap (C \cap \overline{C})) & \\
= \overline{\overline{A}} \cup (\overline{B} \cap (C \cap \overline{C})) & [71] \\
= A \cup (\overline{B} \cap (C \cap \overline{C})) & [72] \\
= A \cup (\overline{B} \cap \emptyset) & [84] \\
= A \cup \emptyset & [69] \\
= A & [66]
\end{array}$$

18. $\{3,0\ pt\}$ Prove que $(x \in (A \cap B) \cap C) \equiv (x \in B \cap (C \cap A))$. Justifique cada passo de prova com uma das equações ou regra de inferência no verso. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12), (13), (73) e (75) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova. **Não utilize as equações 74 e 76 em nenhum passo (seja simultaneamente ou não).**

Resposta:

$$\begin{array}{ll}
x \in (A \cap B) \cap C & \\
\equiv x \in (A \cap B) \wedge x \in C & [60] \\
\equiv (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C & [60] \\
\equiv x \in B \wedge (x \in C \wedge x \in A) & [11,13] \\
\equiv x \in B \wedge x \in (C \cap A) & [60] \\
\equiv x \in B \cap (C \cap A) & [60]
\end{array}$$

19. $\{2,0\ pt\}$ Sejam as premissas $(\neg(x \in \emptyset) \rightarrow x \in (A \cap B) \cap C)$ e $((x \in A \wedge x \in B) \rightarrow x \in (D \cap E))$. Conclua, usando as equações em anexo, que $x \in E$.

Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

1. $\neg(x \in \emptyset) \rightarrow x \in (A \cap B) \cap C$	[Premissa]
2. $\neg\mathsf{F} \rightarrow x \in (A \cap B) \cap C$	[54 em 1]
3. $\neg\neg\mathsf{F} \vee x \in (A \cap B) \cap C$	[22 em 2]
4. $\mathsf{F} \vee x \in (A \cap B) \cap C$	[9 em 3]
5. $x \in (A \cap B) \cap C$	[10,4 em 4]
6. $x \in (A \cap B) \ \wedge \ x \in C$	[60 em 5]
7. $x \in (A \cap B)$	[42 em 6]
8. $x \in A \ \wedge \ x \in B$	[60 em 7]
9. $(x \in A \wedge x \in B) \rightarrow x \in (D \cap E)$	[Premissa]
10. $x \in (D \cap E)$	[37 em 8 e 9]
11. $x \in D \ \wedge \ x \in E$	[60 em 10]
12. $x \in E$	[42 em 11]

20. $\{2,0\ pt\}$ Prove que $A \cup \overline{(B \cap (C \cap \emptyset))} = U$, onde U é o conjunto universo.

Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12), (13), (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

$$
\begin{aligned}
& A \cup \overline{(B \cap (C \cap \emptyset))} && \\
& = A \cup \overline{(B \cap \emptyset)} && [69] \\
& = A \cup \overline{\emptyset} && [69] \\
& = \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in \overline{\emptyset}\} && [57] \\
& = \{x \mid x \in A \ \vee \ x \notin \emptyset\} && [65] \\
& = \{x \mid x \in A \ \vee \ \neg(x \in \emptyset)\} && [46] \\
& = \{x \mid x \in A \ \vee \ \neg\mathsf{F}\} && [54] \\
& = \{x \mid x \in A \ \vee \ \mathsf{T}\} && [1] \\
& = \{x \mid \mathsf{T}\} && [5] \\
& = \{x \mid x \in A \ \vee \ \neg(x \in A)\} && [20] \\
& = \{x \mid x \in A \ \vee \ x \notin A\} && [46] \\
& = \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in \overline{A}\} && [65] \\
& = A \cup \overline{A} && [57] \\
& = U && [83]
\end{aligned}
$$

21. $\{2,0\ pt\}$ Prove que $\overline{\overline{\overline{\emptyset}}} = \overline{\emptyset}$ **sem utilizar a equação 72**.

Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12), (13), (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

$$
\begin{array}{ll}
\overline{\overline{\overline{\emptyset}}} & \\
= \{x \mid x \notin \overline{\overline{\emptyset}}\} & [64] \\
= \{x \mid \neg(x \in \overline{\overline{\emptyset}})\} & [46] \\
= \{x \mid \neg(x \notin \overline{\emptyset})\} & [65] \\
= \{x \mid \neg\neg(x \in \overline{\emptyset})\} & [46] \\
= \{x \mid x \in \overline{\emptyset}\} & [9] \\
= \overline{\emptyset} & [47]
\end{array}
$$

22. $\{2,0\ pt\}$ Sejam as premissas $(\ (x \notin A) \rightarrow \neg(x \in (B - C))\ )$ e $(\ (x \in (A \cap \emptyset)) \ \vee \ (x \in (B - C))\ )$. Conclua, usando as equações em anexo, que $x \in A$.

    Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

    Resposta:

$$
\begin{array}{lr}
1.\ (x \in (A \cap \emptyset)) \ \vee \ (x \in (B - C)) & [\text{Premissa}] \\
2.\ (x \in \emptyset) \ \vee \ (x \in (B - C)) & [69 \text{ em } 1] \\
3.\ \mathsf{F} \ \vee \ (x \in (B - C)) & [54 \text{ em } 2] \\
4.\ x \in (B - C) & [10{,}4 \text{ em } 3] \\
5.\ \neg\neg(x \in (B - C)) & [9 \text{ em } 4] \\
6.\ (x \notin A) \rightarrow \neg(x \in (B - C)) & [\text{Premissa}] \\
7.\ \neg(x \notin A) & [38 \text{ em } 5 \text{ e } 6] \\
8.\ \neg(\neg(x \in A)) & [46 \text{ em } 7] \\
9.\ x \in A & [9 \text{ em } 8]
\end{array}
$$

23. $\{2,0\,pt\}$ Prove que $\overline{U} = \emptyset$, onde U é o conjunto universo. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12), (13), (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

    Resposta:

$$
\begin{array}{ll}
\overline{U} & \\
= \{x \mid x \notin U\} & [64] \\
= \{x \mid x \notin (A \cup \overline{A})\} & [83] \\
= \{x \mid \neg(x \in (A \cup \overline{A}))\} & [46] \\
= \{x \mid \neg(x \in A \ \vee \ x \in \overline{A})\} & [58] \\
= \{x \mid \neg(x \in A \ \vee \ x \notin A)\} & [65] \\
= \{x \mid \neg(x \in A \ \vee \ \neg(x \in A))\} & [46] \\
= \{x \mid \neg\mathsf{T}\} & [20] \\
= \{x \mid \mathsf{F}\} & [2] \\
= \emptyset & [53]
\end{array}
$$

24. $\{2,0\,pt\}$ Prove que $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$.

Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12), (13), (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

$$
\begin{array}{ll}
(A \cap B) - C & \\
= \{x \mid x \in (A \cap B) \ \wedge \ x \notin C\} & [62] \\
= \{x \mid (x \in A \ \wedge \ x \in B) \ \wedge \ x \notin C\} & [60] \\
= \{x \mid (x \in A \ \wedge \ x \in B) \ \wedge \ (x \notin C \ \wedge x \notin C)\} & [8] \\
= \{x \mid (x \in A \ \wedge \ x \notin C) \ \wedge \ (x \in B \ \wedge \ x \notin C)\} & [11,13] \\
= \{x \mid (x \in A - C) \ \wedge \ (x \in B - C)\} & [63,63] \\
= (A - B) \cap (B - C) & [59]
\end{array}
$$

25. $\{1,0\ pt\}$ Dadas as premissas $x \in (A \cup (B \cap C))$ e $x \notin B$. Conclua que $x \in A$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

$$
\begin{array}{lr}
1.\ x \in (A \cup (B \cap C)) & [\text{Premissa}] \\
2.\ (x \in A) \vee (x \in B \cap C) & [58 \text{ em } (1)] \\
3.\ (x \in A) \vee ((x \in B) \wedge (x \in C)) & [60 \text{ em } (2)] \\
4.\ x \notin B & [\text{Premissa}] \\
5.\ \neg(x \in B) & [46 \text{ em } (4)] \\
6.\ \neg(x \in B) \vee \neg(x \in C) & [41 \text{ em } (5)] \\
7.\ \neg((x \in B) \wedge (x \in C)) & [17 \text{ em } (6)] \\
8.\ x \in A & [40 \text{ em } (3) \text{ e } (7)]
\end{array}
$$

26. $\{1,0\ pt\}$ Prove que $\overline{A \cup (\overline{B} \cap C)} = (\overline{A} \cap B) \cup \overline{(A \cup C)}$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12), (13), (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

$$
\begin{array}{lll}
\multicolumn{2}{l}{\overline{A \cup (\overline{B} \cap C)}} & \\
= & \overline{A} \cap \overline{(\overline{B} \cap C)} & [79] \\
= & \overline{A} \cap (\overline{\overline{B}} \cup \overline{C}) & [80] \\
= & \overline{A} \cap (B \cup \overline{C}) & [72] \\
= & (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{C}) & [77] \\
= & (\overline{A} \cap B) \cup \overline{(A \cup C)} & [79]
\end{array}
$$

27. $\{1,0\ pt\}$ Prove que $\{x \mid \mathsf{T}\} = U$, onde U é o conjunto universo. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

$$\begin{array}{ll} \{x \mid \mathsf{T}\} & \\ = \{x \mid (x \in A) \vee \neg(x \in A)\} & [20] \\ = \{x \mid (x \in A) \vee (x \notin A)\} & [46] \\ = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in \overline{A})\} & [65] \\ = A \cup \overline{A} & [57] \\ = U & [83] \end{array}$$

28. Um sinal de trânsito pode estar em um destes três estados no instante atual: $AGORA = \{verde, vermelho, amarelo\}$. Na próxima mudança de sinal, o sinal pode estar: $PROXIMA = \{verde, vermelho, amarelo\}$. As mudanças de sinal do instante atual para a próxima mudança são modeladas como o conjunto $MUDANCA = AGORA \times PROXIMA$. Por exemplo, o par $(vermelho, verde) \in MUDANCA$ significa que o sinal está, neste momento, vermelho e será verde na próxima mudança.

a)$\{1,0\ pt\}$ Liste todos os pares do conjunto $MUDANCA$.
Resposta:

$$\begin{array}{l} (verde, verde), (verde, vermelho), (verde, amarelo) \\ (vermelho, verde), (vermelho, vermelho), (vermelho, amarelo) \\ (amarelo, verde), (amarelo, vermelho), (amarelo, amarelo) \end{array}$$

b)$\{1,5\ pt\}$ O conjunto $MUDANCA$ permite algumas mudanças de sinal ilegais como, por exemplo, $(amarelo, verde)$. Suponha o conjunto $NOVA\_MUDANCA = \{(a,b) \in MUDANCA \mid P(a,b)\}$. Defina o predicado $P(a,b)$ de forma que $NOVA\_MUDANCA$ só contenha mudanças permitidas em um sinal de trânsito.
Resposta:

$$\begin{array}{rl} P(a,b) = & ((a = verde) \wedge (b = amarelo)) \vee \\ & ((a = amarelo) \wedge (b = vermelho)) \vee \\ & ((a = vermelho) \wedge (b = verde)) \end{array}$$

29. $\{3,3\ pt\}$ Dadas as premissas $x \in A$ e $x \notin (A \cap B)$, conclua que $x \in (A - B)$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
Resposta:

$$\begin{array}{lr} 1.\ x \in A & [\text{Premissa}] \\ 2.\ x \notin (A \cap B) & [\text{Premissa}] \\ 3.\ \neg(x \in A \cap B) & [46 \text{ em } 2] \\ 4.\ \neg((x \in A)\ \wedge\ (x \in B)) & [60 \text{ em } 3] \\ 5.\ \neg(x \in A)\ \vee\ \neg(x \in B) & [16 \text{ em } 4] \\ 6.\ \neg\neg(x \in A) & [9 \text{ em } 1] \\ 7.\ \neg(x \in B) & [40 \text{ em } 5 \text{ e } 6] \\ 8.\ (x \in A) \wedge \neg(x \in B) & [42 \text{ em } 1 \text{ e } 7] \\ 9.\ (x \in A) \wedge (x \notin B) & [46 \text{ em } 8] \\ 10.\ x \in (A - B) & [63 \text{ em } 9] \end{array}$$

30. $\{1,0\ pt\}$ Dada a premissa $x \notin (A \cup B)$, conclua que $x \in \overline{B}$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
Resposta:

1. $x \notin (A \cup B)$	[Premissa]
2. $\neg(x \in (A \cup B))$	[46 em (1)]
3. $\neg((x \in A) \vee (x \in B))$	[58 em (2)]
4. $\neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B)$	[17 em (3)]
5. $\neg(x \in B)$	[42 em (4)]
6. $x \notin B$	[46 em 5]
7. $x \in \overline{B}$	[64 em 6]

31. O estado de um motor de carro é modelado como o conjunto $MOTOR = \{ligado, desligado\}$. O estado da porta é o conjunto $PORTA = \{aberta, fechada\}$ e o estado da marcha, $MARCHA = \{1, 2, 3, 4, 5, ré, neutra\}$. O estado do carro é o conjunto $CARRO = MOTOR \times PORTA \times MARCHA$.

a)$\{0,5\ pt\}$ Liste 3 elementos que pertençam ao conjunto $CARRO$ e que capturem os seguintes estados de um carro: 1) carro desligado, porta aberta e na marcha ré; 2) carro desligado, porta fechada e na primeira marcha; e 3) carro ligado, porta aberta e na marcha neutra.
Resposta: $(desligado, aberta, ré), (desligado, fechada, 1), (ligado, aberta, neutra)$

b)$\{1,0\ pt\}$ Um carro seguro nunca permite que a porta esteja aberta com o motor ligado. Este carro pode ser definido como sendo $CARRO\_SEGURO = \{(x, y, z) \in CARRO \mid P(x, y, z)\}$, onde $P(x, y, z) = (x = ligado \ \rightarrow \ y = fechada)$. Liste todos os elementos de $CARRO\_SEGURO$.
Resposta:

$(desligado, aberta, 1), (desligado, aberta, 2), (desligado, aberta, 3),$
$(desligado, aberta, 4), (desligado, aberta, 5), (desligado, aberta, ré),$
$(desligado, aberta, neutra), (desligado, fechada, 1), (desligado, fechada, 2),$
$(desligado, fechada, 3), (desligado, fechada, 4), (desligado, fechada, 5),$
$(desligado, fechada, ré), (desligado, fechada, neutra), (ligado, fechada, 1),$
$(ligado, fechada, 2), (ligado, fechada, 3), (ligado, fechada, 4),$
$(ligado, fechada, 5), (ligado, fechada, ré), (ligado, fechada, neutra)$

c)$\{1,5\ pt\}$ Defina o conjunto $CARRO\_LENTO$ contendo estados de um carro que só possui 3 marchas além da ré e da neutra.
Resposta:
$CARRO\_LENTO = \{(x, y, z) \in CARRO \mid (z \ \leq \ 3) \ \vee \ (z = ré) \ \vee (z = neutra)\}$

32. $\{3,3\ pt\}$ Dadas as premissas $x \in (A \cap B)$ e $x \notin (A \cap C)$, conclua que $x \notin C$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

1. $x \in (A \cap B)$	[Premissa]
2. $x \notin (A \cap C)$	[Premissa]
3. $(x \in A) \ \wedge \ (x \in B)$	[60 em 1]
4. $\neg(x \in A \cap C)$	[46 em 2]
5. $\neg((x \in A) \ \wedge \ (x \in C))$	[60 em 4]
6. $\neg(x \in A) \ \vee \ \neg(x \in C)$	[16 em 5]
7. $x \in A$	[42 em 3]
8. $\neg\neg(x \in A)$	[9 em 7]
9. $\neg(x \in C)$	[40 em 6 e 8]
10. $x \notin C$	[46 em 9]

33. $\{2,0\ pt\}$ Sejam as premissas $x \notin (A \cap (B \cup C))$ e $x \in A$. Prove que $x \notin B$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
Resposta:

1. $x \notin (A \cap (B \cup C))$	[Premissa]
2. $x \in \overline{(A \cap (B \cup C))}$	[65 em 1]
3. $x \in (\overline{A} \cup \overline{(B \cup C)})$	[80 em 2]
4. $(x \in \overline{A}) \vee (x \in \overline{(B \cup C)})$	[58 em 3]
5. $(x \notin A) \vee (x \in \overline{(B \cup C)})$	[65 em 4]
6. $\neg(x \in A) \vee (x \in \overline{(B \cup C)})$	[46 em 5]
7. $x \in A$	[Premissa]
8. $\neg\neg(x \in A)$	[9 em 7]
9. $x \in \overline{(B \cup C)}$	[40 em 8 e 6]
10. $x \in (\overline{B} \cap \overline{C})$	[79 em 9]
11. $(x \in \overline{B}) \wedge (x \in \overline{C})$	[60 em 10]
12. $x \in \overline{B}$	[42 em 11]
13. $x \notin B$	[65 em 12]

34. Seja $A = \{Dilma, Obama, Angela\}$.

a)$\{0,66\}$ Quais são os elementos de $\mathcal{P}(A)$, o conjunto das partes de A?
Resposta:
$\emptyset, \{Dilma\}, \{Obama\}, \{Angela\}$,
$\{Dilma, Obama\}, \{Dilma, Angela\}, \{Obama, Angela\}$ e
$\{Dilma, Obama, Angela\}$

b)$\{0,66\}$ Calcule $|P(A) \times A|$, ou seja o tamanho do conjunto $P(A) \times A$.
Resposta:
$|P(A) \times A| = |P(A)| \cdot |A| = 8 \cdot 3 = 24.$

c)$\{0,68\ pt\}$ Quais são os elementos do conjunto
$\{x \mid (x \in P(A)) \wedge (Dilma \in x)\}$?
Resposta: $\{Dilma\}$, $\{Dilma, Angela\}$ e $\{Dilma, Obama, Angela\}$. Ou seja, $B = \{\{Dilma\}, \{Dilma, Angela\}, \{Dilma, Obama, Angela\}\}$.

35. $\{3,3\ pt\}$ Dadas as premissas $x \notin C$, $x \in (B \cup C)$ e $((x \in B) \to (x \in A))$, conclua que $x \in A$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
Resposta:

1. $x \notin C$	[Premissa]
2. $x \in (B \cup C)$	[Premissa]
3. $x \in B \to x \in A$	[Premissa]
4. $\neg(x \in C)$	[46 em 1]
5. $x \in B \vee x \in C$	[58 em 2]
6. $x \in B$	[40 em 4 e 5]
7. $x \in A$	[37 em 1 e 6]

36. $\{2,0\ pt\}$ Sejam as premissas $x \in (A \cup (B \cap C))$ e $x \in (\overline{B} \cap \overline{D})$.
Prove que $x \in A$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
Resposta:

1. $x \in (A \cup (B \cap C))$	[Premissa]
2. $x \in (\overline{B} \cap \overline{D})$	[Premissa]
3. $(x \in A) \vee (x \in (B \cap C))$	[58 em 1]
4. $(x \in \overline{B}) \wedge (x \in \overline{D})$	[60 em 2]
5. $x \in \overline{B}$	[42 em 4]
6. $(x \in \overline{B}) \vee (x \in \overline{C})$	[41 em 5]
7. $x \in (\overline{B} \cup \overline{C})$	[58 em 6]
8. $x \in \overline{B \cap C}$	[80 em 7]
9. $x \notin (B \cap C)$	[65 em 8]
10. $\neg(x \in (B \cap C))$	[46 em 9]
11. $x \in A$	[40 em 1 e 10]

37. Seja $A = \{Roberto, Erasmo, Carlos\}$.

a)$\{0,66\ pt\}$ Quais são os elementos de $P(A)$, o conjunto das partes de A?
Resposta:
$\emptyset, \{Roberto\}, \{Erasmo\}, \{Carlos\}$,
$\{Roberto, Erasmo\}, \{Roberto, Carlos\}, \{Erasmo, Carlos\}$ e
$\{Roberto, Erasmo, Carlos\}$.

b)$\{0,66\ pt\}$ Quais são os elementos do conjunto
$B = \{x \mid (x \in P(A)) \wedge (|x| = 2)\}$?
Obs. Lembre que $|x|$ é o tamanho do conjunto x.
Resposta:
$\{Roberto, Erasmo\}$, $\{Roberto, Carlos\}$ e $\{Erasmo, Carlos\}$

c)$\{0,68\ pt\}$ Quais são os elementos do conjunto
$A \times \{x \mid (x \in P(A)) \wedge (|x| = 2)\}$?
Resposta:
$(Roberto, \{Roberto, Erasmo\})$,

$(Roberto, \{Roberto, Carlos\})$,
$(Roberto, \{Erasmo, Carlos\})$,
$(Erasmo, \{Roberto, Erasmo\})$,
$(Erasmo, \{Roberto, Carlos\})$,
$(Erasmo, \{Erasmo, Carlos\})$,
$(Carlos, \{Roberto, Erasmo\})$,
$(Carlos, \{Roberto, Carlos\})$ e
$(Carlos, \{Erasmo, Carlos\})$.

38. $\{3,3\,pt\}$ Dadas as premissas $x \in (A{-}B)$ e $x \in (B{\cup}C)$, conclua que $x \in (A{\cap}C)$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
Resposta:

1. $x \in (A - B)$	[Premissa]
2. $x \in (B \cup C)$	[Premissa]
3. $x \in A \wedge x \notin B$	[63 em 1]
4. $x \in A$	[42 em 3]
5. $x \notin B$	[42 em 3]
6. $\neg(x \in B)$	[46 em 5]
7. $x \in B \vee x \in C$	[58 em 2]
8. $x \in C$	[40 em 6 e 7]
9. $x \in A \wedge x \in C$	[43 em 4 e 8]
10. $x \in (A \cap C)$	[60 em 8 e 9]

39. Um programa de computador pode ser *representado matematicamente* por conjunto de pares (e, s), onde e é o valor de entrada e s, o de saída. Por exemplo, o programa que calcula o fatorial de um número pode ser representado pelo conjunto de pares $F = \{(0,1), (1,1), (2,2), (3,6), (4,24), \ldots\}$ porque, se a entrada for 0, a saída será o fatorial de 0, que é 1; se a entrada for 1, a saída será o fatorial de 1, que é 1; se a entrada for 2, a saída será o fatorial de 2, que é 2, etc.

a) $\{0,50\,pt\}$ Liste quaisquer 5 pares do conjunto que representa matematicamente um programa que calcula o triplo de um número.
Resposta: (-3,-9), (-2,-6), (-1,-3), (0,0) e (1,3).

b) $\{0,50\,pt\}$ Sejam F o conjunto que representa matematicamente o programa fatorial (como exemplificado no enunciado) e

$$G = \{(x, z) \mid ((x, y) \in F) \wedge (z = 2 \cdot y)\}.$$

Liste quaisquer 5 pares do conjunto G.
Resposta: (0,2), (1,2), (2,4), (3,12) e (4, 48).

c) $\{0,50\,pt\}$ O que o programa de computador representado por G computa?

Resposta: O programa calcula o dobro do fatorial.

d) $\{0,50\,pt\}$ Seja

$$H = \{(x, y) \mid (x \in \mathbb{N}) \wedge ((x = 0) \rightarrow (y = 0)) \wedge ((x > 0) \rightarrow (y = x + 1))\}.$$

Liste quaisquer 5 pares do conjunto H.
Resposta: (0,0), (1,2), (2,3), (3,4), (5,6).

40. $\{2,0\ pt\}$ Sejam as premissas $(x \in A) \to (x \in B)$, $(x \in C) \to (x \in A)$, $(x \in B) \to (x \in C)$. Conclua T. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
Resposta:

$$\begin{array}{lr}
1.\ (x \in A) \to (x \in B) & [\text{Premissa}] \\
2.\ (x \in C) \to (x \in A) & [\text{Premissa}] \\
3.\ (x \in B) \to (x \in C) & [\text{Premissa}] \\
4.\ (x \in A) \to (x \in C) & [39 \text{ em } 1 \text{ e } 3] \\
5.\ (x \in A) \to (x \in A) & [39 \text{ em } 4 \text{ e } 2] \\
6.\ \neg(x \in A) \lor (x \in A) & [22 \text{ em } 5] \\
7.\ \mathsf{T} & [10{,}20 \text{ em } 6]
\end{array}$$

41. $\{2,0\ pt\}$ Prove que

$$(\overline{\overline{(A \cap B)} \cap \overline{(B \cap A)}}) \;=\; (A \cap B).$$

Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
Resposta:

$$\begin{array}{lr}
\overline{\overline{(A \cap B)} \cap \overline{(B \cap A)}} & \\
= \overline{\overline{(A \cap B)}} \cup \overline{\overline{(B \cap A)}} & [80] \\
= (A \cap B) \cup (B \cap A) & [72{,}72] \\
= (A \cap B) \cup (A \cap B) & [74] \\
= A \cap B & [70]
\end{array}$$

42. $\{3,3\ pt\}$ Dadas as premissas $(x \notin (\overline{A \cup B}))$ e $(x \notin B)$, conclua que $(x \in A)$.
Resposta:

$$\begin{array}{lr}
1.\ x \notin (\overline{A \cup B}) & [\text{Premissa}] \\
2.\ \neg(x \in (\overline{A \cup B})) & [46 \text{ em } 1] \\
3.\ \neg(x \notin (A \cup B)) & [65 \text{ em } 2] \\
4.\ \neg\neg(x \in (A \cup B)) & [46 \text{ em } 3] \\
5.\ x \in (A \cup B) & [9 \text{ em } 4] \\
6.\ (x \in A) \lor (x \in B) & [58 \text{ em } 5] \\
7.\ (x \notin B) & [\text{Premissa}] \\
8.\ \neg(x \in B) & [46 \text{ em } 7] \\
9.\ x \in A & [40 \text{ em } 6 \text{ e } 8]
\end{array}$$

43. $\{2,0\ pt\}$ Sejam as premissas $x \in \overline{A}$ e $x \in (A \cup (B \cap C))$. Conclua que $x \in B$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12), (13), (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
Resposta:

1. $x \in \overline{A}$	[Premissa]
2. $x \in (A \cup (B \cap C))$	[Premissa]
3. $(x \in A) \vee (x \in (B \cap C))$	[58 em 2]
4. $(x \in A) \vee ((x \in B) \wedge (x \in C))$	[60 em 3]
5. $x \notin A$	[65 em 1]
6. $\neg(x \in A)$	[46 em 5]
7. $(x \in B) \wedge (x \in C)$	[40 em 4 e 6]
8. $x \in B$	[42 em 7]

44. Seja $DATA = \{x \mid x\ \textit{é uma data qualquer}\}$. **Por exemplo**, 20/12/2013 $\in DATA$, 10/03/2054 $\in DATA$, 01/01/0001 $\in DATA$, 21/04/1500 $\in DATA$, **etc** (ou seja, todas as possíveis datas pertencem à $DATA$).
Seja $FERIADO = \{x \mid (x \in DATA) \wedge (x\ \textit{é um feriado nacional de}\ 2013)\}$.
Seja $FERIAS = (23/12/2013, 05/01/2014)$.

Em cada letra abaixo, diga se a proposição é verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta em, no máximo, 3 linhas.

a)$\{0,50\ pt\}$ $FERIADO \subset DATA$
Resposta:
Verdadeiro. Nem toda data em $DATA$ pertence à $FERIADO$. Ou seja, $FERIADO$ é efetivamente menor que $DATA$ e, portanto, um subconjunto próprio de $DATA$.

b)$\{0,50\ pt\}$ $FERIAS \in (DATA \times DATA)$
Resposta:
Verdadeiro. $(DATA \times DATA)$ contém todos os pares de quaisquer 2 datas, incluindo o par $FERIAS$.

c)$\{0,50\ pt\}$ $(DATA \cap (FERIADO \cap \{20/12/2013\})) = FERIADO$.
Resposta:
Falso. A interseção de $FERIADO$ e $\{20/12/2013\}$ é $\emptyset$. E a interseção de $DATA \cap \emptyset$ é $\emptyset$.

d)$\{0,50\ pt\}$ $\{FERIADO\} \subseteq P(DATA)$, onde $\mathcal{P}(DATA)$ é o conjunto das partes de $DATA$.
Resposta:
Verdadeiro. $\{FERIADO\}$ é um conjunto que contém 1 conjunto de datas. $P(DATA)$ é um conjunto de conjunto de datas. Portando, $\{FERIADO\}$ é um subconjunto de $P(DATA)$.

45. $\{2,0\ pt\}$ Prove que $\overline{\emptyset \cap \overline{\emptyset \cup U}} = U$, onde U é o conjunto universo.
Resposta:

$$
\begin{array}{ll}
\overline{\emptyset \cap \overline{\emptyset \cup U}} & \\
= \overline{\emptyset} & [74,69] \\
= \{x \mid x \notin \emptyset\} & [64] \\
= \{x \mid \neg(x \in \emptyset)\} & [46] \\
= \{x \mid \neg(\mathsf{F})\} & [54] \\
= \{x \mid \mathsf{T}\} & [1] \\
= \{x \mid (x \in A) \vee \neg(x \in A)\} & [20] \\
= \{x \mid (x \in A) \vee (x \notin A)\} & [46] \\
= \{x \mid (x \in A) \vee (x \in \overline{A})\} & [65] \\
= A \cup \overline{A} & [57] \\
= U & [83]
\end{array}
$$

46. $\{0,8\ pt\}$ Sejam A e B conjuntos. Prove que

$$(A = B) \equiv (\forall x((x \notin A \to x \notin B) \wedge (x \notin B \to x \notin A)))$$

Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
Resposta:

$$
\begin{array}{ll}
A = B & \\
\equiv \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) & [49] \\
\equiv \forall x(\neg(x \in A) \leftrightarrow \neg(x \in B)) & [32] \\
\equiv \forall x(x \notin A \leftrightarrow x \notin B) & [46,46] \\
\equiv \forall x((x \notin A \to x \notin B) \wedge (x \notin B \to x \notin A)) & [31]
\end{array}
$$

47. $\{0,4\ pt\}$ Seja $A = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$. Calcule $\mathcal{P}(A)$, o conjunto das partes de A.
Resposta:
$\{\emptyset, \{\{1\}\},\ \{\{2\}\},\ \{\{3\}\},\ \{\{4\}\},$
$\{\{1\},\{2\}\},\ \{\{1\},\{3\}\},\ \{\{1\},\{4\}\},\ \{\{2\},\{3\}\},\ \{\{2\},\{4\}\},\ \{\{3\},\{4\}\},$
$\{\{1\},\{2\},\{3\}\},\ \{\{1\},\{2\},\{4\}\},\ \{\{1\},\{3\},\{4\}\},\ \{\{2\},\{3\},\{4\}\},$
$\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}\}$

48. Seja $CANDIDATOS = \{Aecio, Dilma, Eduardo\}$.

a) $\{0,4\ pt\}$ Liste os elementos de $CANDIDATOS \times CANDIDATOS$.
Resposta:

$$
\begin{array}{l}
\{(Aecio, Aecio), (Aecio, Dilma), (Aecio, Eduardo), \\
(Dilma, Aecio), (Dilma, Dilma), (Dilma, Eduardo), \\
(Eduardo, Aecio), (Eduardo, Dilma), (Eduardo, Eduardo)\}
\end{array}
$$

b) $\{0,4\ pt\}$ Quantos elementos tem o conjunto $\mathcal{P}(CANDIDATOS \times CANDIDATOS)$? Não precisa listar os elementos (pode listar em um rascunho se quiser, mas não é preciso). Lembre-se: $\mathcal{P}(A)$ é o conjunto das partes de A.
Resposta:
2^9 elementos $= 512$ elementos.

c)$\{0,4\ pt\}$ Liste os elementos do conjunto

$$\{\{x,y\} \mid (x \in CANDIDATOS)\ \wedge\ (y \in CANDIDATOS) \wedge (x \neq y)\}.$$

Resposta: $\{\{Aecio, Dilma\}, \{Aecio, Eduardo\}, \{Eduardo, Dilma\}\}$

d)$\{0,4\ pt\}$ Liste os elementos de

$$\{(x,y) \mid (x \in CANDIDATOS)\ \wedge\ (y \in CANDIDATOS) \wedge (x \neq y)\}.$$

Resposta:

$$\begin{array}{l}\{(Aecio, Dilma), (Aecio, Eduardo), (Eduardo, Dilma),\\ (Dilma, Aecio), (Eduardo, Aecio), (Dilma, Eduardo)\}\end{array}$$

e)$\{0,4\ pt\}$ Dados os conjuntos

$$\begin{array}{l}A = CANDIDATOS \times CANDIDATOS\\ B = \{\{x,y\} \mid (x \in CANDIDATOS)\ \wedge\ (y \in CANDIDATOS) \wedge (x \neq y)\}\\ C = \{(x,y)\ \mid (x \in CANDIDATOS)\ \wedge\ (y \in CANDIDATOS) \wedge (x \neq y)\}\end{array}$$

Qual deles melhor captura o conjunto das possíveis disputas no segundo turno das eleições presidenciais de 2014? Justifique sua resposta em, no máximo, 4 linhas.

Resposta:

Conjunto B. O conjunto A contém muitos pares como $(Aecio, Aecio)$ que não fazem sentido e o conjunto C contém disputas duplicadas como $(Aecio, Dilma)$ e $(Dilma, Aecio)$, que também não fazem sentido. O conjunto B não tem esses problemas.

49. $\{0,8\ pt\}$ Prove que

$$(A \subset B)\ \equiv\ (\neg(\forall x(x \in A\ \rightarrow\ x \in B)\ \rightarrow\ \forall x(x \notin B\ \vee\ x \in A))).$$

Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

$$\begin{array}{lr}A \subset B & \\ \equiv \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \exists x(x \in B \wedge x \notin A) & [51]\\ \equiv \neg(\forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \rightarrow \neg\exists x(x \in B \wedge x \notin A)) & [25]\\ \equiv \neg(\forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \rightarrow \forall x\neg(x \in B \wedge x \notin A)) & [35]\\ \equiv \neg(\forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \rightarrow \forall x(\neg(x \in B) \vee \neg(x \notin A))) & [16]\\ \equiv \neg(\forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \rightarrow \forall x(x \notin B \vee \neg\neg(x \in A))) & [46,46]\\ \equiv \neg(\forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \rightarrow \forall x(x \notin B \vee x \in A)) & [9]\end{array}$$

50. $\{0,4\ pt\}$ Seja $A = \{a,b,c,d\}$. Calcule $\mathcal{P}(A)$, o conjunto das partes de A.

Resposta:

$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\},$
$\{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$

51. $\{2,0\ pt\}$ Dadas as premissas $a \geq 10$ e $a \leq 100$, conclua que

$$a \in \{x \mid ((x \geq 10)\ \vee (x = 0)) \wedge\ ((x \leq 100) \vee (x = 0))\}.$$

Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
Resposta:

1. $a \geq 10$ [Premissa]
2. $a \leq 100$ [Premissa]
3. $a \geq 10 \wedge a \leq 100$ [43 em 1 e 2]
4. $(a = 0) \vee (a \geq 10 \wedge a \leq 100)$ [41 em 4]
5. $((a = 0) \vee (a \geq 10)) \wedge ((a = 0) \vee (a \leq 100))$ [14 em 4]
6. $((a \geq 10) \vee (a = 0)) \wedge ((a = 0) \vee (a \leq 100))$ [10 em 5]
7. $((a \geq 10) \vee (a = 0)) \wedge ((a \leq 100) \vee (a = 0))$ [10 em 6]
8. $a \in \{x \mid ((x \geq 10)\ \vee (x = 0)) \wedge\ ((x \leq 100) \vee (x = 0))\}$ [48 em 8]

52. $\{2,0\ pt\}$ Seja *CONVOCADOS* o conjunto com os 23 jogadores brasileiros convocados para a Copa do Mundo. Qual equação abaixo melhor define os 11 jogadores titulares que jogarão na estreia da Copa? Justifique sua resposta escolhida e também porque as alternativas não escolhidas são inadequadas.

- $\mathit{TITULARES}_1 = \mathit{CONVOCADOS} \times \mathit{CONVOCADOS}$
- $\mathit{TITULARES}_2 \subseteq \mathcal{P}(\mathit{CONVOCADOS})$
- $\mathit{TITULARES}_3 = \{x \mid x \in \mathit{CONVOCADOS}\}$
- $\mathit{TITULARES}_4 \in \mathcal{P}(\mathit{CONVOCADOS})$
- $\mathit{TITULARES}_5 = \mathcal{P}(\mathit{CONVOCADOS})$

Lembre-se: $\mathcal{P}(X)$ é o conjunto das partes de X.
Resposta:

- $\mathit{TITULARES}_1$: inadequado porque produz pares entre os convocados.
- $\mathit{TITULARES}_2$: inadequado porque titulares é um conjunto de conjunto de jogadores.
- $\mathit{TITULARES}_3$: inadequado porque titulares é o mesmo conjunto de convocados.
- $\mathit{TITULARES}_4$: correto porque titulares é um subconjunto de convocados.
- $\mathit{TITULARES}_5$: inadequado porque titulares não é o conjunto de todos os subjconjuntos dos convocados.

53. $\{3,3\ pt\}$ Dadas as premissas $x \in (A \cap B)$ e $x \notin (A \cap C)$, prove que $x \in (A - C)$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

1. $x \in (A \cap B)$	[Premissa]
2. $x \notin (A \cap C)$	[Premissa]
3. $x \in A \ \wedge \ x \in C$	[60 em 1]
4. $x \in A$	[42 em 3]
5. $\neg\neg(x \in A)$	[9 em 4]
6. $\neg(x \in A \cap C)$	[46 em 2]
7. $\neg(x \in A \ \wedge \ x \in C)$	[60 em 6]
8. $\neg(x \in A) \ \vee \ \neg(x \in C)$	[16 em 7]
9. $\neg(x \in C)$	[40 em 5 e 8]
10. $x \notin C$	[46 em 9]
11. $(x \in A) \ \wedge \ (x \notin C)$	[43 em 4 e 10]
12. $x \in A - C$	[63 em 11]

2.2 Funções

1. Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & se\ x \leq -1 \\ x^2, & se\ -1 < x \leq 1 \\ x, & se\ x > 1 \end{cases}$$

Analise cada proposição abaixo. Se for verdadeira, justifique. Se for falsa, mostre um contra-exemplo.

a) $\{0,2\ pt\}$ A função é injetora no domínio dos reais no intervalo $[-1,1]$ e contra-domínio $\mathbb{R}$.
Resposta: Falso. Para $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$, $f(1) = f(-1) = 1$.

b) $\{0,2\ pt\}$ A função é injetora no domínio $\mathbb{R}$ e contra-domínio $\mathbb{R}$.
Resposta: Falso. Mesmo argumento anterior.

c) $\{0,2\ pt\}$ A função é sobrejetiva no domínio dos reais no intervalo $[1,+\infty)$ e contra-domínio $\mathbb{R}$.
Resposta: Falso. Não existe nenhum x mapeado a $y = -10$.

d) $\{0,2\ pt\}$ A função não possui inversa no domínio $\mathbb{R}$ e contra-domínio $\mathbb{R}$.
Resposta: Verdadeiro. Para ter inversa, a função tem que ser injetora. A letra b) mostra que não é injetora.

2. $\{1,0\ pt\}$ Seja A o conjunto dos assentos em um teatro. Seja C o conjunto dos clientes que *compraram* um ingresso. Gostaríamos de fazer um sistema que só vendesse ingressos com lugar marcado. Antes de fazermos um programa, devemos modelar o problema matematicamente. Descreva os problemas (se houver) de modelarmos a *marcação de lugares para uma peça* como:

a) Uma relação (sem ser função) entre C e A.
Resposta: Permite um cliente em n assentos e um assento marcado para m clientes.

b) Uma função de C para A.
Resposta: Permite n clientes para 1 assento.

c) Uma função injetora de C para A.
Resposta: Não há problemas.

d) Uma função sobrejetora de C para A.
Resposta: Permite n clientes para 1 assento e só modela casa cheia.

e) Uma função bijetora de C para A.
Resposta: Todos assentos marcados: só modela casa cheia.

Qual dos modelos acima é o mais adequado?
Resposta: letra c.

3. $\{1,0\ pt\}$ Sejam $g : A \to B$ e $f : B \to C$. Faça um desenho similar ao da Figura 1 retratando f e g de tal maneira que f **não** seja injetiva, mas tanto g quanto $(f \circ g)$ sejam injetivas.

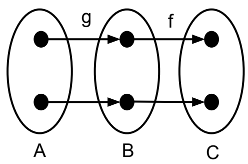


Figura 1: Exemplo de resposta.

Resposta: Veja a Figura 2.

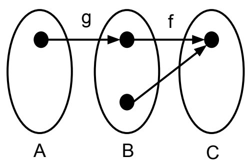


Figura 2: Resposta.

4. Seja h uma função com domínio em R. Defina o conjunto imagem para:

   a) $\{1,0\ pt\}$ $h(x) = \lfloor \lceil x \rceil \rfloor$. **Resposta:** Z

   b) $\{1,0\ pt\}$ $h(x) = \lfloor x \rfloor + \lceil -x \rceil$. **Resposta:** $\{0\}$

5. Sejam h e h' duas funções com domínio em R.

   (a) $\{1,0\ pt\}$ Se $h(x) = \lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor$, qual o conjunto imagem de h?
   Resposta: $\{0,1\}$

   (b) $\{1,0\ pt\}$ Se $h'(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$, qual o conjunto imagem de h'?
   Resposta: $\{0,-1\}$

6. A função que calcula o *valor absoluto* ou o *módulo* de x, $f(x) = |x|$, é definida para um domínio dos reais e contra-domínio dos reais. Defina um novo domínio e um novo contra-domínio de forma que:

   a) $\{0,5\ pt\}$ f seja injetiva mas não seja sobrejetiva;
   Resposta: Domínio=R^+, Contra-domínio=R.

b) $\{0,5\ pt\}$ f seja sobrejetiva mas não seja injetiva;
Resposta: Domínio=R, Contra-domínio=R^+.

c) $\{0,5\ pt\}$ f possua inversa.
Resposta: Domínio=R^+, Contra-domínio=R^+.

7. Desenhe o gráfico de:

a) $\{0,5\ pt\}$ $\lfloor x \rfloor$
Resposta: x

b) $\{0,5\ pt\}$ $\lceil \lfloor x \rfloor \rceil$
Resposta: x

b) $\{0,5\ pt\}$ $\lfloor 2x \rfloor$
Resposta: x

8. Sobre funções.

a)$\{1,0\ pt\}$ Sejam $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{a,b,c,d,e\}$. Defina uma função f_1 que seja **injetiva** mas **não seja sobrejetiva** de A para B.
Resposta: $f_1 = \{(1,a),(2,b),(3,c)\}$.

b)$\{1,0\ pt\}$ Sejam $C = \{1,2,3,4\}$ e $D = \{a,b,c,d\}$. Defina uma função f_2 que **não seja sobrejetiva** e **não seja injetiva** de C para D.
Resposta: $f_2 = \{(1,a),(2,a),(3,c),(4,c)\}$.

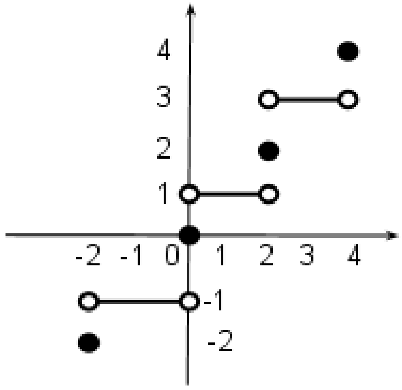
c)$\{1,0\ pt\}$ Sejam $E = \{1,2,3\}$ e $F = \{a,b,c\}$. Defina uma função f_3 que **tenha inversa** de E para F.
Resposta: $f_3 = \{(1,a),(2,b),(3,c)\}$.

Obs. "Defina uma função" significa "liste os pares". Por exemplo, $\{(1,a),(2,d),(3,a)\}$ é uma definição de função de A para B.

9. Desenhe o gráfico das funções abaixo e diga se elas são "injetivas", "sobrejetivas", "bijetivas" ou "nenhuma delas". Não precisa provar um teorema sobre isto. Basta apenas dizer o que a função é baseado no gráfico. A palavra "gráfico" aqui tem o mesmo significado de gráfico em Cálculo: uma curva ou reta no plano xy. Faça seu gráfico com o eixo x no intervalo de -2 a $+4$.

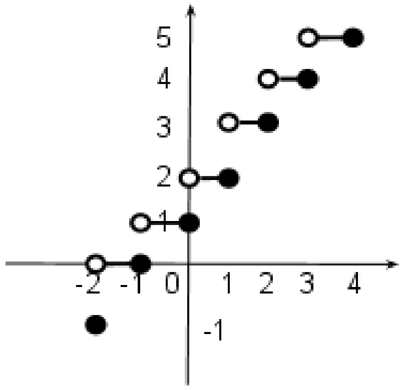
a) $\{0,5\ pt\}$ $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor + \lceil x/2 \rceil$, onde f tem domínio real e contra-domínio **real**.

Resposta: Nenhuma delas. Gráfico:



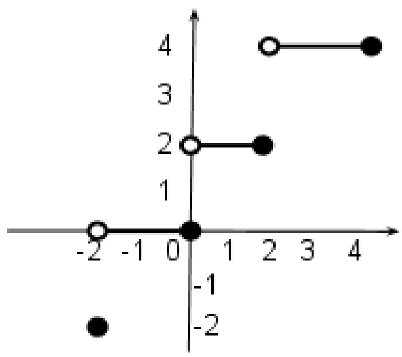
b) $\{0,5\ pt\}$ $g(x) = \lceil x \rceil + 1$, onde g tem domínio real e contra-domínio **inteiro**.

Resposta: Sobrejetiva. Gráfico:

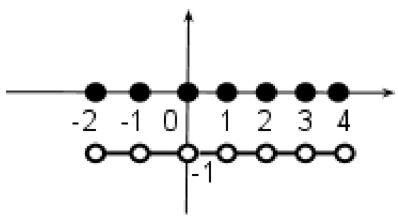


10. Desenhe o gráfico das funções abaixo e diga se elas são "injetivas", "sobrejetivas", "bijetivas" ou "nenhuma delas". Não precisa provar um teorema sobre isto. Basta apenas dizer o que a função é baseado no gráfico. A palavra "gráfico" aqui tem o mesmo significado de gráfico em Cálculo: uma curva ou reta no plano xy. Faça seu gráfico com o eixo x no intervalo de -2 a $+4$.

a) $\{0,5\ pt\}$ $f(x) = 2 \cdot \lceil x/2 \rceil$, onde f tem domínio real e contra-domínio **inteiro**.
Resposta: Nenhuma delas. Gráfico:



b) $\{0,5\ pt\}$ $f(x) = \lfloor x \rfloor - \lceil x \rceil$, onde f tem domínio real e contra-domínio $\mathbf{\{0, -1\}}$.
Resposta: Sobrejetiva. Gráfico:



11. Responda, para cada letra abaixo, se temos uma "relação", "função", "função injetiva", "função sobrejetiva", ou "função bijetiva".

a) $\{0,25\ pt\}$ Sejam A o conjunto dos carros de **Recife** e B o conjunto das placas dos carros do **Brasil**. Sejam $a \in A$ e $b \in B$. $f_1(a) = b$ se, e

somente se, o carro a tem a placa b.
Resposta: Função injetiva.

b) $\{0,25\ pt\}$ Sejam A o conjunto dos atores que já atuaram em pelo menos um filme e B o conjunto das filmes. Sejam $a \in A$ e $b \in B$. $f_2(a) = b$ se, e somente se, o ator a atuou no filme b.
Resposta: Relação.

c) $\{0,25\ pt\}$ Sejam A o conjunto dos alunos de EC e B o conjunto das idades dos alunos de EC. Sejam $a \in A$ e $b \in B$. $f_3(a) = b$ se, e somente se, o aluno a tem a idade b.
Resposta: Função sobrejetiva.

d) $\{0,25\ pt\}$ Sejam A o conjunto dos inteiros e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Sejam $a \in A$ e $b \in B$. $f_4(a) = b$ se, e somente se, $\lceil(a \textbf{ mod } 5)\rceil = b$.
Resposta: Função.

12. Responda, para cada letra abaixo, se temos uma "relação", "função", "função injetiva", "função sobrejetiva", ou "função bijetiva".

a) $\{0,25\ pt\}$ Sejam A o conjunto dos atletas e B o conjunto das medalhas de ouro olímpicas. Sejam $a \in A$ e $b \in B$. $f_1(a) = b$ se, e somente se, o atleta a ganhou a medalha b.
Resposta: Relação.

b) $\{0,25\ pt\}$ Sejam A o conjunto das contas correntes e B o conjunto dos reais. Sejam $a \in A$ e $b \in B$. $f_2(a) = b$ se, e somente se, o saldo de a é b.
Resposta: Função.

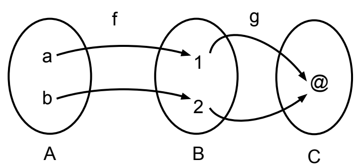
c) $\{0,25\ pt\}$ Sejam A o conjunto dos celulares de 1 chip e B o conjunto das operadoras de celulares. Sejam $a \in A$ e $b \in B$. $f_3(a) = b$ se, e somente se, o celular a utiliza a operadora b.
Resposta: Função sobrejetiva.

d) $\{0,25\ pt\}$ Sejam A o conjunto dos reais e B o conjunto dos inteiros. Sejam $a \in A$ e $b \in B$. $f_4(a) = b$ se, e somente se, $\lfloor a \rfloor = b$.
Resposta: Função sobrejetiva.

13. $\{0,25\ pt\}$ Seja $A = \{x \in R \mid 0 \leq x \leq 5\}$. Seja f uma função cujo o domíno é A e o contra-domínio é R. O mapeamento de f é definido por $f(x) = (\lfloor x \rfloor + \lceil x \rceil)/2$. Qual o conjunto imagem de f?
Resposta: $\{0,\ 0,5,\ 1,\ 1,5,\ 2,\ 2,5,\ 3,\ 3,5,\ 4,\ 4,5,\ 5\}$

14. $\{0,25\ pt\}$ Seja $A = \{x \in Z \mid x \geq 0\ \wedge\ x \equiv 0\ (mod\ 2)\}$. Seja g uma função com domínio A e contradomínio Z cujo mapeamento é $g(x) = \lfloor\lceil(x + 0,5)\rceil\rfloor$. Qual o conjunto imagem de g?
Resposta: $\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$

15. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções definidas na figura abaixo.



a)$\{0,25\ pt\}$ Qual o resultado de $((g \circ \iota_B^{-1}) \circ f)(b)$, onde ι_B^{-1} é a inversa da função identidade de B? Apenas responda. Não precisa justificar. **Resposta:** @

b)$\{0,25\ pt\}$ $(g \circ f)$ é injetiva? Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas usando a analogia dos casais. **Resposta:** Não. Para ser injetiva, todos elementos de C têm que ser fiéis ou solteiros e @ viola esta condição.

c)$\{0,25\ pt\}$ $(g \circ f)$ é sobrejetiva? Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas usando a analogia dos casais. **Resposta:** Sim. Para ser sobrejetiva, não pode haver solteiros solteiros em C, o que é verdade, pois o único elemento é @ que está relacionado em $(g \circ f)$.

d)$\{0,25\ pt\}$ f possui inversa? Apenas responda. Não precisa justificar. **Resposta:** Sim.

e)$\{0,25\ pt\}$ g possui inversa? Apenas responda. Não precisa justificar. **Resposta:** Não.

f)$\{0,25\ pt\}$ $(g \circ f)$ possui inversa? Apenas responda. Não precisa justificar. **Resposta:** Não.

16. $\{2,0\ pt\}$ Prove que $((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ (g \circ h))(x)$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo, além da equação [100] abaixo dada de graça.

$$(R \circ S)(y) = R(S(y)) \quad [100]$$

A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova. **Dica**: p nas equações em anexo pode ser "qualquer coisa". Da mesma forma, R, S e y na equação [100] acima também podem ser "qualquer coisa".

Resposta:

$$\begin{array}{ll} ((f \circ g) \circ h)(x) & \\ = (f \circ g)(h(x)) & [100] \\ = f(g(h(x))) & [100] \\ = f((g \circ h)(x)) & [100] \\ = (f \circ (g \circ h))(x) & [100] \end{array}$$

17. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ e $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, onde $f(x) = \lceil x \rceil$ e $g(x) = \lceil x \rceil$.

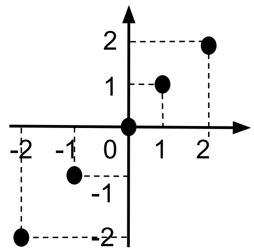
a)$\{0,25\ pt\}$ $f(x)$ é injetiva? Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas usando a analogia dos casais.
Resposta: Não. O contra-domínio possui elementos que não são fiéis. Por exemplo, 3 está ligado ao 3,14 e ao 3,15.

b)$\{0,25\ pt\}$ $g(x)$ é injetiva? Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas usando a analogia dos casais.
Resposta: Sim. Não há solteiros nem infiéis no contra-domínio.

c)$\{0,25\ pt\}$ $g(x) = \iota_{\mathbb{Z}}(x)$, onde ι_Z é a função identidade de $\mathbb{Z}$? Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas.
Resposta: Sim. Como todos elementos do domínio são inteiros, eles são mapeados neles mesmos, pois o teto de um número inteiro é o próprio número.

d)$\{0,25\ pt\}$ Desenhe o gráfico de $g(x)$ no plano cartesiano com os eixos x e y variando de -2 a $+2$.

Resposta:



18. $\{2,0\ pt\}$ Prove que se $\lfloor x \rfloor \neq x$, então $\lfloor x \rfloor \neq \lceil x \rceil$. Ou seja, dadas as premissas $\neg(\lfloor x \rfloor = x)$, $\lfloor x \rfloor \leq x$, $x \leq \lceil x \rceil$, $((\lfloor x \rfloor < x) \ \wedge \ (x \leq \lceil x \rceil)) \ \rightarrow \ (\lfloor x \rfloor \neq \lceil x \rceil)$ e $(\lfloor x \rfloor \leq x) \rightarrow ((\lfloor x \rfloor < x) \ \vee (\lfloor x \rfloor = x))$, conclua que $\lfloor x \rfloor \neq \lceil x \rceil$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

1. $\neg(\lfloor x \rfloor = x)$	[Premissa]
2. $\lfloor x \rfloor \leq x$	[Premissa]
3. $(\lfloor x \rfloor \leq x) \rightarrow ((\lfloor x \rfloor < x) \ \vee \ (\lfloor x \rfloor = x))$	[Premissa]
4. $(\lfloor x \rfloor < x) \ \vee (\lfloor x \rfloor = x)$	[37 em 2 e 3]
5. $\lfloor x \rfloor < x$	[40 em 1 e 4]
6. $x \leq \lceil x \rceil$	[Premissa]
7. $(\lfloor x \rfloor < x) \ \wedge \ (x \leq \lceil x \rceil)$	[43 em 5 e 6]
8. $((\lfloor x \rfloor < x) \ \wedge \ (x \leq \lceil x \rceil)) \ \rightarrow \ (\lfloor x \rfloor \neq \lceil x \rceil)$	[Premissa]
9. $\lfloor x \rfloor \neq \lceil x \rceil$	[37 em 7 e 8]

19. Sejam $A = \{Dilma, Obama, Angela\}$, $B = \{Brasil, EUA, Alemanha\}$ e $C = \{Presidente, Chanceler\}$.

a)$\{0,66\ pt\}$ Seja $f : A \rightarrow B$, onde $f = \{(Dilma, Brasil), (Obama, EUA), (Angela, Alemanha)\}$. Seja $g : B \rightarrow C$, onde $g = \{(Brasil, Presidente), (EUA, Presidente), (Alemanha, Chanceler)\}$. Quais são os pares da função $(g \circ f)$?

Resposta:

$(Dilma, Presidente)$, $(Obama, Presidente)$ e $(Angela, Chanceler)$.

b)$\{0,66\ pt\}$ Calcule $(\iota_A \circ f^{-1})(EUA)$. Exiba seus cálculos.

Resposta:

$$
\begin{aligned}
&(\iota_A \circ f^{-1})(EUA) \\
&= \iota_A(f^{-1}(EUA)) \\
&= \iota_A(Obama) \\
&= Obama
\end{aligned}
$$

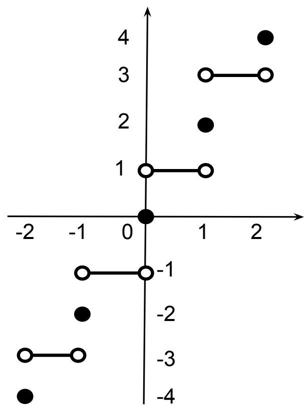
c)$\{0,68\}$ A função $(g \circ f)$ possui inversa? Justifique sua resposta em, no máximo, 4 linhas.

Resposta:
Não. $(g \circ f) = \{(Dilma, Presidente), (Obama, Presidente), (Angela, Chanceler)\}$ não é injetiva, pois Presidente está ligado a Dilma e Obama. Ou seja, não é bijetiva e, portanto, não possui inversa.

20. Desenhe os gráficos das funções abaixo nos eixos x e y no intervalo entre $-2 \leq x \leq 2$.

a)$\{0,5\ pt\}$ $f(x) = \lceil x + \lfloor x \rfloor \rceil$

Resposta:



b)$\{0,5\ pt\}$ $g(x) = \lceil x \rceil + \lfloor x \rfloor$
Resposta:
Mesmo gráfico da letra a). Lembre-se que $\lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n$ para n inteiro. Na letra a), $\lfloor x \rfloor$ é o nosso n inteiro.

21. Sejam $A = \{Roberto, Erasmo, Carlos\}$, $B = \{Cantor, Ator\}$ e $C = \{Famoso, Desconhecido\}$.

a)$\{0,66\ pt\}$ Seja $f : A \to B$, onde $f = \{(Roberto, Cantor), (Erasmo, Cantor), (Carlos, Ator)\}$. Seja $g : B \to C$, onde $g = \{(Cantor, Famoso), (Ator, Desconhecido)\}$. Quais são os pares da função $(g \circ f)$?
Resposta:
$(Roberto, Famoso)$, $(Erasmo, Famoso)$ e $(Carlos, Desconhecido)$.

b)$\{0,66\ pt\}$ Calcule $(\iota_B \circ g^{-1})(Famoso)$. Exiba seus cálculos.
Resposta:

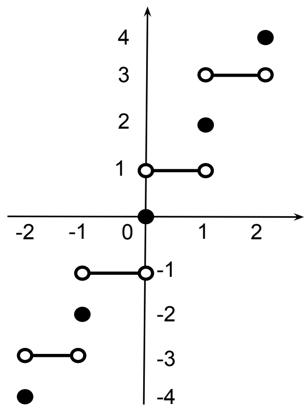
$$
\begin{aligned}
&(\iota_b \circ g^{-1})(Famoso) \\
&= \iota_B(g^{-1}(Famoso)) \\
&= \iota_B(Cantor) \\
&= Cantor
\end{aligned}
$$

c)$\{0,68\}$ A função $(f \circ \iota_A)$ possui inversa? Justifique sua resposta em, no máximo, 4 linhas.
Resposta:
Não. $(f \circ \iota_A) = \{(Roberto, Cantor), (Erasmo, Cantor), (Carlos, Ator)\}$ não é injetiva, pois Cantor está ligado a Roberto e Erasmo. Ou seja, não é bijetiva e, portanto, não possui inversa.

22. Desenhe os gráficos das funções abaixo nos eixos x e y no intervalo entre $-2 \leq x \leq 2$.

a)$\{0,5\ pt\}$ $f(x) = \lfloor x + \lceil x \rceil \rfloor$

Resposta:



b)$\{0,5\ pt\}$ $g(x) = \lfloor x \rfloor + \lceil x \rceil$

Resposta:

Mesmo gráfico da letra a). Lembre-se que $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$ para n inteiro. Na letra a), $\lceil x \rceil$ é o nosso n inteiro.

23. Classifique como relação, função, função injetiva, função sobrejetiva ou função bijetiva e justifique sua resposta em, no máximo, 3 linhas.

a) $\{0,25\ pt\}$ Seja A_1 o conjunto de CNPJs do Brasil. Seja B_1 o conjunto de empresas no Brasil. Assuma que não há CNPJs ou empresas em situação irregular. Sejam $a_1 \in A_1$ e $b_1 \in B_1$. $f_1(a_1) = b_1$ se, e somente se, a_1 é o CNPJ de b_1.

Resposta: Função bijetiva. Cada CNPJ pertence a exatamente 1 empresa e cada empresa possui exatamente 1 CNPJ.

b) $\{0,25\ pt\}$ Seja A_2 o conjunto de CNPJs do Brasil. Seja B_2 o conjunto de empresas no Brasil. Assuma que é possível haver CNPJs e empresas em situações irregulares. Sejam $a_2 \in A_2$ e $b_2 \in B_2$. $f_2(a_2) = b_2$ se, e somente se, a_2 é o CNPJ de b_2.

Resposta: Relação. Pode haver CNPJs sem empresa e vice-versa.

c) $\{0,25\ pt\}$ Seja A_3 o conjunto de todas as mulheres. Seja B_3 o conjunto de todos os homens. Seja C_3 o conjunto $A_3 \times B_3$. Sejam $p_3 \in (A_3 \cup B_3)$ e $c_3 \in C_3$. $f_3(p_3) = c_3$ se, e somente se, p_3 é o(a) filho(a) biológico(a) de c_3.

Resposta: Função. Toda pessoa tem pais. Não é injetiva porque alguns pais têm mais de um filho e não é sobrejetiva porque alguns pares de pessoas não têm filho.

d) $\{0,25\ pt\}$ Seja A_4 o conjunto de todos os títulos de livros da língua portuguesa. Seja B_4 o conjunto de todas as palavras da língua portuguesa. Seja C_4 o conjunto das partes de B_4. Sejam $a_4 \in A_4$ e $c_4 \in C_4$. $f_4(a_4) = c_4$ se, e somente se, c_4 contém todas as palavras usadas no livro a_4. Assuma que nenhum livro contém o mesmo conjunto de palavras de outro livro.

Resposta: Função injetiva. Cada livro tem exatamente 1 conjunto de palavras e nenhum livro compartilha o mesmo conjunto de palavras. Não é sobrejetiva porque alguns conjuntos de palavras não são pertencem a nenhum livro.

24. Classifique como relação, função, função injetiva, função sobrejetiva ou função bijetiva e justifique sua resposta em, no máximo, 3 linhas.

    a) $\{0,25\ pt\}$ Seja A_1 o conjunto contendo todas as lojas do Shopping Center Recife. Seja B_1 o conjunto contendo todas as lojas do Shopping Rio Mar. Assuma que $(A_1 - B_1) \neq \emptyset$. Sejam $a_1 \in A_1$ e $b_1 \in B_1$. $f_1(a_1) = b_1$ se, e somente se, a loja $a_1 = b_1$.
    Resposta: Relação. Como $(A_1 - B_1) \neq \emptyset$, algumas lojas do conjunto A_1 estão sem conexão (estão solteiras) com lojas de B_1.

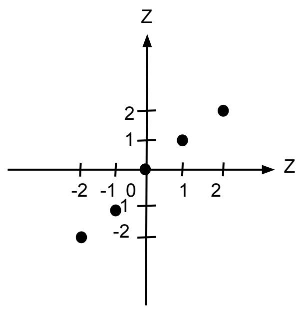
    b) $\{0,25\ pt\}$ Seja A_2 o conjunto contendo todos os cantores do Brasil. Seja B_2 o conjunto contendo todas as músicas existentes. Seja C_2 o conjunto das partes de B_2. Sejam $a_2 \in A_2$ e $c_2 \in C_2$. $f_2(a_2) = c_2$ se, e somente se, a_2 já cantou antes as músicas contidas em c_2.
    Resposta: Função. Todo cantor a_1 cantou algum conjunto de músicas c_2. Não é injetiva porque 2 ou mais cantores podem ter cantado o mesmo conjunto de músicas e não é sobrejetiva porque algum conjunto de músicas pode não ter sido cantado por nenhum cantor.

    c) $\{0,25\ pt\}$ Sejam $A_3 = \mathbb{Z}$ e $B_3 = \mathbb{Z}$. Sejam $a_3 \in A_3$ e $b_3 \in B_3$. $f_3(a_3) = b_3$ se, e somente se, $b_3 = \lfloor a_3 \rfloor$.
    Resposta: Função bijetiva. Como o chão de um número inteiro é ele mesmo, f_3 é a função identidade.

    d) $\{0,25\ pt\}$ Sejam $A_4 = \mathbb{R}$ e $B_4 = \{x \mid (x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \leq x < 1)\}$. Sejam $a_4 \in A_4$ e $b_4 \in B_4$. $f_4(a_4) = b_4$ se, e somente se, $b_4 = a_4 - \lfloor a_4 \rfloor$.
    Resposta: Função sobrejetiva. f_4 mapeia números reais em números de 0 a 1.

25. $\{1,0\ pt\}$ Seja $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ a função $f_1(x) = \lfloor x \rfloor$. Desenhe o gráfico de f_1 no eixo cartesiano (basta desenhar no intervalo do domínio $[-2,+2]$).
    Resposta:
    http://www.wolframalpha.com/input/?i=floor(x)

26. $\{1,0\ pt\}$ Seja $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ a função $f_2(x) = \lfloor x \rfloor$. Desenhe o gráfico de f_2 no eixo cartesiano (basta desenhar no intervalo do domínio $[-2,+2]$).
    Resposta:



27. Classifique as funções abaixo como função, função injetiva, função sobrejetiva ou função bijetiva. Justifique sua resposta em, no máximo, 3 linhas.

a)$\{0, 8\}$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $f(x) = x^2$

Resposta:

Função. Não é injetiva porque $x = 2$ e $x = -2$ são mapeadas em 4. E não é sobrejetiva porque $y = -2$ não está mapeada por nenhum x.

b)$\{0, 8\}$ $f : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$, onde $f(x) = x^2$.

O conjunto $(\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$ é o conjunto dos números reais contendo o zero e os números reais positivos.

Resposta:

Função sobrejetiva. Não é injetiva porque $x = 2$ e $x = -2$ são mapeadas em 4. Mas, é sobrejetiva porque todo o contradomínio está mapeado.

c)$\{0, 8\}$ $f : (\mathbb{R}^+ \cup \{0\}) \to \mathbb{R}$, onde $f(x) = x^2$.

Resposta:

Função injetiva. Cada x está mapeado a um y diferente e não é sobrejetiva porque $y = -2$ não está mapeado.

d)$\{0, 9\}$ $f : (\mathbb{R}^+ \cup \{0\}) \to (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$, onde $f(x) = x^2$.

Resposta:

Função bijetiva. Cada x está mapeado a um y diferente e todo y está mapeado.

28. Classifique as funções abaixo como função, função injetiva, função sobrejetiva ou função bijetiva. Justifique sua resposta em, no máximo, 3 linhas.

a)$\{0, 5\}$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $f(x) = x^2$

Resposta:

Função. Não é injetiva porque $x = 2$ e $x = -2$ são mapeadas em 4. E não é sobrejetiva porque $y = -2$ não está mapeada por nenhum x.

b)$\{0,5\}$ $f : \mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$, onde $f(x) = x^2$.
O conjunto $(\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$ é o conjunto dos números reais contendo o zero e os números reais positivos.
Resposta:
Função sobrejetiva. Não é injetiva porque $x = 2$ e $x = -2$ são mapeadas em 4. Mas, é sobrejetiva porque todo o contradomínio está mapeado.

c)$\{0,5\}$ $f : (\mathbb{R}^+ \cup \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$, onde $f(x) = x^2$.
Resposta:
Função injetiva. Cada x está mapeado a um y diferente e não é sobrejetiva porque $y = -2$ não está mapeado.

d)$\{0,5\}$ $f : (\mathbb{R}^+ \cup \{0\}) \rightarrow (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$, onde $f(x) = x^2$.
Resposta:
Função bijetiva. Cada x está mapeado a um y diferente e todo y está mapeado.

3 Fundamentos: Algoritmos, Inteiros e Matrizes

3.1 Algoritmos

1. Qual o big-O de:

   a) $\{0,25\ pt\}$ $a(n) = (n + 3n^3 + 8n^2) + (63n(log\ n) + 5)$ **Resposta:** n^3

   b) $\{0,25\ pt\}$ $b(n) = (n + 153)(log\ n)(\sqrt{3} + 8)$ **Resposta:** $n(log\ n)$

   c) $\{0,25\ pt\}$ $c(n) = (132n^7 + 363n^{11} + 5) + (53 \cdot 2^n + 23n!)$ **Resposta:** $n!$

   d) $\{0,25\ pt\}$ $d(n) = 35n + 9324n(log\ n) + 634n^2$ **Resposta:** n^2

   e) $\{0,25\ pt\}$ $e(n) = (4n(log\ n)) + (8log\ n) + n$ **Resposta:** $n(log\ n)$

   f) $\{0,25\ pt\}$ $f(n) = (36log\ n) + (2^{35}n + 54n) + (642 + 3n + 5n^2 + 11n^3)$
   Resposta: n^3

2. $\{0,25\ pt\}$ Ponha as funções acima em ordem de complexidade. Escreva sua resposta da seguinte forma: "$\{c, e\}$ melhor que $\{a, d, f\}$ melhor que $\{b\}$" (isto é um **exemplo**).
   Esta resposta **exemplo** significa que $c(n)$ e $e(n)$ são equivalentes e ambos são melhores que $a(n)$, $d(n)$ e $f(n)$, que, por sua vez, são equivalentes entre si e melhores que $b(n)$.

   Resposta: $\{b, e\}$ melhor que $\{d\}$ melhor que $\{a, f\}$ melhor que $\{c\}$

3. Encontre funções $f'(n)$, $g'(n)$, $h'(n)$ e $k'(n)$ que são big-Θ de $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$ e $k(n)$, respectivamente.

   a) $\{0,2\ pt\}$ $f(n) = 5n + (log\ n)$ **Resposta:** $f'(n) = n$

   b) $\{0,2\ pt\}$ $g(n) = 10n^3 + 5n^7 + 400$ **Resposta:** $g'(n) = n^7$

   c) $\{0,2\ pt\}$ $h(n) = (5 + 80n^3)(n^2 + 3)$ **Resposta:** $h'(n) = n^5$

   d) $\{0,2\ pt\}$ $k(n) = 10 \cdot 2^n + 5000$ **Resposta:** $k'(n) = 2^n$

4. Encontre funções $f'(n)$, $g'(n)$, $h'(n)$ e $k'(n)$ que são big-O de $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$ e $k(n)$, respectivamente.

   a) $\{0,5\ pt\}$ $f(n) = (100 + 92n)(10 + log\ n)$
   Resposta: $f'(n) = n(log\ n)$ ou pior

   b) $\{0,5\ pt\}$ $g(n) = n^2 + 200n^8 + 510n^{13} + 5n^7 + 400n$
   Resposta: $g'(n) = n^{13}$ ou pior

   c) $\{0,5\ pt\}$ $h(n) = n(log\ n) + 5n! + 80n^3$
   Resposta: $h'(n) = n!$ ou pior

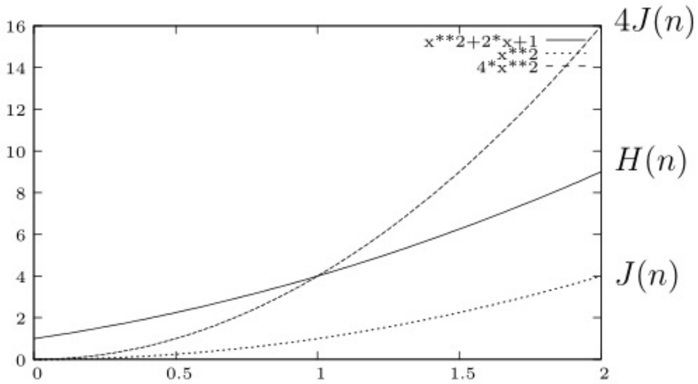
   d) $\{0,5\ pt\}$ $k(n) = n^{18} + 2^n + 5000$
   Resposta: $k'(n) = 2^n$ ou pior

5. Sejam $H(n) = n^2 + 2n + 1$ e $J(n) = n^2$ (veja a figura abaixo).

   a)$\{0,5\ pt\}$ Defina valores para k e C tal que $H(n)$ seja $O(J(n))$. Justifique sua resposta.
   Resposta: $k = 1,5$ e $C = 4$. Justificativa: para todo $x > 1,5$ o gráfico de $H(n)$ está sempre abaixo de $4J(n)$.

   b)$\{0,5\ pt\}$ Defina valores para k e C tal que $J(n)$ seja $O(H(n))$. Justifique sua resposta.
   Resposta: $k = 1,5$ e $C = 1$. Justificativa: para todo $x > 1,5$ o gráfico de $J(n)$ está sempre abaixo de $1H(n)$.

   "Defina valores" significa dar valores numéricos. Por exemplo: "$k = -5,3$ e $C = 5283$".



6. Calcule o big-O de

   a)$\{0,25\ pt\}$ $(n^2 + 3n + 10)(5n^3 + 2n^{10})(n^3 \cdot n^{10})$
   Resposta: n^{25}

   b)$\{0,25\ pt\}$ $(5 + 3)(log\ n)(n + 34 + 4n)$
   Resposta: $n(log\ n)$

   c)$\{0,25\ pt\}$ $2^n + (n(log\ n)) + (n^3 + 3n^2 + 2)$
   Resposta: 2^n

   d)$\{0,25\ pt\}$ $(n + (3n + 4) + (5n))(n^2 + n)$
   Resposta: n^3

7. Sejam $f(n) = n^3n^2 + n(log\ n)$ e $g(n) = (8 + 4)(2^n)$.

a) $\{0,25\ pt\}$ Defina uma função que seja big-Θ de $f(n)$.
Resposta: n^5

b) $\{0,25\ pt\}$ Defina uma função $h(n)$ que seja big-O de $f(n)$, mas não seja big-Θ de $f(n)$.
Resposta: Qualquer função estritamente melhor que n^5 (não empatado com n^5). Por exemplo, n^4, n^3, n^2, etc.

c) $\{0,25\ pt\}$ Defina uma função que seja big-Θ de $g(n)$.
Resposta: 2^n

d) $\{0,25\ pt\}$ Defina uma função $k(n)$ que seja big-O de $g(n)$, mas não seja big-Θ de $g(n)$.
Resposta: Qualquer função estritamente melhor que 2^n (mas não empatado com 2^n). Por exemplo, n^{1000}, n^3, n^2, etc.

8. Sejam $f(n) = n^4 n^3 n^2 n$ e $g(n) = n(1 + (log\ n))$.

a) $\{0,25\ pt\}$ Defina uma função que seja big-Θ de $f(n)$.
Resposta: n^{10}

b) $\{0,25\ pt\}$ Defina uma função $h(n)$ que seja big-O de $f(n)$, mas não seja big-Θ de $f(n)$.
Resposta: Qualquer função estritamente melhor que n^{10} (não empatado com n^{10}). Por exemplo, n^9, n^8, n^7, n^6, etc.

c) $\{0,25\ pt\}$ Defina uma função que seja big-Θ de $g(n)$.
Resposta: $n(log\ n)$

d) $\{0,25\ pt\}$ Defina uma função $k(n)$ que seja big-O de $g(n)$, mas não seja big-Θ de $g(n)$.
Resposta: Qualquer função estritamente melhor que $n(log\ n)$ (mas não empatado com $n(log\ n)$). Por exemplo, n, $n + 3$, 4, etc.

9. As funções $H(n)$ e $J(n)$ da Figura 3 representam as complexidades de 2 algoritmos. Assuma que as posições dos gráficos não mudam a partir de $n > 1$.

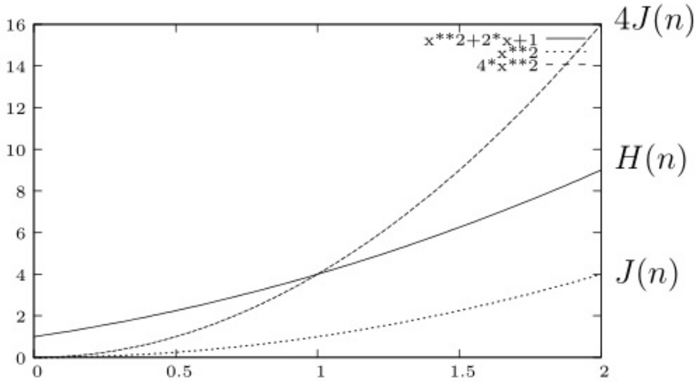


Figura 3: $J(n)$ x $H(n)$.

a) $\{0,5\ pt\}$ $J(n)$ é $O(H(n))$? Justifique sua resposta (responda em no máximo 4 linhas).

Resposta: Sim. $J(n)$ está abaixo do gráfico de $H(n)$ para $n > 1$. Ou seja, $|J(n)| \leq C|H(n)|$ para $C = 1$.

b) $\{0,5\,pt\}$ $H(n)$ é $O(J(n))$? Justifique sua resposta (responda em no máximo 4 linhas).
Resposta: Sim. $H(n)$ está abaixo do gráfico de $4J(n)$ para $n > 1$. Ou seja, $|H(n)| \leq C|J(n)|$ para $C = 4$.

10. $\{0,50\ pt\}$ Assuma que $H(n)$ é $O(J(n))$. Ou seja, existem C e k, tal que $|H(n)| \leq C|J(n)|$ para todo $n > k$. Ou seja, $H(n)$ pode ser pior que $J(n)$ por um fator constante e ainda assim será considerado $O(J(n))$. Explique o porquê disto (em no máximo 4 linhas).
Resposta: Algoritmos com um fator constante pior pode ser considerado empatado pois uma troca de hardware pode nivelar o desempenho deles.

3.2 Inteiros

1. $\{0,25\ pt\}$ Seja x_n uma sequência de números pseudo-aleatórios definida como:
$x_0 = 0$
$x_{n+1} = (4x_n + 5)\ \mathbf{mod}\ 6$.
Quantos números diferentes são gerados (contando com x_0) antes de a sequência repetir valores?

Resposta: 4. Pois, $x_0 = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$, $x_4 = 5$, ...

2. $\{0,25\ pt\}$ Encontre o mdc de 26 e 16 utilizando a técnica de fatoração.
Resposta: $(26 = 2^1 \cdot 13^1)$ e $(16 = 2^4 \cdot 13^0)$. $mdc(26,16) = 2^1 \cdot 13^0 = 2$.

3. $\{0,25\ pt\}$ Encontre o mmc de 14 e 20 utilizando a técnica de fatoração.
Resposta: $(14 = 2^1 \cdot 5^0 \cdot 7^1)$ e $(20 = 2^2 \cdot 5^1 \cdot 7^0)$. $mmc(14,20) = 2^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 140$.

4. $\{0,75\ pt\}$
Teorema 1. $(ab)^m = a^m b^m$.
Teorema 2 (Pequeno Teorema de Fermat). Se p é primo e a é inteiro não divisível por p, então $a^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p)$.

Prove que o resto da divisão de 16.777.216.000.000.000.000 por 13 é 1. Note que $4^{12} = 16.777.216$.

Resposta:

$$\begin{aligned}
&16.777.216.000.000.000.000 \\
&= 16.777.216 \cdot 1.000.000.000.000 && \text{[Aritmética]} \\
&= 4^{12} \cdot 10^{12} && \text{[Aritmética]} \\
&= (4 \cdot 10)^{12} && \text{[Teorema 1]} \\
&= 40^{12} && \text{[Aritmética] } \{0,25\ pt\}
\end{aligned}$$

Sejam $a = 40$ e $p = 13$.
Como $40 = 13 \cdot 3 + 1$, então 40 não é divisível por 13 $\{0,25\ pt\}$.
Pelo Pequeno Teorema de Fermat, $40^{13-1} \equiv 1\ (mod\ 13)$. Ou seja, o resto da divisão de 40^{12} é 1. $\{0,25\ pt\}$

5. $\{3,5\ pt\}$ Sejam a e b inteiros positivos. Prove que $ab = mdc(a,b) \cdot mmc(a,b)$. Dica: defina a e b como fatoração de primos e use as definições de mdc e mmc baseado em fatoração de primos. Caso precise, utilize o Teorema 1: $min(x,y) + max(x,y) = x + y$.

   Resposta:

   Sejam $a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n}$ *e* $b = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{b_n}$.

   $a \cdot b$

   $= (p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n}) \cdot (p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{b_n})$ [Definição a e b]

   $= p_1^{a_1+b_1} p_2^{a_2+b_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n+b_n}$ [Aritmética]

   $= p_1^{min(a_1,b_1)+max(a_1,b_1)} \cdot \ldots \cdot p_n^{min(a_n,b_n)+max(a_n,b_n)}$ [Teorema 1]

   $= (p_1^{min(a_1,b_1)} \cdot \ldots \cdot p_n^{max(a_n,b_n)}) \cdot (p_1^{max(a_1,b_1)} \cdot \ldots \cdot p_n^{max(a_n,b_n)})$ [Aritmética]

   $= mdc(a,b) \cdot mmc(a,b)$ [Def. mdc e mmc]

6. O algoritmo abaixo se propõe a imprimir os fatores primos de um número inteiro $n > 0$.

```
input: inteiro n > 0
primo := 2;
while (primo ≤ n) {
   if (n mod primo == 0) {
      print(primo);
      n := n  div primo;
      primo := 2;
   }
   else {
      primo := prox_primo(n);
   }
}
print(n);
```

   a) $\{1,0\ pt\}$ O algoritmo funciona? **Resposta:** Sim.

   b) $\{2,0\ pt\}$ Existe alguma correção ou melhoria possível? Qual? **Resposta:** Sim. Melhoria: o laço só precisa ir até $\sqrt{n}$.

7. Seja $f(n) = (n+4)$ **mod** 26 a função que encripta uma mensagem de texto considerando o alfabeto
   A=0, B=1, C=2, D=3, E=4, F=5, G=6, H=7, I=8, J=9, K=10, L=11, M=12, N=13, O=14, P=15, Q=16, R=17, S=18, T=19, U=20, V=21, W=22, X=23, Y=24, Z=25.

   a) $\{0,2\ pt\}$ Encripte a mensagem "ZEUS". Exiba os cálculos que te levam à resposta.

   Resposta:

$$f(Z) = f(25) = (25+4) \textbf{ mod } 26 = 3 = D$$
$$f(E) = f(4) = (4+4) \textbf{ mod } 26 = 8 = I$$
$$f(U) = f(20) = (20+4) \textbf{ mod } 26 = 24 = Y$$
$$f(S) = f(18) = (18+4) \textbf{ mod } 26 = 22 = W$$

   "DIYW"

   b) $\{0,2\ pt\}$ Defina a função $f^{-1}(n)$ que desencripta mensagens de $f(n)$. **Resposta:** $f^{-1} = (n-4)$ **mod** 26

c) $\{0,2\ pt\}$ Desencripte a mensagem "GCBA". Exiba os cálculos que te levam à resposta.

Resposta:

$$f^{-1}(G) = f^{-1}(6) = (6-4) \ \mathbf{mod}\ 26 = 2 = C$$
$$f^{-1}(C) = f^{-1}(2) = (2-4) \ \mathbf{mod}\ 26 = 24 \textit{ (veja abaixo)} = Y$$
$$f^{-1}(B) = f^{-1}(1) = (1-4) \ \mathbf{mod}\ 26 = 23 \textit{ (veja abaixo)} = X$$
$$f^{-1}(A) = f^{-1}(0) = (0-4) \ \mathbf{mod}\ 26 = 22 \textit{ (veja abaixo)} = W$$

$-2/26 = -0,08$. Portanto, -2 **div** $26 = \lfloor -0,08 \rfloor = -1$.
Então, $-2 = 26 \cdot (-1) + r$. Ou seja, $r = 24$.

$-3/26 = -0,12$. Portanto, -3 **div** $26 = \lfloor -0,12 \rfloor = -1$.
Então, $-3 = 26 \cdot (-1) + r$. Ou seja, $r = 23$.

$-4/26 = -0,15$. Portanto, -4 **div** $26 = \lfloor -0,15 \rfloor = -1$.
Então, $-4 = 26 \cdot (-1) + r$. Ou seja, $r = 22$.

8. $\{0,6\ pt\}$ Sejam $mdc(p,q) = 2^3 3^4 5^1 7^0$ e $q = 2^5 3^4 5^8 7^{10}$. Utilize a definição de mdc em termos de fatores primos para encontrar p.

   Obs. Existem infinitas respostas. Basta escrever 1 delas.

   Resposta: Seja $p = 2^x 3^y 5^z 7^k$. Como $mdc(p,q) = 2^{min(x,5)} 3^{min(y,4)} 5^{min(z,8)} 7^{min(k,10)}$, temos que encontrar

$$x,\ \textit{tal que } min(x,5) = 3$$
$$y,\ \textit{tal que } min(y,4) = 4$$
$$z,\ \textit{tal que } min(z,8) = 1$$
$$k,\ \textit{tal que } min(k,10) = 0$$

   Ou seja $p = 2^3 3^y 5^1 7^0$, onde $y \geq 4$. Possíveis respostas: $2^3 3^4 5^1 7^0$, $2^3 3^5 5^1 7^0$, $2^3 3^6 5^1 7^0$, $2^3 3^7 5^1 7^0$, $2^3 3^8 5^1 7^0, \ldots$

9. $\{1,0\ pt\}$ Resolva o sistema de equações abaixo.

$$x \equiv 2\ (mod\ 3)$$
$$x \equiv 1\ (mod\ 4)$$
$$x \equiv 3\ (mod\ 5)$$

   - Mostre seus cálculos;
   - Deixe explícito os valores de cada $\mathbf{M_k}$
   - Deixe explícito os valores de cada $\mathbf{y_k}$
   - **Dica:** sempre que calcular y_k e x, **teste** se estes números estão corretos.

   Resposta:
   Critérios de correção:
   Cálculo dos M_k : $\{0,25\ pt\}$
   Cálculo dos y_k : $\{0,5\ pt\}$
   Cálculo de x : $\{0,25\ pt\}$

   $M_1 = \frac{3\cdot4\cdot5}{3} = 20$, $M_2 = \frac{3\cdot4\cdot5}{4} = 15$, $M_3 = \frac{3\cdot4\cdot5}{5} = 12$.

y_1 é o inverso de 20 módulo 3. Cálculo:

Pelo algoritmo de Euclides:

$$20 = 6 \cdot 3 + 2$$
$$3 = 1 \cdot 2 + 1$$

Então:

$$1 = 3 - 1 \cdot 2$$
$$1 = 3 - 1(20 - 6 \cdot 3)$$
$$1 = 3 - 20 + 6 \cdot 3$$
$$1 = (-1) \cdot 20 + 7 \cdot 3$$

Ou seja, $y_1 = -1$.

y_2 é o inverso de 15 módulo 4. Cálculo:

Pelo algoritmo de Euclides:

$$15 = 3 \cdot 4 + 3$$
$$4 = 1 \cdot 3 + 1 \textit{Então:}$$
$$1 = 4 - 1 \cdot 3$$
$$1 = 4 - 1(15 - 3 \cdot 4)$$
$$1 = 4 - 15 + 3 \cdot 4$$
$$1 = (-1)15 + 4 \cdot 4$$

Ou seja, $y_2 = -1$.

y_3 é o inverso de 12 módulo 5. Cálculo:

Pelo algoritmo de Euclides:

$$12 = 2 \cdot 5 + 2$$
$$5 = 2 \cdot 2 + 1 \textit{Então:}$$
$$1 = 5 - 2 \cdot 2$$
$$1 = 5 - 2(12 - 2 \cdot 5)$$
$$1 = 5 - 2 \cdot 12 + 4 \cdot 5$$
$$1 = (-2)12 + 5 \cdot 5$$

Ou seja, $y_3 = -2$.

$x = (2 \cdot 20 \cdot (-1)) + (1 \cdot 15 \cdot (-1)) + (3 \cdot 12 \cdot (-2)) = -127$. Ou qualquer solução y, tal que $y \equiv -127 \ (mod\ 60)$, por exemplo: $y = 53$.

10. Calcule o inverso de

a) $\{1,0\ pt\}$ 4 módulo 9. **Resposta:** -2

b) $\{1,0\ pt\}$ 2 módulo 17. **Resposta:** -8

c) $\{1,0\ pt\}$ 7 módulo 26. **Resposta:** -11

Teste sua solução!

11. $\{2,0\ pt\}$ Calcule x usando o teorema Chinês do Resto. Deixe explícito os valores de M_k e y_k.

$$x \equiv 1 \ (mod\ 2)$$
$$x \equiv 2 \ (mod\ 3)$$
$$x \equiv 3 \ (mod\ 5)$$

Resposta: $M_1 = 15$, $M_2 = 10$, $M_3 = 6$. $y_1 = y_2 = y_3 = 1$. $x = 53$

12. Sejam a, b, c, d e m inteiros, onde $m \geq 2$, $c > 0$ e $d > 0$. Descubra valores numéricos para a, b, c, d e m que tornem as proposições abaixo **falsas**. Observação. Os valores para a, b, c, d e m são **diferentes** nas letras (a) e (b).

    A resposta deve estar neste formato:
    (a) $a = 3$, $b = 4$, $c = 8$, $m = 3$
    (b) $a = 5$, $b = 3$, $c = 2$, $d = 7$, $m = 4$

    (a) $\{1,0\ pt\}$ $(ac \equiv bc\ (mod\ m)) \rightarrow (a \equiv b\ (mod\ m))$
    Resposta: Uma possível resposta é: $a = 3$, $b = 4$, $c = 2$ e $m = 2$.
    Justificativa: estes valores fazem $(ac \equiv bc\ (mod\ m))$ ser T (porque $3 \cdot 2$ **mod** $2 = 4 \cdot 2$ **mod** 2) e $(a \equiv b\ (mod\ m))$ ser F (porque 3 **mod** $2 \neq 4$ **mod** 2). Portanto, a implicação é F.

    (b) $\{1,0\ pt\}$ $(\ (a \equiv b\ (mod\ m)) \wedge (c \equiv d\ (mod\ m))\ ) \ \rightarrow\ (a^c \equiv b^d\ (mod\ m))$
    Resposta: Uma possível resposta é: $a = 3$, $b = 3$, $c = 1$, $d = 6$, $m = 5$.
    Justificativa: similar à letra (a).

13. $\{1,0\ pt\}$ Use o Teorema Chinês do Resto para encontrar uma solução para o sistema de equações abaixo. **Exiba seus cálculos**. Sugestão: teste seu resultado para ter certeza que calculou corretamente.

$$x \equiv 1\ (mod\ 3)$$
$$x \equiv 2\ (mod\ 4)$$
$$x \equiv 3\ (mod\ 5)$$

    Para sua ajuda, segue abaixo a fórmula do Teorema Chinês do Resto. Em um sistema de equações

$$\begin{gathered} x \equiv a_1\ (mod\ m_1) \\ x \equiv a_2\ (mod\ m_2) \\ \vdots \\ x \equiv a_n\ (mod\ m_n) \end{gathered}$$

    A solução é $x = a_1M_1y_1 + a_2M_2y_2 + \ldots + a_nM_ny_n$. Onde, $m = m_1m_2\ldots m_n$, $M_k = m/m_k$ e y_k é o inverso de M_k módulo m_k.

    Resposta: Sejam $m = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$, $M_1 = 4 \cdot 5 = 20$, $M_2 = 3 \cdot 5 = 15$, $M_3 = 3 \cdot 4 = 12$, $m_1 = 3$, $m_2 = 4$, $m_5 = 5$.
    Cálculo de y_1 (inverso de 20 módulo 3). Pelo algoritmo de Euclides, sabemos que $20 = 3 \cdot 6 + 2$ e $3 = 2 \cdot 1 + 1$. Substituindo a primeira equação na segunda, temos que $1 = 4 \cdot 3 + (-1) \cdot 20$. Ou seja, $y_1 = -1$.
    Cálculo de y_2 (inverso de 15 módulo 4). Pelo algoritmo de Euclides, sabemos que $15 = 4 \cdot 3 + 3$ e $4 = 3 \cdot 1 + 1$. Substituindo a primeira equação na segunda, temos que $1 = 4 \cdot 4 + (-1) \cdot 15$. Ou seja, $y_2 = -1$.
    Cálculo de y_3 (inverso de 12 módulo 5). Pelo algoritmo de Euclides, sabemos que $12 = 5 \cdot 2 + 2$ e $5 = 2 \cdot 2 + 1$. Substituindo a primeira equação na segunda, temos que $1 = 5 \cdot 5 + (-2) \cdot 12$. Ou seja, $y_3 = -2$.
    Aplicando a fórmula, temos que $x = 1 \cdot (-1) \cdot 20 + 2 \cdot (-1) \cdot 15 + 3 \cdot (-2) \cdot 12 = -122$.

14. Calcule o MDC de

    a)$\{0,5\ pt\}$ 30 e 12 utilizando o método da fatoração.
    Resposta:

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^1 3^1 5^1$
$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 3^1 5^0$
$MDC(30, 12) = 2^{min(1,2)} 3^{min(1,1)} 5^{min(1,0)} = 2^2 3^1 5^0 = 6$

b)$\{0, 5\ pt\}$ 126 e 48 utilizando o algoritmo de Euclides.
Resposta:
$126 = 48 \cdot 2 + 30$
$48 = 30 \cdot 1 + 18$
$30 = 18 \cdot 1 + 12$
$18 = 12 \cdot 1 + 6$
$12 = 6 \cdot 2 + 0$
$MDC(126, 48) = 6$

Nas duas letras acima, exiba seus cálculos.

15. Calcule (e **exiba seus cálculos**):

a)$\{0, 25\ pt\}$ O inverso de 43 módulo 15.
Resposta:

$$43 = 15 \cdot 2 + 13$$
$$15 = 13 \cdot 1 + 2$$
$$13 = 2 \cdot 6 + 1$$

$$\begin{aligned}
&1 \\
&= 13 - 2 \cdot 6 \\
&= 13 - (15 - 13) \cdot 6 \\
&= 13 - 15 \cdot 6 + 13 \cdot 6 \\
&= 13 \cdot 7 - 15 \cdot 6 \\
&= (43 - 15 \cdot 2) \cdot 7 - 15 \cdot 6 \\
&= (43 \cdot 7) - 15 \cdot 14 - 15 \cdot 6 \\
&= 43 \cdot 7 - 15 \cdot 20
\end{aligned}$$

$$Resposta = 7$$

b)$\{0, 25\ pt\}$ O inverso de 15 módulo 43.
Resposta: -20

c)$\{0, 25\ pt\}$ Um x, tal que $5x \equiv 2\ (mod\ 34)$.
Resposta:

$$5 = 34 \cdot 0 + 5$$
$$34 = 5 \cdot 6 + 4$$
$$5 = 4 \cdot 1 + 1$$

$$\begin{aligned}
&1 \\
&= 5 - 4 \cdot 1 \\
&= 5 - (34 - 5 \cdot 6)1 \\
&= 5 - 34 + 5 \cdot 6 \\
&= 5 \cdot 7 - 34 \\
&= (5 - 34 \cdot 0)7 - 34 \\
&= (5 - 0)7 - 34 \\
&= 5 \cdot 7 - 34
\end{aligned}$$
$$Resposta = 7 \cdot 2 = 14.$$

d)$\{0,25\ pt\}$ Um x, tal que $74x \equiv 5\ (mod\ 33)$.

Resposta:

$$
\begin{aligned}
&74 = 33 \cdot 2 + 8\\
&33 = 8 \cdot 4 + 1\\
&\\
&1\\
&= 33 - 8 \cdot 4\\
&= 33 - (74 - 33 \cdot 2)4\\
&= 33 - 74 \cdot 4 + 33 \cdot 8\\
&= 33 \cdot 9 - 74 \cdot 4\\
&Resposta = -4 \cdot 5 = -20.
\end{aligned}
$$

16. Calcule o MDC de

a)$\{0,5\ pt\}$ 52 e 24 utilizando o método da fatoração.

Resposta:

$52 = 2 \cdot 2 \cdot 13 = 2^2 3^0 13^1$

$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 3^1 13^0$

$MDC(52, 24) = 2^{min(2,3)} 3^{min(1,0)} 13^{min(1,0)} = 2^2 3^0 13^0 = 4$

b)$\{0,5\ pt\}$ 212 e 88 utilizando o algoritmo de Euclides.

Resposta:

$212 = 88 \cdot 2 + 36$

$88 = 36 \cdot 2 + 16$

$36 = 16 \cdot 2 + 4$

$16 = 4 \cdot 4 + 0$

$MDC(212, 88) = 4$

17. $\{1,0\ pt\}$ Use o Teorema Chinês do Resto para encontrar uma solução para o sistema de equações abaixo. **Exiba seus cálculos**. Sugestão: teste seu resultado para ter certeza que calculou corretamente.

$$
\begin{aligned}
x &\equiv 4\ (mod\ 5)\\
x &\equiv 3\ (mod\ 3)\\
x &\equiv 2\ (mod\ 8)
\end{aligned}
$$

Para sua ajuda, segue abaixo a fórmula do Teorema Chinês do Resto. Em um sistema de equações

$$
\begin{aligned}
x &\equiv a_1\ (mod\ m_1)\\
x &\equiv a_2\ (mod\ m_2)\\
&\vdots\\
x &\equiv a_n\ (mod\ m_n)
\end{aligned}
$$

A solução é $x = a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 + \ldots + a_n M_n y_n$. Onde, $m = m_1 m_2 \ldots m_n$, $M_k = m/m_k$ e y_k é o inverso de M_k módulo m_k.

Resposta: Sejam $m = 5 \cdot 3 \cdot 8 = 120$, $M_1 = 3 \cdot 8 = 24$, $M_2 = 5 \cdot 8 = 40$, $M_3 = 5 \cdot 3 = 15$, $m_1 = 5$, $m_2 = 3$, $m_3 = 8$.

Cálculo de y_1 (inverso de 24 módulo 5):

$$24 = 5 \cdot 4 + 4$$
$$5 = 4 \cdot 1 + 1$$

$$\begin{aligned} &1 \\ &= 5 - 4 \\ &= 5 - (24 - 5 \cdot 4) \\ &= 5 - 24 + 5 \cdot 4 \\ &= 5 \cdot 5 - 24 \end{aligned}$$

$$y_1 = -1.$$

Cálculo de y_2 (inverso de 40 módulo 3):

$$40 = 3 \cdot 13 + 1$$

$$\begin{aligned} &1 \\ &= 40 - 3 \cdot 13 \end{aligned}$$

$$y_2 = 1.$$

Cálculo de y_3 (inverso de 15 módulo 8):

$$15 = 8 \cdot 1 + 7$$
$$8 = 7 \cdot 1 + 1$$

$$\begin{aligned} &1 \\ &= 8 - 7 \\ &= 8 - (15 - 8) \\ &= 8 - 15 + 8 \\ &= 2 \cdot 8 - 15 \end{aligned}$$

$$y_3 = -1.$$

$x = 4 \cdot 24 \cdot (-1) + 3 \cdot 40 \cdot 1 + 2 \cdot 15 \cdot (-1) = -96 + 120 - 30 = -6.$

18. $\{1,0\ pt\}$ Use o Teorema Chinês do Resto para encontrar uma solução para o sistema de equações abaixo. **Exiba seus cálculos**. Sugestão: teste seu resultado para ter certeza que calculou corretamente.

$$\begin{aligned} x &\equiv 2\ (mod\ 3) \\ x &\equiv 3\ (mod\ 4) \\ x &\equiv 4\ (mod\ 5) \end{aligned}$$

Para sua ajuda, segue abaixo a fórmula do Teorema Chinês do Resto. Em um sistema de equações

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1\ (mod\ m_1) \\ x &\equiv a_2\ (mod\ m_2) \\ &\vdots \\ x &\equiv a_n\ (mod\ m_n) \end{aligned}$$

A solução é $x = a_1M_1y_1 + a_2M_2y_2 + \ldots + a_nM_ny_n$. Onde, $m = m_1m_2 \ldots m_n$, $M_k = m/m_k$ e y_k é o inverso de M_k módulo m_k.

Resposta: Sejam $m = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$, $M_1 = 60/3 = 20$, $M_2 = 60/4 = 15$, $M_3 = 60/5 = 12$, $m_1 = 3$, $m_2 = 4$, $m_3 = 5$.
Cálculo de y_1 (inverso de 20 módulo 3):

$$\begin{aligned}
&20 = 3 \cdot 6 + 2\\
&3 = 2 \cdot 1 + 1\\
\\
&1\\
&= 3 - 2 \cdot 1\\
&= 3 - (20 - 3 \cdot 6) \cdot 1\\
&= 3 - 20 + 6 \cdot 3\\
&= (-1) \cdot 20 + 7 \cdot 3\\
\\
&y_1 = -1.
\end{aligned}$$

Cálculo de y_2 (inverso de 15 módulo 4):

$$\begin{aligned}
&15 = 4 \cdot 3 + 3\\
&4 = 3 \cdot 1 + 1\\
\\
&1\\
&= 4 - 3 \cdot 1\\
&= 4 - (15 - 4 \cdot 3) \cdot 1\\
&= 4 - 15 + 4 \cdot 3\\
&= (-1) \cdot 15 + 4 \cdot 4\\
&y_2 = -1.
\end{aligned}$$

Cálculo de y_3 (inverso de 12 módulo 5):

$$\begin{aligned}
&12 = 5 \cdot 2 + 2\\
&5 = 2 \cdot 2 + 1\\
\\
&1\\
&= 5 - 2 \cdot 2\\
&= 5 - 2 \cdot (12 - 5 \cdot 2)\\
&= 5 - 2 \cdot 12 + 4 \cdot 5\\
&= (-2) \cdot 12 + 5 \cdot 5\\
\\
&y_3 = -2.
\end{aligned}$$

$x = 2 \cdot 20 \cdot (-1) + 3 \cdot 15 \cdot (-1) + 4 \cdot 12 \cdot (-2) = -40 - 45 - 96 = -181.$

19. $\{1,0\ pt\}$ Use o Teorema Chinês do Resto para encontrar uma solução para o sistema de equações abaixo. **Exiba seus cálculos**. Sugestão: teste seu resultado para ter certeza que calculou corretamente.

$$\begin{aligned}
x &\equiv 1\ (mod\ 3)\\
x &\equiv 3\ (mod\ 4)\\
x &\equiv 3\ (mod\ 5)
\end{aligned}$$

Para sua ajuda, segue abaixo a fórmula do Teorema Chinês do Resto. Em um sistema de equações

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \ (mod\ m_1) \\ x &\equiv a_2 \ (mod\ m_2) \\ &\vdots \\ x &\equiv a_n \ (mod\ m_n) \end{aligned}$$

A solução é $x = a_1M_1y_1 + a_2M_2y_2 + \ldots + a_nM_ny_n$. Onde, $m = m_1m_2\ldots m_n$, $M_k = m/m_k$ e y_k é o inverso de M_k módulo m_k.

Resposta: Sejam $m = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$, $M_1 = 60/3 = 20$, $M_2 = 60/4 = 15$, $M_3 = 60/5 = 12$, $m_1 = 3$, $m_2 = 4$, $m_3 = 5$.

Cálculo de y_1 (inverso de 20 módulo 3):

$$\begin{aligned} &20 = 3 \cdot 6 + 2 \\ &3 = 2 \cdot 1 + 1 \\ \\ &1 \\ &= 3 - 2 \cdot 1 \\ &= 3 - (20 - 3 \cdot 6) \cdot 1 \\ &= 3 - 20 + 3 \cdot 6 \\ &= (-1) \cdot 20 + 7 \cdot 3 \\ \\ &y_1 = -1. \end{aligned}$$

Cálculo de y_2 (inverso de 15 módulo 4):

$$\begin{aligned} &15 = 4 \cdot 3 + 3 \\ &4 = 3 \cdot 1 + 1 \\ \\ &1 \\ &= 4 - 3 \cdot 1 \\ &= 4 - (15 - 4 \cdot 3) \cdot 1 \\ &= 4 - 15 + 4 \cdot 3 \\ &= (-1) \cdot 15 + 4 \cdot 4 \\ \\ &y_2 = -1. \end{aligned}$$

Cálculo de y_3 (inverso de 12 módulo 5):

$$\begin{aligned} &12 = 5 \cdot 2 + 2 \\ &5 = 2 \cdot 2 + 1 \\ \\ &1 \\ &= 5 - 2 \cdot 2 \\ &= 5 - 2 \cdot (12 - 5 \cdot 2) \\ &= 5 - 2 \cdot 12 + 4 \cdot 5 \\ &= (-2) \cdot 12 + 5 \cdot 5 \\ \\ &y_3 = -2. \end{aligned}$$

$x = 1 \cdot 20 \cdot (-1) + 3 \cdot 15 \cdot (-1) + 3 \cdot 12 \cdot (-2) = -20 - 45 - 72 = -137.$

20. $\{1,0\ pt\}$ Use o Teorema Chinês do Resto para encontrar uma solução para o sistema de equações abaixo. **Exiba seus cálculos**. Sugestão: teste seu resultado para ter certeza que calculou corretamente.

$$x \equiv 3\ (mod\ 4)$$
$$x \equiv 7\ (mod\ 5)$$
$$x \equiv 1\ (mod\ 9)$$

Para sua ajuda, segue abaixo a fórmula do Teorema Chinês do Resto. Em um sistema de equações

$$\begin{gathered} x \equiv a_1\ (mod\ m_1) \\ x \equiv a_2\ (mod\ m_2) \\ \vdots \\ x \equiv a_n\ (mod\ m_n) \end{gathered}$$

A solução é $x = a_1M_1y_1 + a_2M_2y_2 + \ldots + a_nM_ny_n$. Onde, $m = m_1m_2 \ldots m_n$, $M_k = m/m_k$ e y_k é o inverso de M_k módulo m_k.

Resposta: Sejam $m = 4 \cdot 5 \cdot 9 = 180$, $M_1 = 180/4 = 45$, $M_2 = 180/5 = 36$, $M_3 = 180/9 = 20$, $m_1 = 4$, $m_2 = 5$, $m_3 = 9$.
Cálculo de y_1 (inverso de 45 módulo 4):

$$45 = 4 \cdot 11 + 1$$

$$1 = 45 - 4 \cdot 11$$

$$y_1 = 1.$$

Cálculo de y_2 (inverso de 36 módulo 5):

$$36 = 5 \cdot 7 + 1$$

$$1 = 36 - 5 \cdot 7$$

$$y_2 = 1.$$

Cálculo de y_3 (inverso de 20 módulo 9):

$$\begin{aligned} &20 = 9 \cdot 2 + 2 \\ &9 = 2 \cdot 4 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &1 \\ &= 9 - 2 \cdot 4 \\ &= 9 - (20 - 9 \cdot 2) \cdot 4 \\ &= 9 - (4 \cdot 20 - 8 \cdot 9) \\ &= 9 - 4 \cdot 20 + 8 \cdot 9 \\ &= 9 \cdot 9 - 4 \cdot 20 \end{aligned}$$

$$y_3 = -4.$$

$x = 3 \cdot 45 \cdot 1 + 7 \cdot 36 \cdot 1 + 1 \cdot 20 \cdot (-4) = 135 + 252 - 80 = 307$

21. $\{1,0\ pt\}$ Use o Teorema Chinês do Resto para encontrar uma solução para o sistema de equações abaixo. **Exiba seus cálculos**. Sugestão: teste seu resultado para ter certeza que calculou corretamente.

$$x \equiv 4\ (mod\ 2)$$
$$x \equiv 5\ (mod\ 3)$$
$$x \equiv 4\ (mod\ 7)$$

Para sua ajuda, segue abaixo a fórmula do Teorema Chinês do Resto. Em um sistema de equações

$$x \equiv a_1\ (mod\ m_1)$$
$$x \equiv a_2\ (mod\ m_2)$$
$$\vdots$$
$$x \equiv a_n\ (mod\ m_n)$$

A solução é $x = a_1M_1y_1 + a_2M_2y_2 + \ldots + a_nM_ny_n$. Onde, $m = m_1m_2\ldots m_n$, $M_k = m/m_k$ e y_k é o inverso de M_k módulo m_k.

Resposta: Sejam $m = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$, $M_1 = 42/2 = 21$, $M_2 = 42/3 = 14$, $M_3 = 42/7 = 6$, $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_3 = 7$.

Cálculo de y_1 (inverso de 21 módulo 2):

$$21 = 2 \cdot 10 + 1$$

$$1 = 21 - 2 \cdot 10$$

$$y_1 = 1.$$

Cálculo de y_2 (inverso de 14 módulo 3):

$$14 = 3 \cdot 4 + 2$$
$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$

$$1$$
$$= 3 - 2 \cdot 1$$
$$= 3 - (14 - 3 \cdot 4) \cdot 1$$
$$= 3 - (14 - 3 \cdot 4)$$
$$= 3 - 14 + 3 \cdot 4$$
$$= 4 \cdot 3 - 14$$

$$y_2 = -1.$$

Cálculo de y_3 (inverso de 6 módulo 7):

$$6 = 7 \cdot 0 + 6$$
$$7 = 6 \cdot 1 + 1$$

$$1$$
$$= 7 - 6 \cdot 1$$
$$= 7 - (6 - 7 \cdot 0) \cdot 1$$
$$= 7 - (6 - 0) \cdot 1$$
$$= 7 - (6 - 0)$$
$$= 7 - 6$$

$$y_3 = -1.$$

$x = 4 \cdot 21 \cdot 1 + 5 \cdot 14 \cdot (-1) + 4 \cdot 6 \cdot (-1) = 84 - 70 - 24 = -10$

22. Para criptografar a mensagem M, calculamos $C = M^e$ **mod** $(p \cdot q)$. Para decriptografar a mensagem C, calculamos $M' = C^d$ **mod** $(p \cdot q)$, onde d é o inverso de e módulo $(p-1) \cdot (q-1)$. Sejam $M = 7$, $e = 3$, $p = 3$ e $q = 5$.

a)$\{0,30\ pt\}$ Calcule C. Exiba seus cálculos.
Resposta:

$$C = 7^3 \textbf{ mod } (3 \cdot 5) = 343 \textbf{ mod } 15 = 13$$

b)$\{0,70\ pt\}$ Calcule d e M'. Exiba seus cálculos.
Resposta:

[Cálculo do inverso de 3 módulo $(3-1)(5-1)$]
$3 = 8 \cdot 0 + 3$
$8 = 3 \cdot 2 + 2$
$3 = 2 \cdot 1 + 1$

1
$= 3 - 2 \cdot 1$
$= 3 - (8 - 3 \cdot 2) \cdot 1$
$= 3 - 8 + 3 \cdot 2$
$= 3 \cdot 3 - 8$
$= 3(3 - 8 \cdot 0) - 8$
$= 3 \cdot 3 - 8$

[Ou seja, $d = 3$.]

$M' = 13^3 \textbf{ mod } (3 \cdot 5) = 2197 \textbf{ mod } 15 = 7$

Dica: Teste sua resposta. Verifique se $M' = M$.

23. Para criptografar a mensagem M, calculamos $C = M^e$ **mod** $(p \cdot q)$. Para decriptografar a mensagem C, calculamos $M' = C^d$ **mod** $(p \cdot q)$, onde d é o inverso de e módulo $(p-1) \cdot (q-1)$. Sejam $M = 6$, $e = 5$, $p = 3$ e $q = 7$.

a)$\{0,30\ pt\}$ Calcule C. Exiba seus cálculos.
Resposta:

$$C = 6^5 \textbf{ mod } (3 \cdot 7) = 7776 \textbf{ mod } 21 = 6$$

b)$\{0,70\ pt\}$ Calcule d e M'. Exiba seus cálculos.

Resposta:

[Cálculo do inverso de 5 módulo $(3-1)(7-1)$]
$5 = 12 \cdot 0 + 5$
$12 = 5 \cdot 2 + 2$
$5 = 2 \cdot 2 + 1$

1
$= 5 - 2 \cdot 2$
$= 5 - 2(12 - 5 \cdot 2)$
$= 5 - 2 \cdot 12 + 4 \cdot 5$
$= 5 \cdot 5 - 2 \cdot 12$
[Ou seja, $d = 5$.]

$M' = 6^5 \textbf{ mod } (3 \cdot 7) = 7776 \textbf{ mod } 21 = 6$

Dica: Teste sua resposta. Verifique se $M' = M$.

24. $\{1,0\ pt\}$ Use o Teorema Chinês do Resto para encontrar uma solução para o sistema de equações abaixo. **Exiba seus cálculos**. Sugestão: teste seu resultado para ter certeza que calculou corretamente.

$$x \equiv 5\ (mod\ 2)$$
$$x \equiv 2\ (mod\ 3)$$
$$x \equiv 4\ (mod\ 5)$$

Teorema Chinês do Resto. Em um sistema de equações

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1\ (mod\ m_1) \\ x &\equiv a_2\ (mod\ m_2) \\ &\vdots \\ x &\equiv a_n\ (mod\ m_n) \end{aligned}$$

a solução é $x = a_1M_1y_1 + a_2M_2y_2 + \ldots + a_nM_ny_n$, onde $m = m_1m_2 \ldots m_n$, $M_k = m/m_k$ e y_k é o inverso de M_k módulo m_k.

Resposta: Sejam $m = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, $M_1 = 30/2 = 15$, $M_2 = 30/3 = 10$, $M_3 = 30/5 = 6$, $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_3 = 5$.
Cálculo de y_1 (inverso de 15 módulo 2):

$$15 = 2 \cdot 7 + 1$$

$$1 = 15 - 2 \cdot 7$$

$$y_1 = 1.$$

Cálculo de y_2 (inverso de 10 módulo 3):

$$10 = 3 \cdot 3 + 1$$

$$1 = 10 - 3 \cdot 3$$

$$y_2 = 1.$$

Cálculo de y_3 (inverso de 6 módulo 5):

$$6 = 5 \cdot 1 + 1$$

$$1 = 6 - 5 \cdot 1$$

$$y_3 = 1.$$

$x = 5 \cdot 15 \cdot 1 + 2 \cdot 10 \cdot 1 + 4 \cdot 6 \cdot 1 = 75 + 20 + 24 = 119.$

25. $\{1,0\ pt\}$ Use o Teorema Chinês do Resto para encontrar uma solução para o sistema de equações abaixo. **Exiba seus cálculos**. Sugestão: teste seu resultado para ter certeza que calculou corretamente.

$$x \equiv 6\ (mod\ 5)$$
$$x \equiv 3\ (mod\ 6)$$
$$x \equiv 5\ (mod\ 7)$$

Teorema Chinês do Resto. Em um sistema de equações

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1\ (mod\ m_1) \\ x &\equiv a_2\ (mod\ m_2) \\ &\vdots \\ x &\equiv a_n\ (mod\ m_n) \end{aligned}$$

a solução é $x = a_1M_1y_1 + a_2M_2y_2 + \ldots + a_nM_ny_n$, onde $m = m_1m_2 \ldots m_n$, $M_k = m/m_k$ e y_k é o inverso de M_k módulo m_k.

Resposta: Sejam $m = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$, $M_1 = 210/5 = 42$, $M_2 = 210/6 = 35$, $M_3 = 210/7 = 30$, $m_1 = 5$, $m_2 = 6$, $m_3 = 7$.
Cálculo de y_1 (inverso de 42 módulo 5):

$$42 = 5 \cdot 8 + 2$$
$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$

$$\begin{aligned} &1 \\ &= 5 - 2 \cdot 2 \\ &= 5 - (42 - 5 \cdot 8) \cdot 2 \\ &= 5 - 2 \cdot 42 + 16 \cdot 5 \\ &= 17 \cdot 5 - 2 \cdot 42 \end{aligned}$$

$$y_1 = -2.$$

Cálculo de y_2 (inverso de 35 módulo 6):

$$35 = 6 \cdot 5 + 5$$
$$6 = 5 \cdot 1 + 1$$

$$\begin{aligned} &1 \\ &= 6 - 5 \cdot 1 \\ &= 6 - (35 - 6 \cdot 5) \cdot 1 \\ &= 6 - 35 + 5 \cdot 6 \\ &= 6 \cdot 6 - 35 \end{aligned}$$

$$y_2 = -1.$$

Cálculo de y_3 (inverso de 30 módulo 7):

$$30 = 7 \cdot 4 + 27 = 2 \cdot 3 + 1$$

$$\begin{aligned} &1 \\ &= 7 - 2 \cdot 3 \\ &= 7 - (30 - 7 \cdot 4) \cdot 3 \\ &= 7 - (3 \cdot 30 - 12 \cdot 7) \\ &= 7 - 3 \cdot 30 + 12 \cdot 7 \\ &= 19 \cdot 7 - 3 \cdot 30 \end{aligned}$$

$$y_3 = -3.$$

$x = 6 \cdot 42 \cdot (-2) + 3 \cdot 35 \cdot (-1) + 5 \cdot 30 \cdot (-3) = -504 - 105 - 450 = -1059.$

26. Qual o menor número **natural** congruente a

    a)$\{0,10\ pt\}$ 20 módulo 3? **Resposta:** 2

    b)$\{0,10\ pt\}$ 33 módulo 4? **Resposta:** 1

    c)$\{0,10\ pt\}$ 49 módulo 5? **Resposta:** 4

    d)$\{0,10\ pt\}$ 100 módulo 7? **Resposta:** 2

27. $\{0,6\ pt\}$ Qual a fórmula que calcula o menor número **natural** congruente a x módulo m? Dica: use o Quesito 26 como inspiração para descobrir a fórmula.

    Resposta: x **mod** m

28. $\{1,0\ pt\}$ Use o Teorema Chinês do Resto para encontrar uma solução para o sistema de equações abaixo. **Exiba seus cálculos**. Sugestão: teste seu resultado para ter certeza que calculou corretamente.

$$\begin{aligned} x &\equiv 1\ (mod\ 2) \\ x &\equiv 2\ (mod\ 3) \\ x &\equiv 4\ (mod\ 5) \end{aligned}$$

Para sua ajuda, segue abaixo a fórmula do Teorema Chinês do Resto. Em um sistema de equações

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1\ (mod\ m_1) \\ x &\equiv a_2\ (mod\ m_2) \\ &\vdots \\ x &\equiv a_n\ (mod\ m_n) \end{aligned}$$

A solução é $x = a_1M_1y_1 + a_2M_2y_2 + \ldots + a_nM_ny_n$. Onde, $m = m_1m_2 \ldots m_n$, $M_k = m/m_k$ e y_k é o inverso de M_k módulo m_k.

Resposta: Sejam $m = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, $M_1 = 3 \cdot 5 = 15$, $M_2 = 2 \cdot 5 = 10$, $M_3 = 2 \cdot 3 = 6$, $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_5 = 5$.
Cálculo de y_1 (inverso de 15 módulo 2). Pelo algoritmo de Euclides, sabemos que $15 = 2 \cdot 7 + 1$. Ou seja, $1 = 15 - 2 \cdot 7$. Portanto, $y_1 = 1$.
Cálculo de y_2 (inverso de 10 módulo 3). Pelo algoritmo de Euclides, sabemos que $10 = 3 \cdot 3 + 1$. Ou seja, $1 = 10 - 3 \cdot 3$. Portanto, $y_2 = 1$.
Cálculo de y_3 (inverso de 6 módulo 5). Pelo algoritmo de Euclides, sabemos

que $6 = 5 \cdot 1 + 1$. Ou seja, $1 = 6 - 5 \cdot 1$. Ou seja, $y_3 = 1$.
Aplicando a fórmula, temos que $x = (1{\cdot}1{\cdot}15)+(2{\cdot}1{\cdot}10)+(4{\cdot}1{\cdot}6) = 15+20+24 = 59$.

(Opcional): Para obter um valor x tal que $0 \leq x < m$, basta calcular o resto 59 **mod** 30 (lembre que $m = 30$). $q = \lfloor 59/30 \rfloor = \lfloor 1, \ldots \rfloor = 1$. $59 = 30 \cdot (1) + r$. Portanto, $r = 29$. Ou seja, $x = 29$ também é solução do sistema de equações (teste esta resposta dividindo 29 por 2, 3 e 5 e comparando os restos com os restos da divisão por 1, 2 e 4, respectivamente).

29. $\{3,3\ pt\}$ Dadas as premissas $(-1 \equiv -1\ (mod\ m))$, $(a \equiv b\ (mod\ m))$ e $(c \equiv d\ (mod\ m))$, prove que $((a{-}c) \equiv (b{-}d)\ (mod\ m))$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo e com as equações [100] e [101] dadas de graça abaixo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

$$\frac{(x_1{\equiv}y_1\ (mod\ z))\ \wedge\ (x_2{\equiv}y_2\ (mod\ z))}{\therefore\ (x_1{+}x_2){\equiv}(y_1{+}y_2)\ (mod\ z)} \quad [100]$$

$$\frac{(x_1{\equiv}y_1\ (mod\ z))\ \wedge\ (x_2{\equiv}y_2\ (mod\ z))}{\therefore\ (x_1x_2){\equiv}(y_1y_2)\ (mod\ z)} \quad [101]$$

Resposta:

1. $-1 \equiv -1\ (mod\ m)$	[Premissa]
2. $c \equiv d\ (mod\ m)$	[Premissa]
3. $(-1 \equiv -1\ (mod\ m)) \wedge (c \equiv d\ (mod\ m))$	[43 em 1 e 2]
4. $(-c \equiv -d\ (mod\ m))$	[101 em 2 e 3]
5. $a \equiv b\ (mod\ m)$	[Premissa]
6. $(a \equiv b\ (mod\ m)) \wedge (-c \equiv -d\ (mod\ m))$	[43 em 4 e 5]
7. $(a{-}c) \equiv (b{-}d)\ (mod\ m)$	[100 em 6]

30. $\{1,0\ pt\}$ Dadas as premissas $(a \mid b)$ e $(a \mid c)$, conclua que $(a \mid (mb + nc))$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo e com as regras de inferência [100] e [101] dadas de graça abaixo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

$$\frac{(x\ \mid\ y)}{\therefore\ (x\ \mid\ ky)} \quad [100]$$

$$\frac{(x\ \mid\ y)\ \wedge\ (x\ \mid\ z)}{\therefore\ (x\ \mid\ (y{+}z))} \quad [101]$$

Resposta:

1. $a \mid b$	[Premissa]
2. $a \mid mb$	[100 em 1]
3. $a \mid c$	[Premissa]
4. $a \mid nc$	[100 em 3]
5. $(a \mid mb) \wedge (a \mid nc)$	[43 em 2 e 4]
6. $a \mid (mb + nc)$	[101 em 5]

31. $\{1,0\ pt\}$ Use o Teorema Chinês do Resto para encontrar uma solução para o sistema de equações abaixo. **Exiba seus cálculos**. Sugestão: teste seu resultado para ter certeza que calculou corretamente.

$$x \equiv 0\ (mod\ 2)$$
$$x \equiv 3\ (mod\ 5)$$
$$x \equiv 2\ (mod\ 7)$$

Para sua ajuda, segue abaixo a fórmula do Teorema Chinês do Resto. Em um sistema de equações

$$\begin{gathered} x \equiv a_1\ (mod\ m_1) \\ x \equiv a_2\ (mod\ m_2) \\ \vdots \\ x \equiv a_n\ (mod\ m_n) \end{gathered}$$

A solução é $x = a_1M_1y_1 + a_2M_2y_2 + \ldots + a_nM_ny_n$. Onde, $m = m_1m_2 \ldots m_n$, $M_k = m/m_k$ e y_k é o inverso de M_k módulo m_k.

Resposta: Sejam $m = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$, $M_1 = 5 \cdot 7 = 35$, $M_2 = 2 \cdot 7 = 14$, $M_3 = 2 \cdot 5 = 10$, $m_1 = 2$, $m_2 = 5$, $m_5 = 7$.
Cálculo de y_1 (inverso de 35 módulo 2). Pelo algoritmo de Euclides, sabemos que $35 = 2 \cdot 17 + 1$. Ou seja, $1 = 35 - 2 \cdot 17$. Portanto, $y_1 = 1$.
Cálculo de y_2 (inverso de 14 módulo 5). Pelo algoritmo de Euclides, sabemos que $14 = 5 \cdot 2 + 4$ e $5 = 4 \cdot 1 + 1$. Ou seja,

$$\begin{aligned} &1 \\ &= 5 - 4 \cdot 1 \\ &= 5 - (14 - 5 \cdot 2) \cdot 1 \\ &= 5 - 14 + 5 \cdot 2 \\ &= 3 \cdot 5 - 14 \end{aligned}$$

Portanto, $y_2 = -1$.
Cálculo de y_3 (inverso de 10 módulo 7). Pelo algoritmo de Euclides, sabemos que $10 = 7 \cdot 1 + 3$ e $7 = 3 \cdot 2 + 1$. Ou seja,

$$\begin{aligned} &1 \\ &= 7 - 3 \cdot 2 \\ &= 7 - (10 - 7 \cdot 1) \cdot 2 \\ &= 7 - 2 \cdot 10 + 2 \cdot 7 \\ &= 3 \cdot 7 - 2 \cdot 10 \end{aligned}$$

Portanto, $y_3 = -2$.
Aplicando a fórmula, temos que $x = (0 \cdot 35 \cdot 1) + (3 \cdot 14 \cdot (-1)) + (2 \cdot 10 \cdot (-2)) = -42 - 40 = -82$.

(Opcional): Para obter um valor x tal que $0 \leq x < m$, basta calcular o resto -82 **mod** 70 (lembre que $m = 70$). $q = \lfloor -82/70 \rfloor = \lfloor -1, \ldots \rfloor = -2$. $-82 = 70 \cdot (-2) + r$. Portanto, $r = 58$. Ou seja, $x = 58$ também é solução do sistema de equações (teste esta resposta dividindo 58 por 2, 5 e 7 e comparando os restos com os restos da divisão por 0, 3 e 2, respectivamente).

32. $\{1,0\ pt\}$ Qual o número que, quando dividido por 8, tem resto 3, quando dividido por 9, tem resto 1 e, quando dividido por 11 tem resto 4? Dica: use o Teorema Chinês do Resto para encontrar este número.

Para sua ajuda, segue abaixo a fórmula do Teorema Chinês do Resto. Em um sistema de equações

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \ (mod \ m_1) \\ x &\equiv a_2 \ (mod \ m_2) \\ &\vdots \\ x &\equiv a_n \ (mod \ m_n) \end{aligned}$$

A solução é $x = a_1M_1y_1 + a_2M_2y_2 + \ldots + a_nM_ny_n$. Onde, $m = m_1m_2 \ldots m_n$, $M_k = m/m_k$ e y_k é o inverso de M_k módulo m_k.

Resposta:
O problema a ser resolvido é:

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \ (mod \ 8) \\ x &\equiv 1 \ (mod \ 9) \\ x &\equiv 4 \ (mod \ 11) \end{aligned}$$

Sejam $m = 8 \cdot 9 \cdot 11 = 792$, $M_1 = 9 \cdot 11 = 99$, $M_2 = 8 \cdot 11 = 88$, $M_3 = 8 \cdot 9 = 72$, $m_1 = 8$, $m_2 = 9$, $m_5 = 11$.

Cálculo de y_1, o inverso de 99 módulo 8.

$$\begin{aligned} 99 &= 8 \cdot 12 + 3 \\ 8 &= 3 \cdot 2 + 2 \\ 3 &= 2 \cdot 1 + 1 \\ \\ 1 &= 3 - 2 \cdot 1 \\ &= 3 - 8 + 2 \cdot 3 \\ &= 3 - 8 + 2 \cdot 3 \\ &= 3 \cdot 3 - 8 \\ &= 3 \cdot (99 - 8 \cdot 12) - 8 \\ &= 3 \cdot 99 - 36 \cdot 8 - 8 \\ &= 3 \cdot 99 - 37 \cdot 8 \end{aligned}$$

Portanto, $y_1 = 3$.

Cálculo de y_2, o inverso de 88 módulo 9.

$$\begin{aligned} 88 &= 9 \cdot 9 + 7 \\ 9 &= 7 \cdot 1 + 2 \\ 7 &= 2 \cdot 3 + 1 \\ \\ 1 &= 7 - 2 \cdot 3 \\ &= 7 - (9 - 7 \cdot 1) \cdot 3 \\ &= 7 - 3 \cdot 9 + 3 \cdot 7 \\ &= 4 \cdot 7 - 3 \cdot 9 \\ &= 4(88 - 9 \cdot 9) - 3 \cdot 9 \\ &= 4 \cdot 88 - 36 \cdot 9 - 3 \cdot 9 \\ &= 4 \cdot 88 - 39 \cdot 9 \end{aligned}$$

Portanto, $y_2 = 4$.

Cálculo de y_3, o inverso de 72 módulo 11.

$$\begin{aligned}
72 &= 11 \cdot 6 + 6 \\
11 &= 6 \cdot 1 + 5 \\
6 &= 5 \cdot 1 + 1 \\
\\
1 &= 6 - 5 \cdot 1 \\
&= 6 - (11 - 6 \cdot 1) \cdot 1 \\
&= 6 - 11 + 6 \\
&= 2 \cdot 6 - 11 \\
&= 2(72 - 11 \cdot 6) - 11 \\
&= 2 \cdot 72 - 12 \cdot 11 - 11 \\
&= 2 \cdot 72 - 13 \cdot 11
\end{aligned}$$

Portanto, $y_3 = 2$.

Então, $x = 3 \cdot 99 \cdot 3 + 1 \cdot 88 \cdot 4 + 4 \cdot 72 \cdot 2 = 1.819$.

(Opcional): Para obter um valor x tal que $0 \leq x < m$, basta calcular o resto 1.819 **mod** 792 (lembre que $m = 792$). $q = \lfloor 1819/792 \rfloor = \lfloor 2, \ldots \rfloor = 2$. $1.819 = 792 \cdot 2 + r$. Portanto, $r = 235$. Ou seja, $x = 235$ também é solução do sistema de equações (teste esta resposta dividindo 235 por 8, 9 e 11 e comparando os restos com os restos da divisão por 3, 1 e 4, respectivamente).

33. $\{1,0\ pt\}$ Para criptografar uma mensagem M, o remetente calcula a expressão $(M^e \textbf{ mod } (p \cdot q))$, onde e e $(p \cdot q)$ são as chaves públicas do destinatário. Note que o remetente não sabe quem são p e q separadamente, pois enxerga apenas o resultado da multiplicação $(p \cdot q)$. Apenas o destinatário sabe quais são os valores de p e q separadamente. Por isso que p e q são as chaves privadas do destinatário. Para decriptografar uma mensagem C, o destinatário calcula $(C^d \textbf{ mod } (p \cdot q))$, onde d é o inverso de e módulo $(p - 1) \cdot (q - 1)$.

    Suponha que as chaves públicas de Dilma Rousseff sejam $e = 5$, e $(p \cdot q) = 21$, onde as chaves privadas são $p = 3$ e $q = 7$.

    Edward Snowden enviou uma mensagem a Dilma criptografada 3 vezes. Ou seja, a mesma mensagem foi criptografada uma vez, o resultado foi criptografada uma segunda vez e, por fim, este segundo resultado foi criptografado uma terceira vez. A mensagem recebida por Dilma, após as 3 criptografias, foi 11.

    Calcule a mensagem original de Edward Snowden. Exiba seus cálculos.

    Resposta:

Cálculo de d, o inverso de 5 módulo $(3-1)\cdot(7-1)=12$.

$$\begin{aligned}
5 &= 12\cdot 0+5\\
12 &= 5\cdot 2+2\\
5 &= 2\cdot 2+1\\
\\
1 &= 5-2\cdot 2\\
&= 5-2\cdot(12-5\cdot 2)\\
&= 5-2\cdot 12+4\cdot 5\\
&= 5\cdot 5-2\cdot 12\\
&= 5\cdot(5-12\cdot 0)-2\cdot 12\\
&= 5\cdot 5-2\cdot 12
\end{aligned}$$

Portanto, $d=5$.

Primeira decriptografia. $(11^5 \textbf{ mod } 21) = (161.051 \textbf{ mod } 21) = 2$. Segunda decriptografia. $(2^5 \textbf{ mod } 21) = (32 \textbf{ mod } 21) = 11$. Terceira decriptografia. $(11^5 \textbf{ mod } 21) = (161.051 \textbf{ mod } 21) = 2$.

Resposta: 2.

4 Indução e Recursão

4.1 Indução Matemática

1. $\{2,0\ pt\}$ Queremos provar que $((8^n-2^n) \textbf{ mod } 6)=0$ para todo inteiro $n\geq 1$. Prove por *indução matemática*. Caso precise, utilize o Teorema 1: $8^{k+1}-2^{k+1}=8(8^k-2^k)+8\cdot 2^k-2\cdot 2^k$
   Resposta:
   Base.

$$\begin{aligned}
&(8^1-2^1) \textbf{ mod } 6 &\\
&= 6 \textbf{ mod } 6 & [\text{Aritmética}]\\
&= 0 & [\text{Def. } \textbf{mod}\ ]
\end{aligned}$$

   Passo indutivo.

$$\begin{aligned}
&(8^{k+1}-2^{k+1}) \textbf{ mod } 6 &\\
&= (8(8^k-2^k)+8\cdot 2^k-2\cdot 2^k) \textbf{ mod } 6 & [\text{Teorema 1}]\\
&= (8(8^k-2^k)+2^k(8-2)) \textbf{ mod } 6 & [\text{Aritmética}]\\
&= (8(8^k-2^k)+2^k\cdot 6) \textbf{ mod } 6 & [\text{Aritmética}]\\
&= ((((8 \textbf{ mod } 6)((8^k-2^k) \textbf{ mod } 6)) \textbf{ mod } 6)+2^k\cdot 6) \textbf{ mod } 6 & [\text{Aritmética}]\\
&= ((((8 \textbf{ mod } 6)\cdot 0) \textbf{ mod } 6)+2^k\cdot 6) \textbf{ mod } 6 & [\text{Hipótese de Indução}]\\
&= ((0 \textbf{ mod } 6)+2^k\cdot 6) \textbf{ mod } 6 & [\text{Aritmética}]\\
&= (0+2^k\cdot 6) \textbf{ mod } 6 & [\text{Def. } \textbf{mod}\ ]\\
&= (2^k\cdot 6) \textbf{ mod } 6 & [\text{Aritmética}]\\
&= 0 & [\text{Def. } \textbf{mod}\ ]
\end{aligned}$$

2. $\{1,0\ pt\}$ Seja $P(n) = \left(\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$.
   Prove por indução que $P(n)$ é verdade para $n\geq 1$.

- Mostre seus cálculos;
- Escreva o **objetivo de prova** do caso base e do passo indutivo.
- Escreva a **hipótese de indução**
- Justifique da melhor forma possível cada passo de prova.
- Utilize a Equação 1 abaixo caso precise:

$$\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6} \qquad [1]$$

Resposta:
Critérios de correção:
Objetivo de prova da base: $\{0,2\ pt\}$
Prova da base: $\{0,2\ pt\}$
Objetivo de prova do passo indutivo: $\{0,2\ pt\}$
Hipótese de indução: $\{0,2\ pt\}$
Prova do passo indutivo: $\{0,2\ pt\}$

Base. Objetivo de prova: $\sum_{i=1}^{1} i^2 \ = \ \dfrac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$

Prova:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{1} i^2 \\ & = 1^2 && [\text{Def. } \textstyle\sum] \\ & = 1 && [1^2 = 1] \\ & = \tfrac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} && [\text{Aritmética}] \end{aligned}$$

Indução. Objetivo de prova: $\sum_{i=1}^{k+1} i^2 \ = \ \dfrac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}$

Hipótese de indução: $\sum_{i=1}^{k} i^2 \ = \ \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

Prova:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{k+1} i^2 \\ & = \sum_{i=1}^{k} i^k + (k+1)^2 && [\text{Def. } \textstyle\sum] \\ & = \tfrac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 && [\text{Hipótese de Indução}] \\ & = \tfrac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6} && [\text{Denominador comum}] \\ & = \tfrac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6} && [\text{Eq. 1}] \end{aligned}$$

3. Prove por indução matemática que

$$(4+10+16+\ldots+(6n-2)) = (n(3n+1))$$

para todo $n > 0$. Justifique cada passo de prova com os termos "[Aritmética]", "[Hipótese de Indução]" ou com "[100]", cuja equação é dada abaixo:

$$(3k^2+7k+4) = ((k+1)(3(k+1)+1)) \qquad [100]$$

Use, obrigatoriamente, a hipótese de indução.

Resposta:
Caso base.

$$
\begin{aligned}
&6 \cdot 1 - 2 \\
&= 4 && [\text{Aritmética}] \\
&= 3 + 1 && [\text{Aritmética}] \\
&= 3 \cdot 1 + 1 && [\text{Aritmética}] \\
&= 1 \cdot (3 \cdot 1 + 1) && [\text{Aritmética}]
\end{aligned}
$$

Passo indutivo.

$$
\begin{aligned}
&4 + 10 + 16 + \ldots + (6k - 2) + (6(k + 1) - 2) \\
&= k(3k + 1) + (6(k + 1) - 2) && [\text{Hipótese de Indução}] \\
&= 3k^2 + k + 6k + 6 - 2 && [\text{Aritmética}] \\
&= 3k^2 + 7k + 4 && [\text{Aritmética}] \\
&= (k + 1)(3(k + 1) + 1) && [100]
\end{aligned}
$$

Rascunho (opcional)

a) Qual o objetivo de prova do caso base?
Resposta: $6 \cdot 1 - 2 = 1 \cdot (3 \cdot 1 + 1)$

b) Prove o caso base.
Resposta:

$$
\begin{aligned}
&6 \cdot 1 - 2 \\
&= 4 && [\text{Aritmética}] \\
&= 3 + 1 && [\text{Aritmética}] \\
&= 3 \cdot 1 + 1 && [\text{Aritmética}] \\
&= 1 \cdot (3 \cdot 1 + 1) && [\text{Aritmética}]
\end{aligned}
$$

c) Qual o objetivo de prova do passo indutivo?
Resposta: $(4 + 10 + 16 + \ldots + (6k - 2) + (6(k + 1) - 2)) = ((k + 1) \cdot (3 \cdot (k + 1) + 1))$

d) Qual a hipótese de indução?
Resposta: $(4 + 10 + 16 + \ldots + (6k - 2)) = (k(3k + 1))$

e) Prove o passo indutivo. **Resposta:**

$$
\begin{aligned}
&4 + 10 + 16 + \ldots + (6k - 2) + (6(k + 1) - 2) \\
&= k(3k + 1) + (6(k + 1) - 2) && [\text{Hipótese de Indução}] \\
&= 3k^2 + k + 6k + 6 - 2 && [\text{Aritmética}] \\
&= 3k^2 + 7k + 4 && [\text{Aritmética}] \\
&= (k + 1)(3(k + 1) + 1) && [100]
\end{aligned}
$$

4. Prove por indução matemática que

$$n + n = 2n$$

para todo $n \geq 0$.

Justifique cada passo com "Aritmética", "Hipótese de Indução" ou com uma das equações abaixo.

$$\begin{array}{ll} 2(x+1) = 2x+2 & [100] \\ (x+y)+(x+y) = (x+x)+(y+y) & [101] \\ (1+1) = 2 & [102] \end{array}$$

Use, obrigatoriamente, a hipótese de indução.

Resposta:
Caso Base.

$$\begin{array}{ll} 0+0 & \\ = 0 & [\text{Aritmética}] \\ = 2 \cdot 0 & [\text{Aritmética}] \end{array}$$

Passo Indutivo.

$$\begin{array}{lr} (k+1)+(k+1) & \\ = (k+k)+(1+1) & [101] \\ = 2k+(1+1) & [\text{Hipótese de Indução}] \\ = 2k+2 & [102] \\ = 2(k+1) & [100] \end{array}$$

Rascunho (opcional)

a) Qual o objetivo de prova do caso base?
Resposta: $0+0 = 2 \cdot 0$

b) Prove o caso base.
Resposta:

$$\begin{array}{ll} 0+0 & \\ = 0 & [\text{Aritmética}] \\ = 2 \cdot 0 & [\text{Aritmética}] \end{array}$$

c) Qual o objetivo de prova do passo indutivo?
Resposta: $(k+1)+(k+1) = 2(k+1)$

d) Qual a hipótese de indução?
Resposta: $k+k = 2k$

e) Prove o passo indutivo. **Resposta:**

$$\begin{array}{lr} (k+1)+(k+1) & \\ = (k+k)+(1+1) & [101] \\ = 2k+(1+1) & [\text{Hipótese de Indução}] \\ = 2k+2 & [102] \\ = 2(k+1) & [100] \end{array}$$

5. Seja a função F definida da seguinte forma:

$$\begin{array}{l} F(1) = 5 \\ F(n) = F(n-1) + 5n \end{array}$$

Queremos provar por **indução matemática** que $5+10+15+\ldots+5n = F(n)$, para todo $n > 0$.

Justifique cada passo de prova com “Aritmética”, “Definição de F” ou “Hipótese de Indução”.

Use, obrigatoriamente, a hipótese de indução.

Resposta:
Caso base.

$$\begin{aligned} & 5 \cdot 1 \\ & = 5 && \text{[Aritmética]} \\ & = F(1) && \text{[Definição de } F(n)\text{]} \end{aligned}$$

Passo indutivo.

$$\begin{aligned} & 5 + 10 + 15 + \ldots + 5k + 5(k+1) \\ & = F(k) + 5(k+1) && \text{[Hipótese de Indução]} \\ & = F((k+1)-1) + 5(k+1) && \text{[Aritmética]} \\ & = F(k+1) && \text{[Definição de } F\text{]} \end{aligned}$$

Rascunho (opcional):

a) Qual o objetivo de prova do caso base?
Resposta: $5 \cdot 1 = F(1)$.

b) Prove o caso base.
Resposta:

$$\begin{aligned} & 5 \cdot 1 \\ & = 5 && \text{[Aritmética]} \\ & = F(1) && \text{[Definição de } F(n)\text{]} \end{aligned}$$

c) Qual o objetivo de prova do passo indutivo?
Resposta: $5 + 10 + 15 + \ldots + 5k + 5(k+1) = F(k+1)$.

d) Qual a hipótese de indução?
Resposta: $5 + 10 + 15 + \ldots + 5k = F(k)$.

e) Prove o passo indutivo.
Resposta:

$$\begin{aligned} & 5 + 10 + 15 + \ldots + 5k + 5(k+1) \\ & = F(k) + 5(k+1) && \text{[Hipótese de Indução]} \\ & = F((k+1)-1) + 5(k+1) && \text{[Aritmética]} \\ & = F(k+1) && \text{[Definição de } F\text{]} \end{aligned}$$

6. Prove por indução matemática que todo número par, ao ser dividido por 2, tem resto 0. Ou seja, prove por indução matemática que $(2n \textbf{ mod } 2) = 0$ para todo $n \geq 0$.

   Justifique seus passos de prova com “Aritmética”, “Hipótese de Indução” ou “[1]”, onde [1] é a equação abaixo:

$$((2k+2) \textbf{ mod } 2) \quad = \quad (((2k \textbf{ mod } 2) + (2 \textbf{ mod } 2)) \textbf{ mod } 2) \quad [1]$$

   Use, obrigatoriamente, a hipótese de indução.

Resposta:
Caso base.

$$\begin{aligned}&((2 \cdot 0)\ \mathbf{mod}\ 2) && \\ &= 0\ \mathbf{mod}\ 2 && [\text{Aritmética}] \\ &= 0 && [\text{Aritmética}]\end{aligned}$$

Passo indutivo.

$$\begin{aligned}&2(k+1)\ \mathbf{mod}\ 2 && \\ &= (2k+2)\ \mathbf{mod}\ 2 && [\text{Aritmética}] \\ &= ((2k\ \mathbf{mod}\ 2) + (2\ \mathbf{mod}\ 2))\ \mathbf{mod}\ 2 && [1] \\ &= (0 + (2\ \mathbf{mod}\ 2))\ \mathbf{mod}\ 2 && [\text{Hipótese de Indução}] \\ &= (0+0)\ \mathbf{mod}\ 2 && [\text{Aritmética}] \\ &= 0\ \mathbf{mod}\ 2 && [\text{Aritmética}] \\ &= 0 && [\text{Aritmética}]\end{aligned}$$

Rascunho (opcional):

a) Qual o objetivo de prova do caso base?
Resposta: $((2 \cdot 0)\ \mathbf{mod}\ 2) = 0$.

b) Prove o caso base.
Resposta:

$$\begin{aligned}&((2 \cdot 0)\ \mathbf{mod}\ 2) && \\ &= 0\ \mathbf{mod}\ 2 && [\text{Aritmética}] \\ &= 0 && [\text{Aritmética}]\end{aligned}$$

c) Qual o objetivo de prova do passo indutivo?
Resposta: $(2(k+1)\ \mathbf{mod}\ 2) = 0$.

d) Qual a hipótese de indução?
Resposta: $(2k\ \mathbf{mod}\ 2) = 0$.

e) Prove o passo indutivo.
Resposta:

$$\begin{aligned}&2(k+1)\ \mathbf{mod}\ 2 && \\ &= (2k+2)\ \mathbf{mod}\ 2 && [\text{Aritmética}] \\ &= ((2k\ \mathbf{mod}\ 2) + (2\ \mathbf{mod}\ 2))\ \mathbf{mod}\ 2 && [1] \\ &= (0 + (2\ \mathbf{mod}\ 2))\ \mathbf{mod}\ 2 && [\text{Hipótese de Indução}] \\ &= (0+0)\ \mathbf{mod}\ 2 && [\text{Aritmética}] \\ &= 0\ \mathbf{mod}\ 2 && [\text{Aritmética}] \\ &= 0 && [\text{Aritmética}]\end{aligned}$$

7. Prove por indução matemática que todo número ímpar, ao ser dividido por 2, tem resto 1. Ou seja, prove que $((2n-1)\ \mathbf{mod}\ 2) = 1$ para todo $n > 0$.

   Justifique seus passos de prova com “Aritmética”, “Hipótese de Indução” ou “[1]”, onde [1] é a equação abaixo:

$$(((2k-1)+2)\ \mathbf{mod}\ 2) \quad = \quad ((((2k-1)\ \mathbf{mod}\ 2) + (2\ \mathbf{mod}\ 2))\ \mathbf{mod}\ 2) \quad [1]$$

   Use, obrigatoriamente, a hipótese de indução.

Resposta:

Caso base.

$$
\begin{array}{ll}
((2 \cdot 1 - 1) \textbf{ mod } 2) & \\
= (2 - 1) \textbf{ mod } 2 & [\text{Aritmética}] \\
= 1 \textbf{ mod } 2 & [\text{Aritmética}] \\
= 1 & [\text{Aritmética}]
\end{array}
$$

Passo Indutivo.

$$
\begin{array}{lr}
(2(k+1) - 1) \textbf{ mod } 2 & \\
= (2k + 2 - 1) \textbf{ mod } 2 & [\text{Aritmética}] \\
= ((2k - 1) + 2) \textbf{ mod } 2 & [\text{Aritmética}] \\
= (((2k - 1) \textbf{ mod } 2) + (2 \textbf{ mod } 2)) \textbf{ mod } 2 & [1] \\
= (1 + (2 \textbf{ mod } 2)) \textbf{ mod } 2 & [\text{Hipótese de Indução}] \\
= (1 + 0) \textbf{ mod } 2 & [\text{Aritmética}] \\
= 1 \textbf{ mod } 2 & [\text{Aritmética}] \\
= 1 & [\text{Aritmética}]
\end{array}
$$

Rascunho (opcional):

a) Qual o objetivo de prova do caso base?
Resposta: $((2 \cdot 1 - 1) \textbf{ mod } 2) = 1$.

b) Prove o caso base.
Resposta:

$$
\begin{array}{ll}
((2 \cdot 1 - 1) \textbf{ mod } 2) & \\
= (2 - 1) \textbf{ mod } 2 & [\text{Aritmética}] \\
= 1 \textbf{ mod } 2 & [\text{Aritmética}] \\
= 1 & [\text{Aritmética}]
\end{array}
$$

c) Qual o objetivo de prova do passo indutivo?
Resposta: $((2(k+1) - 1) \textbf{ mod } 2) = 1$.

d) Qual a hipótese de indução?
Resposta: $((2k - 1) \textbf{ mod } 2) = 1$.

e) Prove o passo indutivo.
Resposta:

$$
\begin{array}{lr}
(2(k+1) - 1) \textbf{ mod } 2 & \\
= (2k + 2 - 1) \textbf{ mod } 2 & [\text{Aritmética}] \\
= ((2k - 1) + 2) \textbf{ mod } 2 & [\text{Aritmética}] \\
= (((2k - 1) \textbf{ mod } 2) + (2 \textbf{ mod } 2)) \textbf{ mod } 2 & [1] \\
= (1 + (2 \textbf{ mod } 2)) \textbf{ mod } 2 & [\text{Hipótese de Indução}] \\
= (1 + 0) \textbf{ mod } 2 & [\text{Aritmética}] \\
= 1 \textbf{ mod } 2 & [\text{Aritmética}] \\
= 1 & [\text{Aritmética}]
\end{array}
$$

8. Prove por indução matemática que

$$(0 \textbf{ mod } 2) \cdot (2 \textbf{ mod } 2) \cdot (4 \textbf{ mod } 2) \cdot (6 \textbf{ mod } 2) \cdot \ldots \cdot (2n \textbf{ mod } 2) = 0$$

para todo $n \geq 0$.

Justifique seus passos de prova com “Aritmética” ou “Hipótese de Indução”.

Use, obrigatoriamente, a hipótese de indução.

Resposta:
Caso base.

$$\begin{array}{ll} ((2 \cdot 0) \ \mathbf{mod} \ 2) & \\ = 0 \ \mathbf{mod} \ 2 & [\text{Aritmética}] \\ = 0 & [\text{Aritmética}] \end{array}$$

Passo indutivo.

$$\begin{array}{lr} (0 \ \mathbf{mod} \ 2) \cdot (2 \ \mathbf{mod} \ 2) \cdot \ldots \cdot (2k \ \mathbf{mod} \ 2) \cdot (2(k+1) \ \mathbf{mod} \ 2) & \\ = 0 \cdot (2(k+1) \ \mathbf{mod} \ 2) & [\text{Hipótese de Indução}] \\ = 0 & [\text{Aritmética}] \end{array}$$

Rascunho (opcional):

a) Qual o objetivo de prova do caso base?
Resposta: $((2 \cdot 0) \ \mathbf{mod} \ 2) = 0$.

b) Prove o caso base.
Resposta:

$$\begin{array}{ll} ((2 \cdot 0) \ \mathbf{mod} \ 2) & \\ = 0 \ \mathbf{mod} \ 2 & [\text{Aritmética}] \\ = 0 & [\text{Aritmética}] \end{array}$$

c) Qual o objetivo de prova do passo indutivo?
Resposta:
$(0 \ \mathbf{mod} \ 2) \cdot (2 \ \mathbf{mod} \ 2) \cdot \ldots \cdot (2k \ \mathbf{mod} \ 2) \cdot (2(k+1) \ \mathbf{mod} \ 2) = 0$

d) Qual a hipótese de indução?
Resposta:
$(0 \ \mathbf{mod} \ 2) \cdot (2 \ \mathbf{mod} \ 2) \cdot \ldots \cdot (2k \ \mathbf{mod} \ 2) = 0$

e) Prove o passo indutivo.
Resposta:

$$\begin{array}{lr} (0 \ \mathbf{mod} \ 2) \cdot (2 \ \mathbf{mod} \ 2) \cdot \ldots \cdot (2k \ \mathbf{mod} \ 2) \cdot (2(k+1) \ \mathbf{mod} \ 2) & \\ = 0 \cdot (2(k+1) \ \mathbf{mod} \ 2) & [\text{Hipótese de Indução}] \\ = 0 & [\text{Aritmética}] \end{array}$$

9. Prove por indução matemática que

$$n + n + n + n = 4n$$

para todo $n \geq 0$.

Justifique seus passos de prova com “Aritmética” ou “Hipótese de Indução”.

Use, obrigatoriamente, a hipótese de indução.

Resposta:

Caso base.

$$\begin{aligned}
&0+0+0+0 && \\
&=0 && \text{[Aritmética]}\\
&=4\cdot 0 && \text{[Aritmética]}
\end{aligned}$$

Passo indutivo.

$$\begin{aligned}
&(k+1)+(k+1)+(k+1)+(k+1) && \\
&=(k+k+k+k)+4 && \text{[Aritmética]}\\
&=4k+4 && \text{[Hipótese de Indução]}\\
&=4(k+1) && \text{[Aritmética]}
\end{aligned}$$

Rascunhos (opcional):

a) Qual o objetivo de prova do caso base?
Resposta: $0+0+0+0=4\cdot 0$.

b) Prove o caso base.
Resposta:

$$\begin{aligned}
&0+0+0+0 && \\
&=0 && \text{[Aritmética]}\\
&=4\cdot 0 && \text{[Aritmética]}
\end{aligned}$$

c) Qual o objetivo de prova do passo indutivo?
Resposta:
$(k+1)+(k+1)+(k+1)+(k+1)=4\cdot(k+1)$

d) Qual a hipótese de indução?
Resposta:
$k+k+k+k=4k$

e)$\{0,40\ pt\}$ Prove o passo indutivo.
Resposta:

$$\begin{aligned}
&(k+1)+(k+1)+(k+1)+(k+1) && \\
&=(k+k+k+k)+4 && \text{[Aritmética]}\\
&=4k+4 && \text{[Hipótese de Indução]}\\
&=4(k+1) && \text{[Aritmética]}
\end{aligned}$$

10. Prove por indução matemática que

$$(1 \textbf{ mod } 2)+(3 \textbf{ mod } 2)+(5 \textbf{ mod } 2)+\ldots+((2n-1) \textbf{ mod } 2)=n$$

para todo $n>0$.

Justifique seus passos de prova com “Aritmética”, “Hipótese de Indução” ou “[100]”, onde [100] é a equação dada (de graça) abaixo:

$$((2k+1) \textbf{ mod } 2)=1 \qquad [100]$$

Use, **obrigatoriamente**, a hipótese de indução.

Resposta:
Caso base.

$$\begin{aligned}
&1 \textbf{ mod } 2 && \\
&=1 && \text{[Aritmética]}
\end{aligned}$$

Passo indutivo.

$$\begin{aligned}
&(1 \textbf{ mod } 2) + (3 \textbf{ mod } 2) + (5 \textbf{ mod } 2) + \ldots \\
&\quad \ldots + ((2k-1) \textbf{ mod } 2) + ((2(k+1)-1) \textbf{ mod } 2) \\
&= k + ((2(k+1)-1) \textbf{ mod } 2) && \text{[Hipótese de Indução]} \\
&= k + ((2k+2-1) \textbf{ mod } 2) && \text{[Aritmética]} \\
&= k + ((2k+1) \textbf{ mod } 2) && \text{[Aritmética]} \\
&= k+1 && \text{[100]}
\end{aligned}$$

Rascunho (opcional):

a) Qual o objetivo de prova do caso base?
Resposta: $(1 \textbf{ mod } 2) = 1$.

b) Prove o caso base.
Resposta:

$$\begin{aligned}
&1 \textbf{ mod } 2 \\
&= 1 && \text{[Aritmética]}
\end{aligned}$$

c) Qual o objetivo de prova do passo indutivo?
Resposta:
$(1 \textbf{ mod } 2) + (3 \textbf{ mod } 2) + (5 \textbf{ mod } 2) + \ldots + ((2k-1) \textbf{ mod } 2) + ((2(k+1)-1) \textbf{ mod } 2) = (k+1)$

d) Qual a hipótese de indução?
Resposta:
$(1 \textbf{ mod } 2) + (3 \textbf{ mod } 2) + (5 \textbf{ mod } 2) + \ldots + ((2k-1) \textbf{ mod } 2) = k$

e) Prove o passo indutivo.
Resposta:

$$\begin{aligned}
&(1 \textbf{ mod } 2) + (3 \textbf{ mod } 2) + (5 \textbf{ mod } 2) + \ldots \\
&\quad \ldots + ((2k-1) \textbf{ mod } 2) + ((2(k+1)-1) \textbf{ mod } 2) \\
&= k + ((2(k+1)-1) \textbf{ mod } 2) && \text{[Hipótese de Indução]} \\
&= k + ((2k+2-1) \textbf{ mod } 2) && \text{[Aritmética]} \\
&= k + ((2k+1) \textbf{ mod } 2) && \text{[Aritmética]} \\
&= k+1 && \text{[100]}
\end{aligned}$$

11. Prove por indução matemática que

$$(1+2+3+\ldots+n) + (1+2+3+\ldots+n) = n(n+1)$$

para todo $n > 0$.

Justifique seus passos de prova com "Aritmética" ou "Hipótese de Indução". Utilize, **obrigatoriamente**, a hipótese de indução na sua prova.

Resposta:
Caso base.

$$\begin{aligned}
&1+1 \\
&= 2 && \text{[Aritmética]} \\
&= 1 \cdot 2 && \text{[Aritmética]} \\
&= 1(1+1) && \text{[Aritmética]}
\end{aligned}$$

Passo indutivo.

$$
\begin{aligned}
&(1+2+\ldots+k+(k+1))+(1+2+\ldots+k+(k+1)) && \\
&= (1+2+\ldots+k)+(1+2+\ldots+k)+(k+1)+(k+1) && \text{[Aritmética]}\\
&= k(k+1)+(k+1)+(k+1) && \text{[Hipótese de Indução]}\\
&= (k+1)(k+1+1) && \text{[Aritmética]}\\
&= (k+1)((k+1)+1) && \text{[Aritmética]}
\end{aligned}
$$

Rascunho (opcional):

a) Qual o objetivo de prova do caso base?
Resposta: $1+1 = 1(1+1)$.

b) Prove o caso base.
Resposta:

$$
\begin{aligned}
&1+1 && \\
&= 2 && \text{[Aritmética]}\\
&= 1\cdot 2 && \text{[Aritmética]}\\
&= 1(1+1) && \text{[Aritmética]}
\end{aligned}
$$

c) Qual o objetivo de prova do passo indutivo?
Resposta:
$(1+2+3+\ldots+k+(k+1))+(1+2+3+\ldots+k+(k+1)) = (k+1)((k+1)+1)$

d) Qual a hipótese de indução?
Resposta:
$(1+2+3+\ldots+k)+(1+2+3+\ldots+k) = k(k+1)$

e) Prove o passo indutivo.
Resposta:

$$
\begin{aligned}
&(1+2+\ldots+k+(k+1))+(1+2+\ldots+k+(k+1)) && \\
&= (1+2+\ldots+k)+(1+2+\ldots+k)+(k+1)+(k+1) && \text{[Aritmética]}\\
&= k(k+1)+(k+1)+(k+1) && \text{[Hipótese de Indução]}\\
&= (k+1)(k+1+1) && \text{[Aritmética]}\\
&= (k+1)((k+1)+1) && \text{[Aritmética]}
\end{aligned}
$$

12. Prove por indução matemática que

$$2^n = 2\cdot 2^{n-1}$$

para todo $n > 0$.

Justifique seus passos de prova com “Aritmética” ou “Hipótese de Indução”.
Utilize, **obrigatoriamente**, a hipótese de indução na sua prova.

Resposta:

Caso base.

$$
\begin{aligned}
&2^1 && \\
&= 2 && \text{[Aritmética]}\\
&= 2\cdot 1 && \text{[Aritmética]}\\
&= 2\cdot 2^0 && \text{[Aritmética]}\\
&= 2\cdot 2^{1-1} && \text{[Aritmética]}
\end{aligned}
$$

Passo indutivo.

$$\begin{array}{lr} 2^{k+1} & \\ = 2 \cdot 2^k & [\text{Aritmética}] \\ = 2 \cdot 2 \cdot 2^{k-1} & [\text{Hipótese de Indução}] \\ = 2 \cdot 2^{(k-1)+1} & [\text{Aritmética}] \\ = 2 \cdot 2^{(k+1)-1} & [\text{Aritmética}] \end{array}$$

Rascunho (opcional):

a) Qual o objetivo de prova do caso base?
Resposta: $2^1 = 2 \cdot 2^{1-1}$.

b) Prove o caso base.
Resposta:

$$\begin{array}{ll} 2^1 & \\ = 2 & [\text{Aritmética}] \\ = 2 \cdot 1 & [\text{Aritmética}] \\ = 2 \cdot 2^0 & [\text{Aritmética}] \\ = 2 \cdot 2^{1-1} & [\text{Aritmética}] \end{array}$$

c) Qual o objetivo de prova do passo indutivo?
Resposta:
$2^{k+1} = 2 \cdot 2^{(k+1)-1}$

d) Qual a hipótese de indução?
Resposta:
$2^k = 2 \cdot 2^{k-1}$

e) Prove o passo indutivo.
Resposta:

$$\begin{array}{lr} 2^{k+1} & \\ = 2 \cdot 2^k & [\text{Aritmética}] \\ = 2 \cdot 2 \cdot 2^{k-1} & [\text{Hipótese de Indução}] \\ = 2 \cdot 2^{(k-1)+1} & [\text{Aritmética}] \\ = 2 \cdot 2^{(k+1)-1} & [\text{Aritmética}] \end{array}$$

13. Prove por indução matemática que

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

para todo $n > 0$.

Justifique seus passos de prova com "Aritmética", "Hipótese de Indução", [1] ou [2], dados abaixo.

$$\begin{array}{lr} \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2} + (k+1)\right)^2 & [1] \\ (k+1)(k+2) = k(k+1) + 2(k+1) & [2] \end{array}$$

Utilize, obrigatoriamente, a hipótese de indução na sua prova.

Resposta:

Caso base.

$$
\begin{aligned}
& 1^3 \\
& = 1 && \text{[Aritmética]} \\
& = \left(\tfrac{1\cdot(1+1)}{2}\right)^2 && \text{[Aritmética]}
\end{aligned}
$$

Passo indutivo.

$$
\begin{aligned}
& 1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 \\
& = \left(\tfrac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 && \text{[Hipótese de Indução]} \\
& = \left(\tfrac{k(k+1)}{2} + (k+1)\right)^2 && [1] \\
& = \left(\tfrac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\right)^2 && \text{[Aritmética]} \\
& = \left(\tfrac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2 && [2] \\
& = \left(\tfrac{(k+1)((k+1)+1)}{2}\right)^2 && \text{[Aritmética]}
\end{aligned}
$$

Rascunho (opcional):

a) Qual o objetivo de prova do caso base?

Resposta: $1^3 = \left(\frac{1\cdot(1+1)}{2}\right)^2$

b) Prove o caso base.

Resposta:

$$
\begin{aligned}
& 1^3 \\
& = 1 && \text{[Aritmética]} \\
& = \left(\tfrac{1\cdot(1+1)}{2}\right)^2 && \text{[Aritmética]}
\end{aligned}
$$

c) Qual o objetivo de prova do passo indutivo?

Resposta: $1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}\right)^2$

d) Qual a hipótese de indução?

Resposta: $1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$

e) Prove o passo indutivo.

Resposta:

$$
\begin{aligned}
& 1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 \\
& = \left(\tfrac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 && \text{[Hipótese de Indução]} \\
& = \left(\tfrac{k(k+1)}{2} + (k+1)\right)^2 && [1] \\
& = \left(\tfrac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\right)^2 && \text{[Aritmética]} \\
& = \left(\tfrac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2 && [2] \\
& = \left(\tfrac{(k+1)((k+1)+1)}{2}\right)^2 && \text{[Aritmética]}
\end{aligned}
$$

14. Prove por indução matemática que

$$(0 + 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n) \textbf{ mod } 2 = 0$$

para todo $n \geq 0$.

Justifique seus passos de prova com "Aritmética", "Hipótese de Indução" ou [1], dado abaixo. Utilize, obrigatoriamente, a hipótese de indução na sua prova.

$$\begin{aligned}&(0 + 2 + 4 + 6 + \ldots + 2k + 2(k+1)) \textbf{ mod } 2\\&= (((0 + 2 + 4 + 6 + \ldots + 2k) \textbf{ mod } 2) + (2(k+1) \textbf{ mod } 2)) \textbf{ mod } 2 \quad [1]\end{aligned}$$

Resposta:

Caso base.

$$\begin{aligned}&0 \textbf{ mod } 2\\&= 0 && \text{[Aritmética]}\end{aligned}$$

Passo indutivo.

$$\begin{aligned}&(0 + 2 + 4 + 6 + \ldots + 2k + 2(k+1)) \textbf{ mod } 2\\&= (((0 + 2 + 4 + 6 + \ldots + 2k) \textbf{ mod } 2) + (2(k+1) \textbf{ mod } 2)) \textbf{ mod } 2 && [1]\\&= (0 + (2(k+1) \textbf{ mod } 2)) \textbf{ mod } 2 && \text{[H.I.]}\\&= (0 + 0) \textbf{ mod } 2 && \text{[Aritmética]}\\&= 0 \textbf{ mod } 2 && \text{[Aritmética]}\\&= 0 && \text{[Aritmética]}\end{aligned}$$

Rascunho (opcional):

a) Qual o objetivo de prova do caso base?
Resposta: $0 \textbf{ mod } 2 = 0$

b) Prove o caso base.
Resposta:

$$\begin{aligned}&0 \textbf{ mod } 2\\&= 0 && \text{[Aritmética]}\end{aligned}$$

c) Qual o objetivo de prova do passo indutivo?
Resposta: $(0 + 2 + 4 + 6 + \ldots + 2k + 2(k+1)) \textbf{ mod } 2 = 0$

d) Qual a hipótese de indução?
Resposta: $(0 + 2 + 4 + 6 + \ldots + 2k) \textbf{ mod } 2 = 0$

e) Prove o passo indutivo.
Resposta:

$$\begin{aligned}&(0 + 2 + 4 + 6 + \ldots + 2k + 2(k+1)) \textbf{ mod } 2\\&= (((0 + 2 + 4 + 6 + \ldots + 2k) \textbf{ mod } 2) + (2(k+1) \textbf{ mod } 2)) \textbf{ mod } 2 && [1]\\&= (0 + (2(k+1) \textbf{ mod } 2)) \textbf{ mod } 2 && \text{[H.I.]}\\&= (0 + 0) \textbf{ mod } 2 && \text{[Aritmética]}\\&= 0 \textbf{ mod } 2 && \text{[Aritmética]}\\&= 0 && \text{[Aritmética]}\end{aligned}$$

15. Prove por indução matemática que

$$\frac{1+2+3+\ldots+n}{n} = \frac{n+1}{2}$$

para todo $n > 0$.

Justifique seus passos de prova com "Aritmética", "Hipótese de Indução" ou [1], dado abaixo.

$$\frac{1+2+3+...+k+(k+1)}{k+1} = \left(\frac{1+2+3+...+k}{k} + \frac{k+1}{k}\right) \cdot \frac{k}{k+1} \quad [1]$$

Utilize, obrigatoriamente, a hipótese de indução na sua prova.

Resposta:

Caso base.

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{1} \\ &= \tfrac{1+1}{1+1} && \text{[Aritmética]} \\ &= \tfrac{1+1}{2} && \text{[Aritmética]} \end{aligned}$$

Passo indutivo.

$$\begin{aligned} & \tfrac{1+2+3+...+k+(k+1)}{k+1} \\ &= \left(\tfrac{1+2+3+...+k}{k} + \tfrac{k+1}{k}\right) \cdot \tfrac{k}{k+1} && [1] \\ &= \left(\tfrac{k+1}{2} + \tfrac{k+1}{k}\right) \cdot \tfrac{k}{k+1} && \text{[Hipótese de Indução]} \\ &= \left(\tfrac{k+1}{2} \cdot \tfrac{k}{k+1}\right) + \left(\tfrac{k+1}{k} \cdot \tfrac{k}{k+1}\right) && \text{[Aritmética]} \\ &= \tfrac{k}{2} + 1 && \text{[Aritmética]} \\ &= \tfrac{k+2}{2} && \text{[Aritmética]} \\ &= \tfrac{(k+1)+1}{2} && \text{[Aritmética]} \end{aligned}$$

Rascunho (opcional):

a) Qual o objetivo de prova do caso base?
Resposta: $\frac{1}{1} = \frac{1+1}{2}$

b) Prove o caso base.
Resposta:

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{1} \\ &= \tfrac{1+1}{1+1} && \text{[Aritmética]} \\ &= \tfrac{1+1}{2} && \text{[Aritmética]} \end{aligned}$$

c) Qual o objetivo de prova do passo indutivo?
Resposta: $\frac{1+2+3+...+k+(k+1)}{k+1} = \frac{(k+1)+1}{2}$

d) Qual a hipótese de indução?
Resposta: $\frac{1+2+3+...+k}{k} = \frac{k+1}{2}$

e) Prove o passo indutivo.

Resposta:

$$
\begin{aligned}
& \tfrac{1+2+3+...+k+(k+1)}{k+1} \\
&= \left(\tfrac{1+2+3+...+k}{k} + \tfrac{k+1}{k}\right) \cdot \tfrac{k}{k+1} && [1] \\
&= \left(\tfrac{k+1}{2} + \tfrac{k+1}{k}\right) \cdot \tfrac{k}{k+1} && \text{[Hipótese de Indução]} \\
&= \left(\tfrac{k+1}{2} \cdot \tfrac{k}{k+1}\right) + \left(\tfrac{k+1}{k} \cdot \tfrac{k}{k+1}\right) && \text{[Aritmética]} \\
&= \tfrac{k}{2} + 1 && \text{[Aritmética]} \\
&= \tfrac{k+2}{2} && \text{[Aritmética]} \\
&= \tfrac{(k+1)+1}{2} && \text{[Aritmética]}
\end{aligned}
$$

16. Prove por indução matemática que

$$0 + 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n \cdot (n + 1)$$

para todo $n \geq 0$.

Justifique seus passos de prova com "Aritmética", "Hipótese de Indução" ou [1], dado abaixo.

$$k \cdot (k + 1) + 2 \cdot (k + 1) = (k + 1)(k + 2) \quad [1]$$

Utilize, obrigatoriamente, a hipótese de indução na sua prova.

Resposta:

Caso base.

$$
\begin{aligned}
& 0 \\
&= 0 \cdot 1 && \text{[Aritmética]} \\
&= 0 \cdot (0 + 1) && \text{[Aritmética]}
\end{aligned}
$$

Passo indutivo.

$$
\begin{aligned}
& 0 + 2 + 4 + 6 + \ldots + 2k + 2(k + 1) \\
&= k(k + 1) + 2(k + 1) && \text{[Hipótese de Indução]} \\
&= (k + 1)(k + 2) && [1] \\
&= (k + 1)((k + 1) + 1) && \text{[Aritmética]}
\end{aligned}
$$

Rascunho (opcional):

a) Qual o objetivo de prova do caso base?

Resposta: $0 = 0 \cdot (0 + 1)$

b) Prove o caso base.

Resposta:

$$
\begin{aligned}
& 0 \\
&= 0 \cdot 1 && \text{[Aritmética]} \\
&= 0 \cdot (0 + 1) && \text{[Aritmética]}
\end{aligned}
$$

c) Qual o objetivo de prova do passo indutivo?
Resposta: $0 + 2 + 4 + 6 + \ldots + 2k + 2(k+1) = (k+1)((k+1)+1)$

d) Qual a hipótese de indução?
Resposta: $0 + 2 + 4 + 6 + \ldots + 2k = k(k+1)$

e) Prove o passo indutivo.
Resposta:

$$\begin{array}{lr}
0 + 2 + 4 + 6 + \ldots + 2k + 2(k+1) & \\
= k(k+1) + 2(k+1) & \text{[Hipótese de Indução]} \\
= (k+1)(k+2) & [1] \\
= (k+1)((k+1)+1) & \text{[Aritmética]}
\end{array}$$

17. Prove por indução matemática que $(n!/n) = (n-1)!$, onde $n > 0$.

Justifique cada passo com os termos "[Aritmética]", "[Hipótese de Indução]", "[100]" ou "[101]", cujas equações são dadas abaixo:

$$\begin{array}{lr}
(k+1)! = ((k+1) \cdot k \cdot k!)/k & [100] \\
k \cdot (k-1)! = k! & [101]
\end{array}$$

Use, **obrigatoriamente**, a Hipótese de Indução.

Resposta:

Caso base.

$$\begin{array}{ll}
(1!/1) & \\
= (1/1) & \text{[Aritmética]} \\
= 1 & \text{[Aritmética]} \\
= 0! & \text{[Aritmética]} \\
= (1-1)! & \text{[Aritmética]}
\end{array}$$

Passo indutivo.

$$\begin{array}{lr}
(k+1)!/(k+1) & \\
= ((k+1) \cdot k \cdot k!)/k \cdot (k+1) & [100] \\
= ((k+1) \cdot k \cdot (k-1)!)/(k+1) & \text{[Hipótese de Indução]} \\
= k \cdot (k-1)! & \text{[Aritmética]} \\
= k! & [101] \\
= ((k+1)-1)! & \text{[Aritmética]}
\end{array}$$

Rascunho (opcional):

a) Qual o objetivo de prova do caso base?
Resposta: $(1!/1) = (1-1)!$

b) Prove o caso base.
Resposta:

$$\begin{array}{ll}
(1!/1) & \\
= (1/1) & \text{[Aritmética]} \\
= 1 & \text{[Aritmética]} \\
= 0! & \text{[Aritmética]} \\
= (1-1)! & \text{[Aritmética]}
\end{array}$$

c) Qual o objetivo de prova do passo indutivo?
Resposta: $((k+1)!/(k+1)) = ((k+1)-1)!$

d) Qual a hipótese de indução?
Resposta: $(k!/k) = (k-1)!$

e) Prove o passo indutivo. **Resposta:**

$$
\begin{array}{ll}
(k+1)!/(k+1) & \\
= ((k+1)\cdot k \cdot k!)/k \cdot (k+1) & [100] \\
= ((k+1)\cdot k \cdot (k-1)!)/(k+1) & [\text{Hipótese de Indução}] \\
= k \cdot (k-1)! & [\text{Aritmética}] \\
= k! & [101] \\
= ((k+1)-1)! & [\text{Aritmética}]
\end{array}
$$

18. Prove por indução matemática que

$$(3{\cdot}2^0 + 3{\cdot}2^1 + 3{\cdot}2^2 + \ldots + 3{\cdot}2^n) = (3{\cdot}2^{n+1} - 3)$$

para todo $n \geq 0$.

Justifique seus passos de prova com "Aritmética", "Hipótese de Indução" ou [100], dado abaixo.

$$3{\cdot}2^{k+1} + 3{\cdot}2^{k+1} = 3{\cdot}2{\cdot}2^{k+1} \quad [100]$$

Utilize, obrigatoriamente, a hipótese de indução na sua prova.

Resposta:

Caso base.

$$
\begin{array}{ll}
3{\cdot}2^0 & \\
= 3{\cdot}1 & [\text{Aritmética}] \\
= 3{\cdot}2 - 3 & [\text{Aritmética}] \\
= 3{\cdot}2^1 - 3 & [\text{Aritmética}] \\
= 3{\cdot}2^{0+1} - 3 & [\text{Aritmética}]
\end{array}
$$

Passo indutivo.

$$
\begin{array}{ll}
3{\cdot}2^0 + 3{\cdot}2^1 + 3{\cdot}2^2 + \ldots + 3{\cdot}2^k + 3{\cdot}2^{k+1} & \\
= 3{\cdot}2^{k+1} - 3 + 3{\cdot}2^{k+1} & [\text{Hipótese de Indução}] \\
= 3{\cdot}2{\cdot}2^{k+1} - 3 & [100] \\
= 3{\cdot}2^{(k+1)+1} - 3 & [\text{Aritmética}]
\end{array}
$$

Rascunho (opcional):

a) Qual o objetivo de prova do caso base?
Resposta: $3{\cdot}2^0 = 3{\cdot}2^{0+1} - 3$

b) Prove o caso base.
Resposta:

$$
\begin{array}{ll}
3{\cdot}2^0 & \\
= 3{\cdot}1 & [\text{Aritmética}] \\
= 3{\cdot}2 - 3 & [\text{Aritmética}] \\
= 3{\cdot}2^1 - 3 & [\text{Aritmética}] \\
= 3{\cdot}2^{0+1} - 3 & [\text{Aritmética}]
\end{array}
$$

c) Qual o objetivo de prova do passo indutivo?
Resposta: $(3{\cdot}2^0 + 3{\cdot}2^1 + 3{\cdot}2^2 + \ldots + 3{\cdot}2^k + 3{\cdot}2^{k+1}) = (3{\cdot}2^{(k+1)+1} - 3)$

d) Qual a hipótese de indução?
Resposta: $(3{\cdot}2^0 + 3{\cdot}2^1 + 3{\cdot}2^2 + \ldots + 3{\cdot}2^k = (3{\cdot}2^{k+1} - 3)$

e) Prove o passo indutivo.
Resposta:

$$
\begin{array}{ll}
3{\cdot}2^0 + 3{\cdot}2^1 + 3{\cdot}2^2 + \ldots + 3{\cdot}2^k + 3{\cdot}2^{k+1} & \\
= 3{\cdot}2^{k+1} - 3 + 3{\cdot}2^{k+1} & \text{[Hipótese de Indução]} \\
= 3{\cdot}2{\cdot}2^{k+1} - 3 & \text{[100]} \\
= 3{\cdot}2^{(k+1)+1} - 3 & \text{[Aritmética]}
\end{array}
$$

19. Prove, por indução matemática, que $\lfloor n \rfloor = \lceil n \rceil$, para todo inteiro $n \geq 0$.

Justifique cada passo com os termos "[Aritmética]", "[Hipótese de Indução]", "[100]" ou "[101]", cujas equações são dadas abaixo:

$$
\begin{array}{ll}
\lfloor k+1 \rfloor = \lfloor k \rfloor + 1 & \text{[100]} \\
\lceil k+1 \rceil = \lceil k \rceil + 1 & \text{[101]}
\end{array}
$$

Use, **obrigatoriamente**, a Hipótese de Indução.

Resposta:

Caso base.

$$
\begin{array}{ll}
\lfloor 0 \rfloor & \\
= 0 & \text{[Aritmética]} \\
= \lceil 0 \rceil & \text{[Aritmética]}
\end{array}
$$

Passo indutivo.

$$
\begin{array}{lr}
\lfloor k+1 \rfloor & \\
= \lfloor k \rfloor + 1 & \text{[100]} \\
= \lceil k \rceil + 1 & \text{[Hipótese de Indução]} \\
= \lceil k+1 \rceil & \text{[101]}
\end{array}
$$

Rascunho (opcional).

a) Qual o objetivo de prova do caso base?
Resposta: $\lfloor 0 \rfloor = \lceil 0 \rceil$

b) Prove o caso base.
Resposta:

$$
\begin{array}{ll}
\lfloor 0 \rfloor & \\
= 0 & \text{[Aritmética]} \\
= \lceil 0 \rceil & \text{[Aritmética]}
\end{array}
$$

c) Qual o objetivo de prova do passo indutivo?
Resposta: $\lfloor k+1 \rfloor = \lceil k+1 \rceil$

d) Qual a hipótese de indução?
Resposta: $\lfloor k \rfloor = \lceil k \rceil$

e) Prove o passo indutivo. **Resposta:**

$$
\begin{array}{lr}
\lfloor k+1 \rfloor & \\
= \lfloor k \rfloor + 1 & [100] \\
= \lceil k \rceil + 1 & [\text{Hipótese de Indução}] \\
= \lceil k+1 \rceil & [101]
\end{array}
$$

20. Prove por indução matemática que

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) = \frac{n!}{(n-3)!}$$

para todo $n \geq 3$.

Justifique cada passo de prova com "Aritmética", "Definição de Fatorial", "Hipótese de Indução", [100] ou [101], dados abaixo. Utilize, obrigatoriamente, a hipótese de indução na sua prova.

$$
\begin{array}{lr}
(k+1) \cdot (k) \cdot (k-1) = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \frac{k+1}{k-2} & [100] \\
\frac{k!}{(k-3)!} \cdot \frac{k+1}{k-2} = \frac{(k+1)!}{(k-2)!} & [101]
\end{array}
$$

Definição de fatorial:

$$
\begin{array}{l}
0! = 1 \\
(n+1)! = (n+1) \cdot n!
\end{array}
$$

Resposta:

Caso base.

$$
\begin{array}{lr}
3 \cdot (3-1) \cdot (3-2) & \\
= 3 \cdot 2 \cdot 1 & [\text{Aritmética}] \\
= 6 & [\text{Aritmética}] \\
= 3! & [\text{Definição de Fatorial}] \\
= \frac{3!}{1} & [\text{Aritmética}] \\
= \frac{3!}{0!} & [\text{Definição de Fatorial}] \\
= \frac{3!}{(3-3)!} & [\text{Aritmética}]
\end{array}
$$

Passo indutivo.

$$
\begin{array}{lr}
(k+1) \cdot ((k+1)-1) \cdot ((k+1)-2) & \\
= (k+1) \cdot (k) \cdot (k-1) & [\text{Aritmética}] \\
= k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \frac{k+1}{k-2} & [100] \\
= \frac{k!}{(k-3)!} \cdot \frac{k+1}{k-2} & [\text{Hipótese de Indução}] \\
= \frac{(k+1)!}{(k-2)!} & [101] \\
= \frac{(k+1)!}{((k+1)-3)!} & [\text{Aritmética}]
\end{array}
$$

Rascunho (opcional).

a) Qual o objetivo de prova do caso base?
Resposta: $3 \cdot (3-1) \cdot (3-2) = \frac{3!}{(3-3)!}$

b) Prove o caso base.
Resposta:

$$\begin{aligned}
&3{\cdot}(3-1){\cdot}(3-2) && \\
&= 3{\cdot}2{\cdot}1 && \text{[Aritmética]}\\
&= 6 && \text{[Aritmética]}\\
&= 3! && \text{[Definição de Fatorial]}\\
&= \tfrac{3!}{1} && \text{[Aritmética]}\\
&= \tfrac{3!}{0!} && \text{[Definição de Fatorial]}\\
&= \tfrac{3!}{(3-3)!} && \text{[Aritmética]}
\end{aligned}$$

c) Qual o objetivo de prova do passo indutivo?
Resposta: $(k+1){\cdot}((k+1)-1){\cdot}((k+1)-2) = \frac{(k+1)!}{((k+1)-3)!}$

d) Qual a hipótese de indução?
Resposta: $k{\cdot}(k-1){\cdot}(k-2) = \frac{k!}{(k-3)!}$

e) Prove o passo indutivo.
Resposta:

$$\begin{aligned}
&(k+1){\cdot}((k+1)-1){\cdot}((k+1)-2) && \\
&= (k+1){\cdot}(k){\cdot}(k-1) && \text{[Aritmética]}\\
&= k{\cdot}(k-1){\cdot}(k-2){\cdot}\tfrac{k+1}{k-2} && \text{[100]}\\
&= \tfrac{k!}{(k-3)!}{\cdot}\tfrac{k+1}{k-2} && \text{[Hipótese de Indução]}\\
&= \tfrac{(k+1)!}{(k-2)!} && \text{[101]}\\
&= \tfrac{(k+1)!}{((k+1)-3)!} && \text{[Aritmética]}
\end{aligned}$$

21. Prove por indução matemática que

$$((2+4+6+\ldots+2n)-(1+3+5+\ldots+(2n-1))) \;=\; n$$

para todo inteiro $n > 0$.

Justifique cada passo de prova com os termos "[Aritmética]" ou "[Hipótese de Indução]". Use, obrigatoriamente, a hipótese de indução.

Resposta:
Caso base.

$$\begin{aligned}
&2-1 &&\\
&= 1 && \text{[Aritmética]}
\end{aligned}$$

Passo indutivo.

$$\begin{aligned}
&(2+4+\ldots+2k+2(k+1))-(1+3+\ldots+(2k-1)+(2(k+1)-1)) && \\
&= ((2+4+\ldots+2k)+2(k+1))-((1+3+\ldots+(2k-1))+(2(k+1)-1)) && \text{[Aritmética]}\\
&= ((2+4+\ldots+2k)-(1+3+\ldots+(2k-1))+2(k+1)-(2(k+1)-1) && \text{[Aritmética]}\\
&= k+2(k+1)-(2(k+1)-1) && \text{[Hipótese de Indução]}\\
&= k+2(k+1)-2(k+1)+1 && \text{[Aritmética]}\\
&= k+1 && \text{[Aritmética]}
\end{aligned}$$

Rascunho (opcional)

a) Qual o objetivo de prova do caso base?
Resposta: 2 - 1 = 1

b) Prove o caso base.
Resposta:

$$\begin{aligned}&2-1\\&=1 \quad \text{[Aritmética]}\end{aligned}$$

c) Qual o objetivo de prova do passo indutivo?
Resposta: $(2+4+\ldots+2k+2(k+1))-(1+3+\ldots+(2k-1)+(2(k+1)-1))=(k+1)$

d) Qual a hipótese de indução?
Resposta: $(2+4+\ldots+2k)-(1+3+\ldots+(2k-1))=k$

e) Prove o passo indutivo. **Resposta:**

$$\begin{aligned}&(2+4+\ldots+2k+2(k+1))-(1+3+\ldots+(2k-1)+(2(k+1)-1))\\&=((2+4+\ldots+2k)+2(k+1))-((1+3+\ldots+(2k-1))+(2(k+1)-1)) && \text{[Aritmética]}\\&=((2+4+\ldots+2k)-(1+3+\ldots+(2k-1))+2(k+1)-(2(k+1)-1) && \text{[Aritmética]}\\&=k+2(k+1)-(2(k+1)-1) && \text{[Hipótese de Indução]}\\&=k+2(k+1)-2(k+1)+1 && \text{[Aritmética]}\\&=k+1 && \text{[Aritmética]}\end{aligned}$$

22. $\{2,0\ pt\}$ Prove por indução matemática que

$$((n\cdot(n+1))\ \mathbf{mod}\ 2)=0$$

para todo inteiro $n>0$.

Justifique cada passo de prova com os termos “[Aritmética]”, “[Hipótese de Indução]” ou as equações [100] e [101] dadas abaixo:

$$\begin{aligned}((x+y)\ \mathbf{mod}\ z) &= (((x\ \mathbf{mod}\ z)+(y\ \mathbf{mod}\ z))\ \mathbf{mod}\ z) && [100]\\((x\cdot 2)\ \mathbf{mod}\ 2) &= 0 && [101]\end{aligned}$$

Use, obrigatoriamente, a hipótese de indução.

Resposta:
Caso base.

$$\begin{aligned}&(1\cdot(1+1))\ \mathbf{mod}\ 2\\&=(1\cdot 2)\ \mathbf{mod}\ 2 && \text{[Aritmética]}\\&=0 && [101]\end{aligned}$$

Passo indutivo.

$$\begin{aligned}&((k+1)((k+1)+1))\ \mathbf{mod}\ 2\\&=((k+1)(k+2))\ \mathbf{mod}\ 2 && \text{[Aritmética]}\\&=((k+1)\cdot k+(k+1)\cdot 2)\ \mathbf{mod}\ 2 && \text{[Aritmética]}\\&=(((k+1)\cdot k\ \mathbf{mod}\ 2)+((k+1)\cdot 2\ \mathbf{mod}\ 2))\ \mathbf{mod}\ 2 && [100]\\&=((k\cdot(k+1)\ \mathbf{mod}\ 2)+((k+1)\cdot 2\ \mathbf{mod}\ 2))\ \mathbf{mod}\ 2 && \text{[Aritmética]}\\&=(0+((k+1)\cdot 2\ \mathbf{mod}\ 2))\ \mathbf{mod}\ 2 && \text{[Hipótese de Indução]}\\&=(0+0)\ \mathbf{mod}\ 2 && [101]\\&=0\ \mathbf{mod}\ 2 && \text{[Aritmética]}\\&=(0\cdot 2)\ \mathbf{mod}\ 2 && \text{[Aritmética]}\\&=0 && [101]\end{aligned}$$

Rascunho (opcional)

a) Qual o objetivo de prova do caso base?
Resposta: $((1 \cdot (1+1)) \textbf{ mod } 2) = 0$

b) Prove o caso base.
Resposta:

$$\begin{array}{lr}
(1 \cdot (1+1)) \textbf{ mod } 2 & \\
= (1 \cdot 2) \textbf{ mod } 2 & [\text{Aritmética}] \\
= 0 & [101]
\end{array}$$

c) Qual o objetivo de prova do passo indutivo?
Resposta: $(((k+1)((k+1)+1)) \textbf{ mod } 2) = 0$

d) Qual a hipótese de indução?
Resposta: $(k{\cdot}(k+1) \textbf{ mod } 2) = 0$

e) Prove o passo indutivo. **Resposta:**

$$\begin{array}{lr}
((k+1)((k+1)+1)) \textbf{ mod } 2 & \\
= ((k+1)(k+2)) \textbf{ mod } 2 & [\text{Aritmética}] \\
= ((k+1){\cdot}k + (k+1){\cdot}2) \textbf{ mod } 2 & [\text{Aritmética}] \\
= (((k+1){\cdot}k \textbf{ mod } 2) + ((k+1){\cdot}2 \textbf{ mod } 2)) \textbf{ mod } 2 & [100] \\
= ((k{\cdot}(k+1) \textbf{ mod } 2) + ((k+1){\cdot}2 \textbf{ mod } 2)) \textbf{ mod } 2 & [\text{Aritmética}] \\
= (0 + ((k+1){\cdot}2 \textbf{ mod } 2)) \textbf{ mod } 2 & [\text{Hipótese de Indução}] \\
= (0+0) \textbf{ mod } 2 & [101] \\
= 0 \textbf{ mod } 2 & [\text{Aritmética}] \\
= (0 \cdot 2) \textbf{ mod } 2 & [\text{Aritmética}] \\
= 0 & [101]
\end{array}$$

23. $\{3,4\ pt\}$ Prove por indução matemática que

$$(1+2+3+\ldots+n) \cdot \left(\frac{2}{n(n+1)}\right) = 1$$

para todo inteiro $n > 0$.

Justifique cada passo de prova com os termos “[Aritmética]”, “[Hipótese de Indução]” ou as equações [100] e [101] dadas abaixo:

$$\begin{array}{lr}
(1+2+3+\ldots+k+(k+1)) \cdot \left(\frac{2}{(k+1)(k+2)}\right) & \\
\quad = (1+2+3+\ldots+k) \cdot \left(\frac{2}{k(k+1)}\right) \cdot \left(\frac{k(k+1)}{(k+1)(k+2)}\right) + (k+1) \cdot \left(\frac{2}{(k+1)(k+2)}\right) & [100]
\end{array}$$

$$\frac{k(k+1)}{(k+1)(k+2)} + (k+1) \cdot \left(\frac{2}{(k+1)(k+2)}\right) = \frac{k^2+3k+2}{(k+1)(k+2)} \qquad [101]$$

Use, obrigatoriamente, a hipótese de indução.

Resposta:
Caso base.

$$\begin{array}{lr}
1 \cdot \left(\frac{2}{1(1+1)}\right) & \\
= 1 \cdot \left(\frac{2}{2}\right) & [\text{Aritmética}] \\
= 1 & [\text{Aritmética}]
\end{array}$$

Passo indutivo.

$$
\begin{aligned}
&(1+2+3+\ldots+k+(k+1))\cdot\tfrac{2}{(k+1)((k+1)+1)} & \\
&= (1+2+3+\ldots+k+(k+1))\cdot\tfrac{2}{(k+1)(k+2)} & \text{[Aritmética]}\\
&= (1+2+3+\ldots+k)\cdot\left(\tfrac{2}{k(k+1)}\right)\cdot\left(\tfrac{k(k+1)}{(k+1)(k+2)}\right)+(k+1)\cdot\left(\tfrac{2}{(k+1)(k+2)}\right) & \text{[100]}\\
&= \tfrac{k(k+1)}{(k+1)(k+2)}+(k+1)\cdot\left(\tfrac{2}{(k+1)(k+2)}\right) & \text{[Hipótese de Indução]}\\
&= \tfrac{k^2+3k+2}{(k+1)(k+2)} & \text{[101]}\\
&= \tfrac{k^2+3k+2}{k^2+k+2k+2} & \text{[Aritmética]}\\
&= \tfrac{k^2+3k+2}{k^2+3k+2} & \text{[Aritmética]}\\
&= 1 & \text{[Aritmética]}
\end{aligned}
$$

Rascunho (opcional)

a) Qual o objetivo de prova do caso base?
Resposta: $1\cdot\left(\frac{2}{1(1+1)}\right)=1$

b) Prove o caso base.
Resposta:

$$
\begin{aligned}
&1\cdot\left(\tfrac{2}{1(1+1)}\right) & \\
&= 1\cdot\left(\tfrac{2}{2}\right) & \text{[Aritmética]}\\
&= 1 & \text{[Aritmética]}
\end{aligned}
$$

c) Qual o objetivo de prova do passo indutivo?
Resposta: $(1+2+3+\ldots+k+(k+1))\cdot\frac{2}{(k+1)((k+1)+1)}=1$

d) Qual a hipótese de indução?
Resposta: $(1+2+3+\ldots+k)\cdot\frac{2}{k(k+1)}=1$

e) Prove o passo indutivo.
Resposta:

$$
\begin{aligned}
&(1+2+3+\ldots+k+(k+1))\cdot\tfrac{2}{(k+1)((k+1)+1)} & \\
&= (1+2+3+\ldots+k+(k+1))\cdot\tfrac{2}{(k+1)(k+2)} & \text{[Aritmética]}\\
&= (1+2+3+\ldots+k)\cdot\left(\tfrac{2}{k(k+1)}\right)\cdot\left(\tfrac{k(k+1)}{(k+1)(k+2)}\right)+(k+1)\cdot\left(\tfrac{2}{(k+1)(k+2)}\right) & \text{[100]}\\
&= \tfrac{k(k+1)}{(k+1)(k+2)}+(k+1)\cdot\left(\tfrac{2}{(k+1)(k+2)}\right) & \text{[Hipótese de Indução]}\\
&= \tfrac{k^2+3k+2}{(k+1)(k+2)} & \text{[101]}\\
&= \tfrac{k^2+3k+2}{k^2+k+2k+2} & \text{[Aritmética]}\\
&= \tfrac{k^2+3k+2}{k^2+3k+2} & \text{[Aritmética]}\\
&= 1 & \text{[Aritmética]}
\end{aligned}
$$

24. $\{3,4\ pt\}$ Prove por indução matemática que

$$\left(\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n^2}\right)=1$$

para todo inteiro $n > 0$.

Justifique cada passo de prova com os termos "[Aritmética]", "[Hipótese de Indução]" ou a equação [100] dada abaixo:

$$\frac{1+3+5+...+(2k-1)+(2(k+1)-1)}{(k+1)^2} = \frac{1+3+5+...+(2k-1)}{k^2} \cdot \frac{k^2}{(k+1)^2} + \frac{2(k+1)-1}{(k+1)^2} \quad [100]$$

Use, obrigatoriamente, a hipótese de indução.

Resposta:
Caso base.

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{1^2} \\ &= \tfrac{1}{1} \quad \text{[Aritmética]} \\ &= 1 \quad \text{[Aritmética]} \end{aligned}$$

Passo indutivo.

$$\begin{aligned} & \tfrac{(1+3+5+...+(2k-1)+(2(k+1)-1)}{(k+1)^2} \\ &= \tfrac{1+3+5+...+(2k-1)}{k^2} \cdot \tfrac{k^2}{(k+1)^2} + \tfrac{2(k+1)-1}{(k+1)^2} && [100] \\ &= \tfrac{k^2}{(k+1)^2} + \tfrac{2(k+1)-1}{(k+1)^2} && \text{[Hipótese de Indução]} \\ &= \tfrac{k^2+2(k+1)-1}{(k+1)^2} && \text{[Aritmética]} \\ &= \tfrac{k^2+2k+2-1}{(k+1)^2} && \text{[Aritmética]} \\ &= \tfrac{k^2+2k+1}{(k+1)^2} && \text{[Aritmética]} \\ &= \tfrac{k^2+2k+1}{k^2+2k+1} && \text{[Aritmética]} \\ &= 1 && \text{[Aritmética]} \end{aligned}$$

Rascunho (opcional)

a) Qual o objetivo de prova do caso base?
Resposta: $\frac{1}{1^2} = 1$

b) Prove o caso base.
Resposta:

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{1^2} \\ &= \tfrac{1}{1} \quad \text{[Aritmética]} \\ &= 1 \quad \text{[Aritmética]} \end{aligned}$$

c) Qual o objetivo de prova do passo indutivo?
Resposta: $\frac{(1+3+5+...+(2k-1)+(2(k+1)-1)}{(k+1)^2} = 1$

d) Qual a hipótese de indução?
Resposta: $\frac{1+3+5+...+(2k-1)}{k^2} = 1$

e) Prove o passo indutivo.

Resposta:

$\frac{(1+3+5+...+(2k-1)+(2(k+1)-1)}{(k+1)^2}$

$= \frac{1+3+5+...+(2k-1)}{k^2} \cdot \frac{k^2}{(k+1)^2} + \frac{2(k+1)-1}{(k+1)^2}$ [100]

$= \frac{k^2}{(k+1)^2} + \frac{2(k+1)-1}{(k+1)^2}$ [Hipótese de Indução]

$= \frac{k^2+2(k+1)-1}{(k+1)^2}$ [Aritmética]

$= \frac{k^2+2k+2-1}{(k+1)^2}$ [Aritmética]

$= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)^2}$ [Aritmética]

$= \frac{k^2+2k+1}{k^2+2k+1}$ [Aritmética]

$= 1$ [Aritmética]

25. $\{2,0\ pt\}$ Prove por indução matemática que

$$(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + (n-1) \cdot n) = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{3}$$

para todo $n > 1$.

Justifique cada passo de prova com os termos “[Aritmética]”, “[Hipótese de Indução]” ou a equação [100] dada abaixo:

$$\frac{(k-1)\cdot k\cdot(k+1)+3\cdot(k^2+k)}{3} = \frac{((k+1)-1)(k+1)((k+1)+1)}{3} \quad [100]$$

Use, obrigatoriamente, a hipótese de indução.

Resposta:

Caso base.

$1 \cdot 2$ [Aritmética]

$= \frac{2\cdot 3}{3}$ [Aritmética]

$= \frac{2\cdot(2+1)}{3}$ [Aritmética]

$= \frac{(2-1)\cdot 2\cdot(2+1)}{3}$ [Aritmética]

Passo indutivo.

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + (k-1)k + ((k+1)-1)(k+1)$

$= \frac{(k-1)k(k+1)}{3} + ((k+1)-1)(k+1)$ [Hipótese de Indução]

$= \frac{(k-1)k(k+1)+3((k+1)-1)(k+1)}{3}$ [Aritmética]

$= \frac{(k-1)k(k+1)+3(k(k+1))}{3}$ [Aritmética]

$= \frac{(k-1)k(k+1)+3(k^2+k)}{3}$ [Aritmética]

$= \frac{((k+1)-1)(k+1)((k+1)+1)}{3}$ [100]

Rascunho (opcional)

a) Qual o objetivo de prova do caso base?

Resposta: $(1 \cdot 2) = \frac{(2-1)\cdot 2\cdot(2+1)}{3}$

b) Prove o caso base.

Resposta:

$$\begin{array}{ll} 1 \cdot 2 & \text{[Aritmética]} \\ = \frac{2\cdot 3}{3} & \text{[Aritmética]} \\ = \frac{2\cdot(2+1)}{3} & \text{[Aritmética]} \\ = \frac{(2-1)\cdot 2\cdot(2+1)}{3} & \text{[Aritmética]} \end{array}$$

c) Qual o objetivo de prova do passo indutivo?

Resposta: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + (k-1)k + ((k+1)-1)(k+1) = \frac{((k+1)-1)(k+1)((k+1)+1)}{3}$

d) Qual a hipótese de indução?

Resposta: $(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + (k-1) \cdot k) = \frac{(k-1)\cdot k\cdot(k+1)}{3}$

e) Prove o passo indutivo.

Resposta:

$$\begin{array}{lr} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + (k-1)k + ((k+1)-1)(k+1) & \\ = \frac{(k-1)k(k+1)}{3} + ((k+1)-1)(k+1) & \text{[Hipótese de Indução]} \\ = \frac{(k-1)k(k+1)+3((k+1)-1)(k+1)}{3} & \text{[Aritmética]} \\ = \frac{(k-1)k(k+1)+3(k(k+1))}{3} & \text{[Aritmética]} \\ = \frac{(k-1)k(k+1)+3(k^2+k)}{3} & \text{[Aritmética]} \\ = \frac{((k+1)-1)(k+1)((k+1)+1)}{3} & \text{[100]} \end{array}$$

26. $\{1,00\ pt\}$ Seja r um número real. Prove, por indução matemática, que

$$\lfloor r + n \rfloor = \lfloor r \rfloor + n$$

para todo inteiro $n \geq 0$. Justifique cada passo de prova com os termos "[Aritmética]", "[Hipótese de Indução]" ou com "[100]", cuja equação é dada abaixo:

$$\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1 \qquad [100]$$

Use, obrigatoriamente, a hipótese de indução.

Resposta:

Caso base.

$$\begin{array}{ll} \lfloor r + 0 \rfloor & \\ = \lfloor r \rfloor & \text{[Aritmética]} \\ = \lfloor r \rfloor + 0 & \text{[Aritmética]} \end{array}$$

Passo indutivo.

$$\begin{array}{lr} \lfloor r + (k+1) \rfloor & \\ = \lfloor (r+k) + 1 \rfloor & \text{[Aritmética]} \\ = \lfloor r + k \rfloor + 1 & \text{[100]} \\ = (\lfloor r \rfloor + k) + 1 & \text{[Hipótese de Indução]} \\ = \lfloor r \rfloor + (k+1) & \text{[Aritmética]} \end{array}$$

Rascunho (opcional)

a) Qual o objetivo de prova do caso base?
Resposta: $\lfloor r+0 \rfloor = \lfloor r \rfloor + 0$

b) Prove o caso base.
Resposta:

$$\begin{array}{ll} \lfloor r+0 \rfloor & \\ = \lfloor r \rfloor & \text{[Aritmética]} \\ = \lfloor r \rfloor + 0 & \text{[Aritmética]} \end{array}$$

c) Qual o objetivo de prova do passo indutivo?
Resposta: $\lfloor r+(k+1) \rfloor = \lfloor r \rfloor + (k+1)$

d) Qual a hipótese de indução?
Resposta: $\lfloor r+k \rfloor = \lfloor r \rfloor + k$

e) Prove o passo indutivo. **Resposta:**

$$\begin{array}{lr} \lfloor r+(k+1) \rfloor & \\ = \lfloor (r+k)+1 \rfloor & \text{[Aritmética]} \\ = \lfloor r+k \rfloor + 1 & \text{[100]} \\ = (\lfloor r \rfloor + k) + 1 & \text{[Hipótese de Indução]} \\ = \lfloor r \rfloor + (k+1) & \text{[Aritmética]} \end{array}$$

27. $\{1,0\ pt\}$ Prove por indução matemática que

$$((n \cdot (n+1) - 1) \ \mathbf{mod}\ \ 2) = 1$$

para todo $n > 0$.

Justifique cada passo de prova com os termos [Aritmética], [Hipótese de Indução] ou as equações [100], [101] e [102] dadas abaixo:

$$\begin{array}{lr} ((x+y) \ \mathbf{mod}\ z) \ = \ (((x \ \mathbf{mod}\ z) + (y \ \mathbf{mod}\ z)) \ \mathbf{mod}\ z) & [100] \\ ((x{\cdot}2) \ \mathbf{mod}\ 2) \ = \ 0 & [101] \\ (((k+1)((k+1)+1)-1) \ \mathbf{mod}\ 2) = ((k \cdot (k+1) - 1) + (k+1) \cdot 2) \ \mathbf{mod}\ 2 & [102] \end{array}$$

Use, obrigatoriamente, a hipótese de indução.

Resposta:
Caso base.

$$\begin{array}{ll} (1 \cdot (1+1) - 1) \ \mathbf{mod}\ 2 & \\ = (2-1) \ \mathbf{mod}\ 2 & \text{[Aritmética]} \\ = 1 \ \mathbf{mod}\ 2 & \text{[Aritmética]} \\ = 1 & \text{[Aritmética]} \end{array}$$

Passo Indutivo.

$$\begin{array}{lr} ((k+1)((k+1)+1)-1) \ \mathbf{mod}\ 2 & \\ = ((k \cdot (k+1) - 1) + (k+1) \cdot 2) \ \mathbf{mod}\ 2 & [102] \\ = (((k \cdot (k+1) - 1) \ \mathbf{mod}\ 2) + ((k+1) \cdot 2 \ \mathbf{mod}\ 2)) \ \mathbf{mod}\ 2 & [100] \\ = (1 + ((k+1) \cdot 2 \ \mathbf{mod}\ 2)) \ \mathbf{mod}\ 2 & \text{[Hipótese de Indução]} \\ = (1+0) \ \mathbf{mod}\ 2 & [101] \\ = 1 \ \mathbf{mod}\ 2 & \text{[Aritmética]} \\ = 1 & \text{[Aritmética]} \end{array}$$

Rascunho (opcional)

a) Qual o objetivo de prova do caso base?
Resposta: $((1 \cdot (1+1) - 1) \ \mathbf{mod}\ 2) = 1$

b) Prove o caso base.
Resposta:

$$
\begin{array}{ll}
(1 \cdot (1+1) - 1) \ \mathbf{mod}\ 2 & \\
= (2-1) \ \mathbf{mod}\ 2 & [\text{Aritmética}] \\
= 1 \ \mathbf{mod}\ 2 & [\text{Aritmética}] \\
= 1 & [\text{Aritmética}]
\end{array}
$$

c) Qual o objetivo de prova do passo indutivo?
Resposta: $(((k+1)((k+1)+1) - 1) \ \mathbf{mod}\ 2) = 1$

d) Qual a hipótese de indução?
Resposta: $((k \cdot (k+1) - 1) \ \mathbf{mod}\ 2) = 1$

e) Prove o passo indutivo.
Resposta:

$$
\begin{array}{lr}
((k+1)((k+1)+1) - 1) \ \mathbf{mod}\ 2 & \\
= ((k \cdot (k+1) - 1) + (k+1) \cdot 2) \ \mathbf{mod}\ 2 & [102] \\
= (((k \cdot (k+1) - 1) \ \mathbf{mod}\ 2) + ((k+1) \cdot 2 \ \mathbf{mod}\ 2)) \ \mathbf{mod}\ 2 & [100] \\
= (1 + ((k+1) \cdot 2 \ \mathbf{mod}\ 2)) \ \mathbf{mod}\ 2 & [\text{Hipótese de Indução}] \\
= (1+0) \ \mathbf{mod}\ 2 & [101] \\
= 1 \ \mathbf{mod}\ 2 & [\text{Aritmética}] \\
= 1 & [\text{Aritmética}]
\end{array}
$$

28. $\{2,0\ pt\}$ Prove por indução matemática que

$$\left(\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{n+1}{2n}$$

para todo $n > 1$.

Justifique cada passo de prova com os termos [Aritmética], [Hipótese de Indução] ou a equação [100], dada abaixo:

$$\left(\tfrac{k+1}{2k}\right) \cdot \left(1 - \tfrac{1}{(k+1)^2}\right) = \tfrac{k^2+2k}{2k(k+1)} \quad [100]$$

Use, obrigatoriamente, a hipótese de indução.

Resposta:
Caso base.

$$
\begin{array}{ll}
1 - \frac{1}{2^2} & \\
= 1 - \frac{1}{4} & [\text{Aritmética}] \\
= \frac{4-1}{4} & [\text{Aritmética}] \\
= \frac{3}{4} & [\text{Aritmética}] \\
= \frac{2+1}{2 \cdot 2} & [\text{Aritmética}]
\end{array}
$$

Passo Indutivo.

$$\begin{aligned}
&\left(1-\tfrac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\tfrac{1}{3^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\tfrac{1}{k^2}\right)\cdot\left(1-\tfrac{1}{(k+1)^2}\right) && \\
&=\left(\tfrac{k+1}{2k}\right)\cdot\left(1-\tfrac{1}{(k+1)^2}\right) && \text{[Hipótese de Indução]}\\
&=\tfrac{k^2+2k}{2k(k+1)} && \text{[100]}\\
&=\tfrac{k(k+2)}{2k(k+1)} && \text{[Aritmética]}\\
&=\tfrac{(k+1)+1}{2(k+1)} && \text{[Aritmética]}
\end{aligned}$$

Rascunho (opcional)

a) Qual o objetivo de prova do caso base?
Resposta: $\left(1-\frac{1}{2^2}\right) = \frac{2+1}{2\cdot 2}$

b) Prove o caso base.
Resposta:

$$\begin{aligned}
&1-\tfrac{1}{2^2} & \\
&=1-\tfrac{1}{4} & \text{[Aritmética]}\\
&=\tfrac{4-1}{4} & \text{[Aritmética]}\\
&=\tfrac{3}{4} & \text{[Aritmética]}\\
&=\tfrac{2+1}{2\cdot 2} & \text{[Aritmética]}
\end{aligned}$$

c) Qual o objetivo de prova do passo indutivo?
Resposta: $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{(k+1)+1}{2(k+1)}$

d) Qual a hipótese de indução?
Resposta: $\left(\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\right) = \frac{k+1}{2k}$

e) Prove o passo indutivo.
Resposta:

$$\begin{aligned}
&\left(1-\tfrac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\tfrac{1}{3^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\tfrac{1}{k^2}\right)\cdot\left(1-\tfrac{1}{(k+1)^2}\right) && \\
&=\left(\tfrac{k+1}{2k}\right)\cdot\left(1-\tfrac{1}{(k+1)^2}\right) && \text{[Hipótese de Indução]}\\
&=\tfrac{k^2+2k}{2k(k+1)} && \text{[100]}\\
&=\tfrac{k(k+2)}{2k(k+1)} && \text{[Aritmética]}\\
&=\tfrac{(k+1)+1}{2(k+1)} && \text{[Aritmética]}
\end{aligned}$$

29. $\{1,0\ pt\}$ Prove por indução matemática que o produto de quaisquer 3 números naturais consecutivos é divisível por 3. Ou seja, prove por indução matemática que

$$((n\cdot(n+1)\cdot(n+2))\ \mathbf{mod}\ \ 3) = 0$$

para todo $n \geq 0$.

Justifique cada passo de prova com os termos [Aritmética], [Hipótese de Indução] ou as equações [100], [101] e [102] dadas abaixo:

$$((k+1)((k+1)+1)((k+1)+2) \ \mathbf{mod}\ 3) = ((k \cdot (k+1)(k+2)) + (3 \cdot (k+1)(k+2))) \ \mathbf{mod}\ 3 \quad [100]$$
$$((x+y) \ \mathbf{mod}\ z) \ = \ (((x \ \mathbf{mod}\ z) + (y \ \mathbf{mod}\ z)) \ \mathbf{mod}\ z) \quad [101]$$
$$((3x) \ \mathbf{mod}\ 3) \ = \ 0 \quad [102]$$

Use, obrigatoriamente, a hipótese de indução.

Resposta:
Caso base.

$$\begin{array}{ll}
(0 \cdot (0+1)(0+2)) \ \mathbf{mod}\ 3 & \\
= 0 \ \mathbf{mod}\ 3 & \text{[Aritmética]} \\
= 0 & \text{[Aritmética]}
\end{array}$$

Passo Indutivo.

$$\begin{array}{ll}
(k+1)((k+1)+1)((k+1)+2) \ \mathbf{mod}\ 3 & \\
= ((k \cdot (k+1)(k+2)) + (3 \cdot (k+1)(k+2))) \ \mathbf{mod}\ 3 & [100] \\
= ((k \cdot (k+1)(k+2)) \ \mathbf{mod}\ 3 + (3 \cdot (k+1)(k+2)) \ \mathbf{mod}\ 3) \ \mathbf{mod}\ 3 & [101] \\
= (0 + (3 \cdot (k+1)(k+2)) \ \mathbf{mod}\ 3) \ \mathbf{mod}\ 3 & \text{[Hipótese de Indução]} \\
= ((3 \cdot (k+1)(k+2)) \ \mathbf{mod}\ 3) \ \mathbf{mod}\ 3 & \text{[Aritmética]} \\
= 0 \ \mathbf{mod}\ 3 & [102] \\
= 0 & \text{[Aritmética]}
\end{array}$$

Rascunho (opcional)

a) Qual o objetivo de prova do caso base?
Resposta: $((0 \cdot (0+1)(0+2)) \ \mathbf{mod}\ 3) = 0$

b) Prove o caso base.
Resposta:

$$\begin{array}{ll}
(0 \cdot (0+1)(0+2)) \ \mathbf{mod}\ 3 & \\
= 0 \ \mathbf{mod}\ 3 & \text{[Aritmética]} \\
= 0 & \text{[Aritmética]}
\end{array}$$

c) Qual o objetivo de prova do passo indutivo?
Resposta: $((k+1)((k+1)+1)((k+1)+2) \ \mathbf{mod}\ 3) = 0$

d) Qual a hipótese de indução?
Resposta: $(k(k+1)(k+2)) \ \mathbf{mod}\ 3 = 0$

e) Prove o passo indutivo. **Resposta:**

$$\begin{array}{ll}
(k+1)((k+1)+1)((k+1)+2) \ \mathbf{mod}\ 3 & \\
= ((k \cdot (k+1)(k+2)) + (3 \cdot (k+1)(k+2))) \ \mathbf{mod}\ 3 & [100] \\
= ((k \cdot (k+1)(k+2)) \ \mathbf{mod}\ 3 + (3 \cdot (k+1)(k+2)) \ \mathbf{mod}\ 3) \ \mathbf{mod}\ 3 & [101] \\
= (0 + (3 \cdot (k+1)(k+2)) \ \mathbf{mod}\ 3) \ \mathbf{mod}\ 3 & \text{[Hipótese de Indução]} \\
= ((3 \cdot (k+1)(k+2)) \ \mathbf{mod}\ 3) \ \mathbf{mod}\ 3 & \text{[Aritmética]} \\
= 0 \ \mathbf{mod}\ 3 & [102] \\
= 0 & \text{[Aritmética]}
\end{array}$$

30. $\{2,0\ pt\}$ Prove por indução matemática que

$$\left(\frac{1}{1\cdot(1+1)}+\frac{1}{2\cdot(2+1)}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right) = \frac{n}{n+1}$$

para todo $n > 0$.

Justifique cada passo de prova com os termos [Aritmética], [Hipótese de Indução] ou a equação [100], dada abaixo:

$$\tfrac{k}{k+1}+\tfrac{1}{(k+1)((k+1)+1)} = \tfrac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \quad [100]$$

Use, obrigatoriamente, a hipótese de indução.

Resposta:
Caso base.

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{1\cdot(1+1)} \\
&= \tfrac{1}{1\cdot 2} && \text{[Aritmética]} \\
&= \tfrac{1}{2} && \text{[Aritmética]} \\
&= \tfrac{1}{1+1} && \text{[Aritmética]}
\end{aligned}$$

Passo Indutivo.

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{1\cdot(1+1)}+\tfrac{1}{2\cdot(2+1)}+\ldots+\tfrac{1}{k\cdot(k+1)}+\tfrac{1}{(k+1)((k+1)+1)} \\
&= \tfrac{k}{k+1}+\tfrac{1}{(k+1)((k+1)+1)} && \text{[Hipótese de Indução]} \\
&= \tfrac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} && \text{[100]} \\
&= \tfrac{k+1}{k+2} && \text{[Aritmética]} \\
&= \tfrac{k+1}{(k+1)+1} && \text{[Aritmética]}
\end{aligned}$$

Rascunho (opcional)

a) Qual o objetivo de prova do caso base?
Resposta: $\frac{1}{1\cdot(1+1)} = \frac{1}{1+1}$

b) Prove o caso base.
Resposta:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{1\cdot(1+1)} \\
&= \tfrac{1}{1\cdot 2} && \text{[Aritmética]} \\
&= \tfrac{1}{2} && \text{[Aritmética]} \\
&= \tfrac{1}{1+1} && \text{[Aritmética]}
\end{aligned}$$

c) Qual o objetivo de prova do passo indutivo?
Resposta: $\frac{1}{1\cdot(1+1)}+\frac{1}{2\cdot(2+1)}+\ldots+\frac{1}{k\cdot(k+1)}+\frac{1}{(k+1)((k+1)+1)} = \frac{k+1}{(k+1)+1}$

d) Qual a hipótese de indução?
Resposta: $\frac{1}{1\cdot(1+1)}+\frac{1}{2\cdot(2+1)}+\ldots+\frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{k}{k+1}$

e) Prove o passo indutivo.

Resposta:

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{1\cdot(1+1)} + \tfrac{1}{2\cdot(2+1)} + \ldots + \tfrac{1}{k\cdot(k+1)} + \tfrac{1}{(k+1)((k+1)+1)} && \\
&= \tfrac{k}{k+1} + \tfrac{1}{(k+1)((k+1)+1)} && \text{[Hipótese de Indução]} \\
&= \tfrac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} && \text{[100]} \\
&= \tfrac{k+1}{k+2} && \text{[Aritmética]} \\
&= \tfrac{k+1}{(k+1)+1} && \text{[Aritmética]}
\end{aligned}
$$

4.2 Indução Estrutural

1. Seja o conjunto de strings $A = \{\text{“1”}, \text{“11”}, \text{“111”}, \ldots\}$ definido assim:
   Caso base. O string “1” pertence a A.
   Caso recursivo. Seja s um string que pertença a A. Então o string “1”$+s$ também pertence à A.

   Obs$_1$. O símbolo de $+$ acima é uma concatenação de strings. Exemplo: “xyz”+“abc” = “xyzabc”, “1”+“111” = “1111”.
   Obs$_2$. Todos elementos de A são provenientes do passo base e passo recursivo.

   Seja $C(s)$ a função que retorna o *comprimento* do string s. Por exemplo, $C(\text{“1”}) = 1$, $C(\text{“11111”}) = 5$, etc.

   Seja $F(s)$ a função que retorna a *soma dos dígitos* do string s. Por exemplo, $F(\text{“1”}) = 1$, $F(\text{“123”}) = 1 + 2 + 3 = 6$, $F(\text{“1111”}) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$, etc.

   Prove por indução estrutural que $C(s) = F(s)$ para todo $s \in A$.

   Justifique cada passo de prova com “Def. de C”, “Def. de F” ou “Hipótese de Indução”.

   Resposta:

   Caso base.

$$
\begin{aligned}
&C(\text{“1”}) && \\
&= 1 && \text{[Def. de } C\text{]} \\
&= F(\text{“1”}) && \text{[Def. de } F\text{]}
\end{aligned}
$$

   Passo indutivo.

$$
\begin{aligned}
&C(\text{“1”}+s) && \\
&= 1 + C(s) && \text{[Def. de } C\text{]} \\
&= 1 + F(s) && \text{[Hipótese de Indução]} \\
&= F(\text{“1”}+s) && \text{[Def. de } F\text{]}
\end{aligned}
$$

   Rascunho (opcional):

   a) Qual o objetivo de prova do caso base? **Resposta:** $C(\text{“1”}) = F(\text{“1”})$

b) Prove o caso base.
Resposta:

$$\begin{array}{ll} C(\text{“1”}) & \\ = 1 & [\text{Def. de } C] \\ = F(\text{“1”}) & [\text{Def. de } F] \end{array}$$

c) Qual o objetivo de prova do passo indutivo? **Resposta:** $C(\text{“1”}+s) = F(\text{“1”}+s)$

d) Qual a hipótese de indução? **Resposta:** $C(s) = F(s)$

e) Prove o passo indutivo.
Resposta:

$$\begin{array}{lr} C(\text{“1”}+s) & \\ = 1 + C(s) & [\text{Def. de } C] \\ = 1 + F(s) & [\text{Hipótese de Indução}] \\ = F(\text{“1”}+s) & [\text{Def. de } F] \end{array}$$

2. Seja o conjunto de strings $A = \{\text{“2”}, \text{“22”}, \text{“222”}, \ldots\}$ definido assim:
Caso base. “2” $\in A$.
Caso recursivo. Se $s \in A$, então “2”$+s \in A$.

Obs$_1$. O símbolo de + acima concatena strings. Exemplo: “2”+“222” = “2222”.
Obs$_2$. Todos elementos de A são provenientes do passo base e passo recursivo.

Seja $C(s)$ a função que retorna o *comprimento* do string s.
Por exemplo, $C(\text{“2”}) = 1$, $C(\text{“22222”}) = 5$, etc.

Seja $P(s)$ a função que retorna o *produto dos dígitos* do string s.
Por exemplo, $P(\text{“2”}) = 2$, $P(\text{“222”}) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Prove por indução estrutural que $2^{C(t)} = P(t)$, para todo $t \in A$.
Justifique cada passo de prova com “Def. de C”, “Def. de P”, “Aritmética”, “Hipótese de Indução” ou com uma das equações abaixo:

$$\begin{array}{ll} 2^{1+n} = 2 \cdot 2^n & [1] \\ C(\text{“2”}+s) = 1 + C(s) & [2] \\ P(\text{“2”}+s) = 2 \cdot P(s) & [3] \end{array}$$

Resposta:

Caso base.

$$\begin{array}{lr} 2^{C(\text{“2“})} & \\ = 2^1 & [\text{Def. de } C] \\ = 2 & [\text{Aritmética}] \\ = P(\text{“2”}) & [\text{Def. de } P] \end{array}$$

Passo indutivo.

$$\begin{array}{lr} 2^{C(\text{“2“}+s)} & \\ = 2^{1+C(s)} & [2] \\ = 2 \cdot 2^{C(s)} & [1] \\ = 2 \cdot P(s) & [\text{Hipótese de Indução}] \\ = P(\text{“2”}+s) & [3] \end{array}$$

Rascunho (opcional):

a) Qual o objetivo de prova do caso base?
Resposta: $2^{C(\text{“}2\text{“})} = P(\text{“}2\text{“})$

b) Prove o caso base.
Resposta:

$$\begin{aligned} & 2^{C(\text{“}2\text{“})} \\ &= 2^1 && \text{[Def. de } C\text{]} \\ &= 2 && \text{[Aritmética]} \\ &= P(\text{“}2\text{”}) && \text{[Def. de } P\text{]} \end{aligned}$$

c) Qual o objetivo de prova do passo indutivo?
Resposta: $C^{(\text{“}2\text{“}+s)} = P(\text{“}2\text{”}+s)$

d) Qual a hipótese de indução?
Resposta: $2^{C(s)} = P(s)$

e) Prove o passo indutivo. Justifique cada passo de prova com
Resposta:

$$\begin{aligned} & 2^{C(\text{“}2\text{“}+s)} \\ &= 2^{1+C(s)} && [2] \\ &= 2 \cdot 2^{C(s)} && [1] \\ &= 2 \cdot P(s) && \text{[Hipótese de Indução]} \\ &= P(\text{“}2\text{”}+s) && [3] \end{aligned}$$

3. Seja o conjunto de strings contendo programas de computador:
$A = \{\text{“}x = 2\ ;\text{”}, \text{“}x = 2\ ;\ x = x + 2\ ;\text{”}, \text{“}x = 2\ ;\ x = x + 2\ ;\ x = x + 2\ ;\text{”}, \ldots\}$
Note que os programas têm apenas atribuições. A definição formal é:
Caso base. $\text{“}x = 2\ ;\text{”} \in A$.
Passo recursivo. Se $s \in A$, então $(s + \text{“}x = x + 2\ ;\text{”}) \in A$.

Obs$_1$. O símbolo de + aplicado a s concatena strings. Exemplo: “a”+“bcd” = “abcd”.
O símbolo de + aplicado a x é soma aritmética.
Obs$_2$. Todos elementos de A são provenientes do passo base e passo recursivo.

Seja $EXEC(s)$ a função que retorna o *valor de x ao término* da execução do programa s.
Por exemplo, $EXEC(\text{“}x = 2\ ;\text{”}) = 2$, $EXEC(\text{“}x = 2\ ;\ x = x + 2\ ;\text{”}) = 4$, etc.

Seja $ATR(s)$ a função que retorna o *número de atribuições* contidos em s.
Por exemplo, $ATR(\text{“}x = 2\ ;\text{”}) = 1$, $ATR(\text{“}x = 2\ ;\ x = x + 2\ ;\text{”}) = 2$.

Prove por indução estrutural que $EXEC(s) = 2 \cdot ATR(s)$, para todo $s \in A$.
Justifique cada passo de prova com “Def. de $EXEC$“, “Def. de ATR”, “Aritmética”, “Hipótese de Indução” ou com a equações [1] ou [2] abaixo:

$$\begin{aligned} & EXEC(s + \text{“}x = x + 2\ ;\text{”}) = 2 + EXEC(s) && [1] \\ & ATR(s + \text{“}x = x + 2\ ;\text{”}) = 1 + ATR(s) && [2] \end{aligned}$$

Resposta:

Caso base.

$$\begin{aligned}
&EXEC(\text{“}x = 2\ ;\text{”}) & \\
&= 2 & [\text{Def. de } EXEC] \\
&= 2 \cdot 1 & [\text{Aritmética}] \\
&= 2 \cdot ATR(\text{“}x = 2\ ;\text{”}) & [\text{Def. de } ATR]
\end{aligned}$$

Passo indutivo.

$$\begin{aligned}
&EXEC(s + \text{“}x = x + 2\ ;\text{”}) & \\
&= 2 + EXEC(s) & [1] \\
&= 2 + 2 \cdot ATR(s) & [\text{Hipotése de Indução}] \\
&= 2(1 + ATR(s)) & [\text{Aritmética}] \\
&= 2(ATR(s + \text{“}x = x + 2\ ;\text{”}) & [2]
\end{aligned}$$

Rascunho (opcional):

a) Qual o objetivo de prova do caso base?
Resposta: $EXEC(\text{“}x = 2\ ;\text{”}) = 2 \cdot ATR(\text{“}x = 2\ ;\text{”})$

b) Prove o caso base.
Resposta:

$$\begin{aligned}
&EXEC(\text{“}x = 2\ ;\text{”}) & \\
&= 2 & [\text{Def. de } EXEC] \\
&= 2 \cdot 1 & [\text{Aritmética}] \\
&= 2 \cdot ATR(\text{“}x = 2\ ;\text{”}) & [\text{Def. de } ATR]
\end{aligned}$$

c) Qual o objetivo de prova do passo indutivo?
Resposta: $EXEC(s + \text{“}x = x + 2\ ;\text{”}) = 2 \cdot ATR(s + \text{“}x = x + 2\ ;\text{”})$

d) Qual a hipótese de indução?
Resposta: $EXEC(s) = 2 \cdot ATR(s)$

e) Prove o passo indutivo.
Resposta:

$$\begin{aligned}
&EXEC(s + \text{“}x = x + 2\ ;\text{”}) & \\
&= 2 + EXEC(s) & [1] \\
&= 2 + 2 \cdot ATR(s) & [\text{Hipotése de Indução}] \\
&= 2(1 + ATR(s)) & [\text{Aritmética}] \\
&= 2(ATR(s + \text{“}x = x + 2\ ;\text{”}) & [2]
\end{aligned}$$

4. Seja o conjunto de strings de bits $A = \{\text{“0”}, \text{“1”}, \text{“01”}, \text{“10”}, \ldots\}$ definido assim:
Passo base 1. “0” $\in A$.
Passo base 2. “1” $\in A$.
Passo recursivo. Se $s \in A$ e $t \in A$, então $s + t \ \in A$.

Obs$_1$. O símbolo de + acima concatena strings. Exemplo: “ab”+“cd” = “abcd”.
Obs$_2$. Todos elementos de A são provenientes dos passos base e passo recursivo.

Seja $UNS(s)$ a função que retorna a *quantidade de bits 1* do string s.
Por exemplo, $UNS(\text{“0”}) = 0$, $UNS(\text{“1”}) = 1$, $UNS(\text{“010”}) = 1$, etc.

Seja $S(s)$ a função que retorna a *soma dos bits* do string s.
Por exemplo, $S(\text{“0”}) = 0$, $S(\text{“1”}) = 1$, $S(\text{“0101”}) = 2$, $S(\text{“0101011”}) = 4$, etc.

Prove por indução estrutural que $UNS(t) = S(t)$, para todo $t \in A$.

Justifique cada passo de prova com “Def. de UNS”, “Def. de S”, “Aritmética”, “Hipótese de Indução” ou com uma das equações abaixo:

$$\begin{array}{ll} UNS(s+t) = UNS(s) + UNS(t) & [1] \\ S(s+t) = S(s) + S(t) & [2] \end{array}$$

Resposta:

Caso base 1.

$$\begin{array}{ll} UNS(\text{“0”}) & \\ = 0 & [\text{Def. de } UNS] \\ = S(\text{“0”}) & [\text{Def. de } S] \end{array}$$

Caso base 2.

$$\begin{array}{ll} UNS(\text{“1”}) & \\ = 1 & [\text{Def. de } UNS] \\ = S(\text{“1”}) & [\text{Def. de } S] \end{array}$$

Passo indutivo.

$$\begin{array}{ll} UNS(s+t) & \\ = UNS(s) + UNS(t) & [1] \\ = S(s) + S(t) & [\text{Hipótese de Indução}] \\ = S(s+t) & [2] \end{array}$$

Rascunho (opcional):

a) Quais os objetivos de prova dos casos base?
Resposta: $(UNS(\text{“0”}) = S(\text{“0”}))$ e $(UNS(\text{“1”}) = S(\text{“1”}))$

b) Prove os casos base.
Resposta:

$$\begin{array}{ll} UNS(\text{“0”}) & \\ = 0 & [\text{Def. de } UNS] \\ = S(\text{“0”}) & [\text{Def. de } S] \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} UNS(\text{“1”}) & \\ = 1 & [\text{Def. de } UNS] \\ = S(\text{“1”}) & [\text{Def. de } S] \end{array}$$

c) Qual o objetivo de prova do passo indutivo?
Resposta: $UNS(s+t) = S(s+t)$

d) Quais as hipóteses de indução?
Resposta: $(UNS(s) = S(s))$ e $(UNS(t) = S(t))$

e) Prove o passo indutivo.

Resposta:

$$\begin{array}{lr} UNS(s+t) & \\ = UNS(s) + UNS(t) & [1] \\ = S(s) + S(t) & \text{[Hipótese de Indução]} \\ = S(s+t) & [2] \end{array}$$

5. Seja A o conjunto definido recursivamente abaixo.
Caso base. $17 \in A$.
Passo recursivo. Se $n \in A$, então $(n+n) \in A$.

Prove por indução estrutural que $\forall n \in A$ ($(n$ **mod** $17) = 0$).

Justifique cada passo de prova com "Def. de **mod** ", "Aritmética", "Hipótese de Indução" ou com a equação [1] abaixo:

$$((x+y) \textbf{ mod } z) = (((x \textbf{ mod } z) + (y \textbf{ mod } z)) \textbf{ mod } z) \quad [1]$$

Resposta:

Caso base.

$$\begin{array}{lr} 17 \textbf{ mod } 17 & \\ = 0 & \text{[Def. de } \textbf{mod} \text{]} \end{array}$$

Passo indutivo.

$$\begin{array}{lr} (n+n) \textbf{ mod } 17 & \\ = ((n \textbf{ mod } 17) + (n \textbf{ mod } 17)) \textbf{ mod } 17 & [1] \\ = (0+0) \textbf{ mod } 17 & \text{[Hipotése de Indução (2x)]} \\ = 0 \textbf{ mod } 17 & \text{[Aritmética]} \\ = 0 & \text{[Definição de } \textbf{mod} \text{]} \end{array}$$

Rascunho (opcional):

a) Qual o objetivo de prova do caso base?
Resposta: 17 **mod** $17 = 0$

b) Prove o caso base.
Resposta:

$$\begin{array}{lr} 17 \textbf{ mod } 17 & \\ = 0 & \text{[Def. de } \textbf{mod} \text{]} \end{array}$$

c) Qual o objetivo de prova do passo indutivo?
Resposta: $(n+n)$ **mod** $17 = 0$

d) Qual a hipótese de indução?
Resposta: n **mod** $17 = 0$

e) Prove o passo indutivo.
Resposta:

$$\begin{array}{lr} (n+n) \textbf{ mod } 17 & \\ = ((n \textbf{ mod } 17) + (n \textbf{ mod } 17)) \textbf{ mod } 17 & [1] \\ = (0+0) \textbf{ mod } 17 & \text{[Hipotése de Indução (2x)]} \\ = 0 \textbf{ mod } 17 & \text{[Aritmética]} \\ = 0 & \text{[Definição de } \textbf{mod} \text{]} \end{array}$$

6. Seja A definido recursivamente abaixo.
Caso base. $1 \in A$.
Passo recursivo. Se $n \in A$, então $(n+2) \in A$.

Prove que por indução estrutural, que $\forall n \in A(((n-1) \textbf{ mod } 2) = 0)$.

Justifique com "Aritmética", "Definição de **mod** ", "Hipótese de Indução", "[1]" ou "[2]", onde [1] e [2] são as equações abaixo:

$$\begin{array}{ll} ((x+y) \textbf{ mod } z) \;=\; (((x \textbf{ mod } z) + (y \textbf{ mod } z)) \textbf{ mod } z) & [1] \\ (((n+2)-1) \textbf{ mod } 2) = (((n-1)+2) \textbf{ mod } 2) & [2] \end{array}$$

Resposta:

Caso base.

$$\begin{array}{ll} (1-1) \textbf{ mod } 2 & \\ = 0 \textbf{ mod } 2 & [\text{Aritmética}] \\ = 0 & [\text{Def. } \textbf{mod}] \end{array}$$

Passo indutivo.

$$\begin{array}{lr} ((n+2)-1) \textbf{ mod } 2 & \\ = ((n-1)+2) \textbf{ mod } 2 & [2] \\ = (((n-1) \textbf{ mod } 2) + (2 \textbf{ mod } 2)) \textbf{ mod } 2 & [1] \\ = (0 + (2 \textbf{ mod } 2)) \textbf{ mod } 2 & [\text{Hipótese de Indução}] \\ = (0+0) \textbf{ mod } 2 & [\text{Definição de } \textbf{mod}] \\ = 0 & [\text{Definição de } \textbf{mod}] \end{array}$$

Rascunho (opcional).

a) Qual o objetivo de prova do caso base?
Resposta: $((1-1) \textbf{ mod } 2) = 0$

b) Prove o caso base.
Resposta:

$$\begin{array}{ll} (1-1) \textbf{ mod } 2 & \\ = 0 \textbf{ mod } 2 & [\text{Aritmética}] \\ = 0 & [\text{Def. } \textbf{mod}] \end{array}$$

c) Qual o objetivo de prova do passo indutivo?
Resposta: $(((n+2)-1) \textbf{ mod } 2) = 0$

d) Qual a hipótese de indução?
Resposta: $((n-1) \textbf{ mod } 2) = 0$

e) Prove o passo indutivo.
Resposta:

$$\begin{array}{lr} ((n+2)-1) \textbf{ mod } 2 & \\ = ((n-1)+2) \textbf{ mod } 2 & [2] \\ = (((n-1) \textbf{ mod } 2) + (2 \textbf{ mod } 2)) \textbf{ mod } 2 & [1] \\ = (0 + (2 \textbf{ mod } 2)) \textbf{ mod } 2 & [\text{Hipótese de Indução}] \\ = (0+0) \textbf{ mod } 2 & [\text{Definição de } \textbf{mod}] \\ = 0 & [\text{Definição de } \textbf{mod}] \end{array}$$

7. Seja A o conjunto de strings definido recursivamente abaixo.
Caso base. "*ana*" $\in A$.
Passo recursivo. Se $s \in A$, então $s + s \in A$.

Obs$_1$. O símbolo de + acima concatena strings. Exemplo: "a"+"bcd" = "abcd".
Obs$_2$. Todos elementos de A são provenientes do passo base e passo recursivo.

Seja $CONTAA(s)$ a função que retorna a *quantidade de letras "a"* do string s. Por exemplo, $CONTAA(\text{"}anaanaana\text{"}) = 6$.

Seja $CONTAN(s)$ a função que retorna a *quantidade de letras "n"* do string s. Por exemplo, $CONTAN(\text{"}anaanaana\text{"}) = 3$.

Prove por indução estrutural que $CONTAA(s) = 2 \cdot CONTAN(s)$, para todo $s \in A$.

Justifique cada passo de prova com "Def. de $CONTAA$", "Def. de $CONTAN$", "Aritmética", "Hipótese de Indução" ou com as equações [1] ou [2] abaixo:

$$
\begin{aligned}
CONTAA(s+s) &= CONTAA(s) + CONTAA(s) && [1] \\
CONTAN(s+s) &= CONTAN(s) + CONTAN(s) && [2]
\end{aligned}
$$

Resposta:

Caso base.

$$
\begin{aligned}
& CONTAA(\text{"}ana\text{"}) \\
& = 2 && \text{[Def. de } CONTAA\text{]} \\
& = 2 \cdot 1 && \text{[Aritmética]} \\
& = 2 \cdot CONTAN(\text{"}ana\text{"}) && \text{[Def. de } CONTAN\text{]}
\end{aligned}
$$

Passo indutivo.

$$
\begin{aligned}
& CONTAA(s+s) \\
& = CONTAA(s) + CONTAA(s) && [1] \\
& = 2 \cdot CONTAN(s) + 2 \cdot CONTAN(s) && \text{[Hipótese de Indução (2x)]} \\
& = 2(CONTAN(s) + CONTAN(s)) && \text{[Aritmética]} \\
& = 2CONTAN(s+s) && [2]
\end{aligned}
$$

Rascunho (opcional).

a) Qual o objetivo de prova do caso base?
Resposta: $CONTAA(\text{"}ana\text{"}) = 2 \cdot CONTAN(\text{"}ana\text{"})$

b) Prove o caso base.
Resposta:

$$
\begin{aligned}
& CONTAA(\text{"}ana\text{"}) \\
& = 2 && \text{[Def. de } CONTAA\text{]} \\
& = 2 \cdot 1 && \text{[Aritmética]} \\
& = 2 \cdot CONTAN(\text{"}ana\text{"}) && \text{[Def. de } CONTAN\text{]}
\end{aligned}
$$

c) Qual o objetivo de prova do passo indutivo?
Resposta: $CONTAA(s+s) = 2 \cdot CONTAN(s+s)$

d) Qual a hipótese de indução?

Resposta: $CONTAA(s) = 2 \cdot CONTAN(s)$

e) Prove o passo indutivo.

Resposta:

$$
\begin{array}{ll}
CONTAA(s+s) & \\
= CONTAA(s) + CONTAA(s) & [1] \\
= 2 \cdot CONTAN(s) + 2 \cdot CONTAN(s) & [\text{Hipótese de Indução (2x)}] \\
= 2(CONTAN(s) + CONTAN(s)) & [\text{Aritmética}] \\
= 2CONTAN(s+s) & [2]
\end{array}
$$

8. Seja A o conjunto definido recursivamente abaixo.
Caso base. $2 \in A$.
Passo recursivo. Se $n \in A$, então $n^2 \in A$.
Obs. Todos elementos de A são provenientes do passo base e passo recursivo.

Queremos provar por indução estrutural que $((n \textbf{ mod } 2) = 0)$, para todo $n \in A$.

Justifique cada passo com "Aritimética", "Definição de **mod** ", "Hipótese de Indução" ou "[1]", onde [1] é a equação abaixo:

$$((x \cdot y) \textbf{ mod } z) \;=\; (\;((x \textbf{ mod } z) \cdot (y \textbf{ mod } z)) \textbf{ mod } z\;) \quad [1]$$

Resposta:

Caso base.

$$
\begin{array}{ll}
(2 \textbf{ mod } 2) & \\
= 0 & [\text{Definição de } \textbf{mod}\,]
\end{array}
$$

Passo indutivo.

$$
\begin{array}{ll}
n^2 \textbf{ mod } 2 & \\
= (n \cdot n) \textbf{ mod } 2 & [\text{Aritmética}] \\
= ((n \textbf{ mod } 2) \cdot (n \textbf{ mod } 2)) \textbf{ mod } 2 & [1] \\
= (0 \cdot (n \textbf{ mod } 2)) \textbf{ mod } 2 & [\text{Hipótese de Indução}] \\
= 0 \textbf{ mod } 2 & [\text{Aritmética}] \\
= 0 & [\text{Definição de } \textbf{mod}\,]
\end{array}
$$

Rascunho (opcional):

a) Qual o objetivo de prova do caso base?

Resposta: $(2 \textbf{ mod } 2) = 0$.

b) Prove o caso base.

Resposta:

$$
\begin{array}{ll}
(2 \textbf{ mod } 2) & \\
= 0 & [\text{Definição de } \textbf{mod}\,]
\end{array}
$$

c) Qual o objetivo de prova do passo indutivo?

Resposta:

$(n^2 \textbf{ mod } 2) = 0$

d) Qual a hipótese de indução?
Resposta:
$(n \textbf{ mod } 2) = 0$

e) Prove o passo indutivo.
Resposta:

$$
\begin{aligned}
& n^2 \textbf{ mod } 2 & \\
& = (n \cdot n) \textbf{ mod } 2 & \text{[Aritmética]} \\
& = ((n \textbf{ mod } 2) \cdot (n \textbf{ mod } 2)) \textbf{ mod } 2 & \text{[1]} \\
& = (0 \cdot (n \textbf{ mod } 2)) \textbf{ mod } 2 & \text{[Hipótese de Indução]} \\
& = 0 \textbf{ mod } 2 & \text{[Aritmética]} \\
& = 0 & \text{[Definição de } \textbf{mod} \text{]}
\end{aligned}
$$

9. Seja A o conjunto de strings definido recursivamente abaixo.
Caso base. "*ana*" $\in A$.
Passo recursivo. Se $s \in A$, então "*b*" + s+"*b*" $\in A$.

Obs$_1$. O símbolo de + acima concatena strings. Exemplo: "a"+"bcd" = "abcd".
Obs$_2$. Todos elementos de A são provenientes do passo base e passo recursivo.

Seja $REV(s)$ a função que retorna o *reverso* do string s. Por exemplo, $REV($"*discreta*"$)$ = "*atercsid*" e $REV($"*k*"$)$ = "*k*".

Prove por indução estrutural que todos os elementos de A são palíndromos. Ou seja, queremos provar que: $REV(s) = s$, para todo $s \in A$.

Justifique cada passo de prova com "Def. de REV", "Aritmética", "Hipótese de Indução" ou com a equação [1] abaixo:

$$REV(\text{“}b\text{”} + s + \text{“}b\text{”}) = REV(\text{“}b\text{”}) + REV(s) + REV(\text{“}b\text{”}) \quad [1]$$

Resposta:

Caso base.

$$
\begin{aligned}
& REV(\text{“}ana\text{”}) & \\
& = \text{“}ana\text{”} & \text{[Def. de } REV\text{]}
\end{aligned}
$$

Passo indutivo.

$$
\begin{aligned}
& REV(\text{“}b\text{”} + s + \text{“}b\text{”}) & \\
& = REV(\text{“}b\text{”}) + REV(s) + REV(\text{“}b\text{”}) & \text{[1]} \\
& = REV(\text{“}b\text{”}) + s + REV(\text{“}b\text{”}) & \text{[Hipótese de Indução]} \\
& = \text{“}b\text{”} + s + \text{“}b\text{”} & \text{[Definição de } REV \text{ (2x)]}
\end{aligned}
$$

Rascunho (opcional):

a) Qual o objetivo de prova do caso base?
Resposta: $REV($"*ana*"$)$ = "*ana*"

b) Prove o caso base.
Resposta:

$$\begin{array}{ll} REV(\text{“}ana\text{”}) & \\ = \text{“}ana\text{”} & [\text{Def. de } REV] \end{array}$$

c) Qual o objetivo de prova do passo indutivo?
Resposta: $REV(\text{“}b\text{”} + s + \text{“}b\text{”}) = \text{“}b\text{”} + s + \text{“}b\text{”}$

d) Qual a hipótese de indução?
Resposta: $REV(s) = s$

e) Prove o passo indutivo.
Resposta:

$$\begin{array}{ll} REV(\text{“}b\text{”} + s + \text{“}b\text{”}) & \\ = REV(\text{“}b\text{”}) + REV(s) + REV(\text{“}b\text{”}) & [1] \\ = REV(\text{“}b\text{”}) + s + REV(\text{“}b\text{”}) & [\text{Hipótese de Indução}] \\ = \text{“}b\text{”} + s + \text{“}b\text{”} & [\text{Definição de } REV \text{ (2x)}] \end{array}$$

10. $\{2,0\ pt\}$ Seja $A = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \ldots\}$ um conjunto de conjuntos. Defina o conjunto A de forma recursiva.

Dica: faça uso da operação de *tamanho* de um conjunto. O tamanho de um conjunto s é dado por $|s|$. Por exemplo, $|\{7, 354, 10\}| = 3$.

Resposta:
Passo base. $\{1\} \in A$.
Passo recursivo. Se $s \in A$, então $s \cup \{|s| + 1\} \in A$.
Os elementos de A são provenientes apenas dos passos base e recursivo.

11. Seja A um conjunto de conjuntos definido recursivamente abaixo.
Caso base. $\emptyset \in A$.
Passo recursivo. Se $s \in A$, então $s \cup \emptyset \in A$.

Obs. Todos elementos de A são provenientes do passo base e passo recursivo.

Prove por indução estrutural que o tamanho de todo elemento de A é 0. Ou seja, queremos provar que $|s| = 0$, para todo $s \in A$.
Justifique cada passo de prova com “Def. de tamanho“, “Aritmética”, “Hipótese de Indução” ou com as equações [1] e [2] abaixo:

$$\begin{array}{ll} |B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C| & [1] \\ B \cap \emptyset = \emptyset & [2] \end{array}$$

Resposta:

Caso base.

$$\begin{array}{ll} |\emptyset| & \\ = 0 & [\text{Def. de tamanho}] \end{array}$$

Passo indutivo.

$$
\begin{aligned}
& |s \cup \emptyset| \\
&= |s| + |\emptyset| - |s \cap \emptyset| && [1] \\
&= |s| + |\emptyset| - |\emptyset| && [2] \\
&= 0 + |\emptyset| - |\emptyset| && [\text{Hipótese de Indução}] \\
&= 0 + 0 + 0 && [\text{Definição de tamanho (2x)}] \\
&= 0 && [\text{Aritmética}]
\end{aligned}
$$

Rascunho (opcional):

a) Qual o objetivo de prova do caso base?
Resposta: $|\emptyset| = 0$

b) Prove o caso base.
Resposta:

$$
\begin{aligned}
& |\emptyset| \\
&= 0 \quad [\text{Def. de tamanho}]
\end{aligned}
$$

c) Qual o objetivo de prova do passo indutivo?
Resposta: $|s \cup \emptyset| = 0$

d) Qual a hipótese de indução?
Resposta: $|s| = 0$

e) Prove o passo indutivo.
Resposta:

$$
\begin{aligned}
& |s \cup \emptyset| \\
&= |s| + |\emptyset| - |s \cap \emptyset| && [1] \\
&= |s| + |\emptyset| - |\emptyset| && [2] \\
&= 0 + |\emptyset| - |\emptyset| && [\text{Hipótese de Indução}] \\
&= 0 + 0 + 0 && [\text{Definição de tamanho (2x)}] \\
&= 0 && [\text{Aritmética}]
\end{aligned}
$$

4.3 Recursão

12. $\{0,2\ pt\}$ A função de Ackermann é definida abaixo para m e n inteiros positivos. Calcule $Ack(1,1)$. Exiba seus cálculos.

$$
Ack(m,n) = \begin{cases} n+1 & \text{if } m = 0 \\ Ack(m-1,1) & \text{if } (m > 0) \wedge (n = 0) \\ Ack(m-1, Ack(m, n-1)) & \text{if } (m > 0) \wedge (n > 0) \end{cases}
$$

Resposta:

$$
\begin{aligned}
& Ack(1,1) \\
&= Ack(0, Ack(1,0)) \\
&= Ack(0, Ack(0,1)) \\
&= Ack(0,2) \\
&= 3
\end{aligned}
$$

13. $\{0,2\ pt\}$ Seja L a função abaixo similar ao número de Lucas. Calcule $L(8)$. Exiba seus cálculos.

$$L(n+2) = \begin{cases} 2 & \text{se } n = 0 \\ 1 & \text{se } n = 1 \\ L(n+1) + L(n) & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Resposta: Cálculos:

$L(8)$
$= L(7) + L(6)$
$= L(6) + L(5) + L(5) + L(4)$
$= L(5) + L(4) + L(4) + L(3) + L(4) + L(3) + L(3) + L(2)$
$= L(4) + L(3) + L(3) + L(2) + L(3) + L(2) + 1 + L(3) + L(2) + 1 + 1 + 2$
$= L(3) + L(2) + 1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 2$
$= 1 + 2 + 1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 2$
$= 18$

Outra forma de calcular:

$L(2) = 2$
$L(3) = 1$
$L(4) = 1 + 2 = 3$ (*a soma dos 2 valores anteriores*)
$L(5) = 3 + 1 = 4$
$L(6) = 4 + 3 = 7$
$L(7) = 7 + 4 = 11$
$L(8) = 11 + 7 = 18$

14. $\{0,5\ pt\}$ Defina de forma recursiva o conjunto F que contém todos os usuários do Facebook. Assuma que: (1) o primeiro usuário foi Mark Zuckerberg; e que (2) só entra no Facebook aqueles que são convidados por quem já é usuário do Facebook.
Resposta:
Passo base. Mark Zuckerberg $\in F$.
Passo recursivo. Se *y foi convidado por x* e $x \in F$, então $y \in F$.
Regra da exclusão. Os elementos de F são provenientes unicamente do passo base e passo recursivo.

15. $\{1,0\ pt\}$ Defina de forma recursiva o conjunto P de todos as pessoas já existentes no planeta. Assuma que as primeiras pessoas foram Adão e Eva.
Resposta:
Passo base 1. Adão $\in P$.
Passo base 2. Eva $\in P$.
Passo recursivo. Se x é filho de y e $y \in P$, então $x \in P$.
Regra da exclusão. Os elementos de P são provenientes unicamente dos passos base e passo recursivo.

16. $\{0,5\ pt\}$ Calcule $L(0)$, $L(1)$, $L(-1)$, $L(-2)$ e $L(-3)$, onde $L(n)$ é definido abaixo. Exiba seus cálculos.
Passo base 1. $L(0) = 2$
Passo base 2. $L(1) = 1$

Passo recursivo. $L(n-2) = L(n) - L(n-1)$

Resposta:

$L(0) = 2$
$L(1) = 1$
$L(-1) = L(1-2) = L(1) - L(1-1) = L(1) - L(0) = 1 - 2 = -1$
$L(-2) = L(0-2) = L(0) - L(0-1) = L(0) - L(-1) = 2 - (-1) = 3$
$L(-3) = L(-1-2) = L(-1) - L(-1-1) = L(-1) - L(-2) = -1 - 3 = -4$

5 Relações

1. $\{2\ pt\}$ Seja R uma relação em $A = \{a, b, c, d\}$ dada por

$$R = \{(a,d), (b,a), (b,c), (c,a), (c,d), (d,c)\}.$$

Utilize matrizes para calcular o fecho transitivo de R.
Resposta:
Assumindo que a linha e a coluna representam os vértices a, b, c e d (nesta ordem):

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_{R^*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A fórmula é $M_r \vee (M_r \odot M_r) \vee (M_r \odot M_r \odot M_r) \vee (M_r \odot M_r \odot M_r \odot M_r)$.

2. Seja R uma relação em $A = \{1, 2, 3, 4\}$ definida por:

$$R = \{(1,2), (2,1), (3,1), (4,2), (4,3)\}.$$

Defina:

a) $\{1,0\ pt\}$ O fecho reflexivo de R;
Resposta: $R' = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,3), (4,2), (4,3), (4,4)\}$.

b) $\{1,0\ pt\}$ O fecho simétrico de R;
Resposta: R' $= \{(1,2), (1,3), (2,1), (2,4), (3,1), (3,4), (4,2), (4,3)\}$.

c) $\{2,0\ pt\}$ O fecho transitivo de R; Utilize matrizes e mostre seus cálculos.
Resposta:

$$\mathbf{M}_{R^*} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} R' = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$$

3. $\{2,0\ pt\}$ Seja R uma relação em $A = \{1, 2, 3, 4\}$ definida por

$$R = \{(2,1), (2,3), (3,1), (3,4), (4,1), (4,3)\}$$

Utilize matrizes para calcular o fecho transitivo de R.
Resposta:

$$\mathbf{M}_{R^*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Sejam $B = \{1, 2, 3\}$ e $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$ uma relação em B.

   a) $\{0, 25\ pt\}$ Defina o fecho reflexivo de R.
   Resposta: $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

   b) $\{0, 25\ pt\}$ Defina o fecho simétrico de R.
   Resposta: $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$

5. $\{2\ pt\}$ Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $R = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$ uma relação em A. Calcule a matriz $\mathbf{M}_{R^*}$ que representa o fecho transitivo de R.
   Resposta:

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{R \circ R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{(R \circ R) \circ R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{R^*} = \mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_{R \circ R} \vee \mathbf{M}_{(R \circ R) \circ R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

   a) $\{1, 0\ pt\}$ Defina uma relação em A que seja reflexiva, simétrica e antissimétrica simultaneamente.
   Resposta: $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

   b) $\{1, 0\ pt\}$ Defina uma relação em A que seja irreflexiva e simétrica simultaneamente.
   Resposta: $\{(2, 1), (1, 2)\}$

   c) $\{1, 0\ pt\}$ Defina uma relação em A que seja irreflexiva e assimétrica simultaneamente.
   Resposta: $\{(2, 1)\}$

7. A empresa Golaço oferece voos (Recife,Aracaju), (Aracaju, João Pessoa) e (João Pessoa, Recife).

   a)$\{2, 0\ pt\}$ Calcule o fecho transitivo desta relação usando matrizes. Exiba seus cálculos. Faça uma matriz com linha e coluna representando Recife, Aracaju e João Pessoa (nesta ordem).
   Resposta: Assumindo linha e coluna na ordem Recife, Aracaju e João

Pessoa.

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{R\circ R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{(R\circ R)\circ R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{R^*} = \mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_{R\circ R} \vee \mathbf{M}_{(R\circ R)\circ R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b)$\{0,5\ pt\}$ Baseado na matriz do fecho transitivo, liste os pares de voos possíveis com a Golaço (incluindo voos com escalas).
Resposta: (Recife, Recife), (Recife, Aracaju), (Recife, João Pessoa), (Aracaju, Recife), (Aracaju, Aracaju), (Aracaju, João Pessoa), (João Pessoa, Recife), (João Pessoa, Aracaju), (João Pessoa, João Pessoa),

8. Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

   $\{1,0\ pt\}$ Defina uma relação R_1 em A que seja reflexiva.
   Resposta: $R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$.
   Obs. R_1 é reflexiva, antissimétrica e transitiva e serviria como resposta a todas as letras a), b) e c).

   $\{1,0\ pt\}$ Defina uma relação R_2 em A que seja reflexiva e antissimétrica.
   Resposta: $R_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(3,4)\}$.

   $\{1,0\ pt\}$ Defina uma relaçào R_3 em A que seja reflexiva, antissimétria e transitiva.
   Resposta: $R_3 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,3),(1,3)\}$.

9. Seja $PESSOAS = \{João, Maria, Raimundo, Teresa\}$.

   a)$\{0,5\ pt\}$ Liste os pares da relação $R = \{(a,b) \mid a\ amava\ b\}$ em $PESSOAS$ baseado no texto de Drummond: "João amava Teresa que amava Raimundo que amava Maria."
   Resposta:

$$R = \{(João, Teresa), (Teresa, Raimundo), (Raimundo, Maria)\}$$

   b)$\{0,5\ pt\}$ A relação R é transitiva? Justifique sua resposta.
   Resposta: A relação não é transitiva. Justificativa: João amava Teresa e Teresa amava Raimundo, mas João não amava Raimundo.

   c)$\{1,0\ pt\}$ Utilize matrizes para calcular o fecho transitivo. Faça uma matriz com linha e coluna representando João, Maria, Raimundo e Teresa (nesta

ordem).
Resposta:

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{R \circ R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{(R \circ R) \circ R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{((R \circ R) \circ R) \circ R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{R^*} = \mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_{R \circ R} \vee \mathbf{M}_{(R \circ R) \circ R} \vee \mathbf{M}_{((R \circ R) \circ R) \circ R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

d)$\{0,5\ pt\}$ Liste os pares que compõem o fecho transitivo.
Resposta:

$$\begin{aligned} R^* = \; & \{(João, Maria), \\ & (João, Raimundo), \\ & (João, Teresa), \\ & (Raimundo, Maria), \\ & (Teresa, Maria), \\ & (Teresa, Raimundo)\} \end{aligned}$$

10. Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Construa as relações R_1, R_2, R_3 e R_4 em A abaixo. "Construir relações" significa definir seus pares. Por exemplo, $R_1 = \{(1, 1), (2, 1)\}$.

   a) $\{1,0\ pt\}$ Construa R_1, tal que ela seja a **menor** relação reflexiva, antissimétrica e transitiva.
   Resposta: $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

   b) $\{0,5\ pt\}$ Construa R_2 tal que ela seja reflexiva e simétrica.
   Resposta: $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

   c) $\{0,5\ pt\}$ Contrua R_3, tal que ela seja igual ao seu fecho simétrico.
   Resposta: $R_1 = \{(1, 2), (2, 1)\}$

   d) $\{0,5\ pt\}$ Construa R_4, tal que ela seja assimétrica.
   Resposta: $R_1 = \{(1, 2)\}$

11. $\{2,0\ pt\}$ Seja $A = \{1,2,3\}$. Seja $R = \{(1,2),(2,2),(2,3),(3,1)\}$. Calcule o fecho transitivo utilizando matrizes. Faça uma matriz com linha e coluna representando os elementos 1, 2 e 3 (nesta ordem).
Resposta:

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{R\circ R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{(R\circ R)\circ R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{R^*} = \mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_{R\circ R} \vee \mathbf{M}_{(R\circ R)\circ R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

12. Seja $A = \{1,2,3,4\}$. Sejam $R_1 = \{(1,2),(1,3),(1,4)\}$, $R_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ e $R_3 = \{(3,1),(4,4)\}$ relações em A. Defina que propriedades as relações abaixo possuem: reflexividade, simetria, transitividade, antissimetria, ou qualquer combinação destas. Por exemplo, "reflexividade, antissimetria e transitividade" é uma possível resposta.

   a) $\{0,5\ pt\}$ Fecho simétrico de $(R_2 \cup R_3)$
   Resposta: $R_2 \cup R_3 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(3,1),(4,4)\}$. O fecho simétrico de $R_2 \cup R_3$ é $\{(1,1),(2,2),(3,3),(3,1),(4,4),(1,3)\}$, que é reflexivo, simétrico e transitivo.

   b) $\{0,5\ pt\}$ $R_1 \circ R_2$
   Resposta: $R_1 \circ R_2 = \{(1,2),(1,3)\}$, que é antissimétrica e transitiva.

   c) $\{0,5\ pt\}$ $R_1 \cup R_2 \cup R_3$
   Resposta: $R_1 \cup R_2 \cup R_3 = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,1),(2,2),(3,3),(3,1),(4,4)\}$, que é reflexiva.

   d) $\{0,5\ pt\}$ Fecho reflexivo de R_2
   Resposta: O fecho reflexivo de R_2 é $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$, que é reflexivo, simétrico, antissimétrico e transitivo.

   e) $\{0,5\ pt\}$ $R_1 - R_2$
   Resposta: $R_1 - R_2 = R_1$, que é antissimétrico e transitivo.

13. Seja $A = \{Bicicleta, Fusca, Ferrari\}$.
Seja $R = \{(x,y) \in A^2 \mid x \text{ é mais rápido que } y\}$.

   a) $\{0,75\ pt\}$ Descreva os pares (x,y) que pertençam a R.
   Resposta: $R = \{(Fusca, Bicicleta), (Ferrari, Bicicleta), (Ferrari, Fusca)\}$

b) $\{0,75\ pt\}$ Das propriedades reflexividade, simetria, antissimetria e transitivade, quais destas R possui?
Resposta: R é antissimétrico e transitivo.

c) $\{1,5\ pt\}$ Calcule o fecho transitivo utilizando matrizes. Faça uma matriz com linha e coluna representando os elementos Bicicleta, Fusca e Ferrari (nesta ordem).
Resposta:

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{R \circ R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{(R \circ R) \circ R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{R^*} = \mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_{R \circ R} \vee \mathbf{M}_{(R \circ R) \circ R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

14. $\{2,0\ pt\}$ Sejam $A = \{1,2,3\}$ e $R = \{(1,2),(2,1),(2,3)\}$ uma relação em A. Calcule a matriz $\mathbf{M}_{R^*}$ que representa o fecho transitivo de R.
Resposta:

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{R \circ R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{(R \circ R) \circ R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{R^*} = \mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_{R \circ R} \vee \mathbf{M}_{(R \circ R) \circ R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

15. Seja $A = \{1,2,3,4\}$.

a) $\{0,5\ pt\}$ Defina uma relação em A que seja simultaneamente reflexiva e antissimétrica.
Resposta: $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

b) $\{0,5\ pt\}$ Defina uma relação em A que seja simultaneamente simétrica e antissimétrica.
Resposta: $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

c) $\{0,5\ pt\}$ Defina o fecho reflexivo da relação definida na letra b).
Resposta: $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

d) $\{0,5\ pt\}$ Defina uma relação em A que seja igual ao seu fecho simétrico.
Resposta: Para ser igual o fecho simétrico, basta a relação ser simétrica.
Exemplo: $\{(1,2),(2,1)\}$

16. Seja $CLUBE$ o conjunto dos clubes de futebol do Brasil. Seja $DATA$ o conjunto das datas (por exemplo, $21/03/1932 \in DATA$). E sejam $GANHOU$ e $EMPATOU$ relações que armazenam os resultados dos jogos disputados em uma certa data.
$GANHOU = \{(a,b,c) \in CLUBE \times CLUBE \times DATA \mid a\ ganhou\ de\ b\ no\ dia\ c\}$
$EMPATOU = \{(a,b,c) \in CLUBE \times CLUBE \times DATA \mid (a\ jogou\ em\ casa) \wedge (a\ empatou\ com\ b\ no\ dia\ c)\}$.

a) $\{0,50\ pt\}$ Defina uma expressão matemática que calcule o percentual de vitórias do Náutico em relação ao total de jogos disputados pelo Náutico.
Dica: Exemplo de uma expressão matemática que calcula o número de vitórias do Santa: $|\{(a,b,c) \in GANHOU \mid a = Santa\}|$, onde $|A|$ calcula o tamanho do conjunto A.
Resposta:
$100 \cdot \frac{|\{(a,b,c) \in GANHOU \mid a=Nautico\}|}{|\{(a,b,c) \in GANHOU \mid (a=Nautico) \vee (b=Nautico)\}| + |\{(a,b,c) \in EMPATOU \mid (a=Nautico) \vee (b=Nautico)\}|}$

b) $\{0,50\ pt\}$ Se uma vitória vale 3 pontos, um empate vale 1 ponto e uma derrota vale 0 ponto, defina uma expressão que calcule o número de pontos ganhos pelo Sport.
Resposta:

$$3 \cdot |\{(a,b,c) \in GANHOU \mid a = Sport\}| +$$
$$|\{(a,b,c) \in EMPATOU \mid (a = Sport) \vee (b = Sport)\}|$$

17. Seja $PESSOAS$ o conjunto das pessoas que sabem seu próprio CPF decorado. Seja $R = \{(a,b) \in PESSOAS^2 \mid a\ sabe\ o\ CPF\ de\ b\}$.

a) $\{0,2\ pt\}$ R é reflexiva? Justifique sua resposta em, no máximo, 2 linhas.
Resposta: Sim. Toda pessoa sabe seu próprio CPF.

b) $\{0,2\ pt\}$ R é simétrica? Justifique sua resposta em, no máximo, 2 linhas.
Resposta:
Se o aluno interpretou que $PESSOAS$ sabem **apenas** seu próprio CPF decorado (e de mais ninguém), então a resposta é "Sim" porque só existem pares do tipo (a,a) em R e (a,a) é simétrica a (a,a).

Se o aluno interpretou que $PESSOAS$ sabem seu próprio CPF decorado e talvez o de outras pessoas, então a resposta é "Não", porque nem sempre se a sabe o CPF de b, então b sabe o CPF de a.

c) $\{0,2\ pt\}$ R é antissimétria? Justifique sua resposta em, no máximo, 2 linhas.

Resposta:
Se o aluno interpretou que *PESSOAS* sabem **apenas** seu próprio CPF decorado (e de mais ninguém), então a resposta é "Sim" porque só existem pares do tipo (a, a) em R e (a, a) é o único tipo de simetria permitida pela antissimetria.

Se o aluno interpretou que *PESSOAS* sabem seu próprio CPF decorado e talvez o de outras pessoas, então a resposta é "Não" porque nem sempre se a sabe o CPF de b e b sabe o CPF de a, temos que $a = b$.

d)$\{0,2\ pt\}$ R é transitiva? Justifique sua resposta em, no máximo, 2 linhas.
Resposta:
Se o aluno interpretou que *PESSOAS* sabem **apenas** seu próprio CPF decorado (e de mais ninguém), então a resposta é "Sim" porque só existem pares do tipo (a, a) em R e (a, a) é transitivo com (a, a).

Se o aluno interpretou que *PESSOAS* sabem seu próprio CPF decorado e talvez o de outras pessoas, então a resposta é "Não" porque nem sempre se a sabe o CPF de b e b sabe o CPF de c, temos que a sabe o CPF de c.

18. $\{2,0\ pt\}$ Seja R uma relação em $A = \{a, b, c, d\}$ dada por

$$R = \{(a, c), (b, c), (c, b), (c, d), (d, c)\}.$$

Utilize matrizes para calcular o fecho transitivo de R.
Resposta:
Assumindo que a linha e a coluna representam os vértices a, b, c e d (nesta ordem):

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_R^{[2]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_R^{[3]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_R^{[4]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_R^{[2]} \vee \mathbf{M}_R^{[3]} \vee \mathbf{M}_R^{[4]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$R^* = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (c, b), (c, c), (c, d), (d, b), (d, c), (d, d)\}$

19. Seja *LIVROS* o conjunto de todos os livros do planeta.

a)$\{0,85\ pt\}$ A relação $R_1 = \{(a,b) \in LIVROS^2 \mid a\ menciona\ b\}$ é transitiva? Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas.
Resposta: Não. Nem sempre se a menciona b e b menciona c, a menciona c.

b)$\{0,85\ pt\}$ A relação $R_2 = \{(a,b) \in LIVROS^2 \mid a\ é\ mais\ vendido\ que\ b\}$ é reflexiva? Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas.
Resposta: Não. Um livro não pode ser mais vendido que ele mesmo.

c)$\{0,85\ pt\}$ A relação $R_3 = \{(a,b) \in LIVROS^2 \mid a\ é\ a\ tradução\ de\ b\ em\ outra\ língua\}$ é simétrica? Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas.
Resposta: Sim. Se a é a tradução de b, então b é a tradução de a.

d)$\{0,85\ pt\}$ A relação R_3 da letra **c)** é antissimétrica? Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas.
Resposta: Não. Se a é a tradução de b e b é a tradução de a, a não necessariamente é igual a b.

20. Seja $PESSOAS$ o conjunto das pessoas.
Seja $TWITTER = \{(a,b) \in PESSOAS \times PESSOAS \mid a\ segue\ b\ no\ Twitter\}$ uma relação em $PESSOAS$.

a)$\{0,50\ pt\}$ Defina uma expressão matemática que calcula quantas pessoas seguem tanto Luciano Huck quanto William Bonner no Twitter.
Dica: Exemplo de uma expressão matemática que calcula quantas pessoas seguem apenas Luciano Huck: $|\{a \mid (a, Luciano\ Huck) \in TWITTER\}|$, onde $|A|$ calcula o tamanho do conjunto A.
Resposta:
$|\ \{a \mid (a, Luciano\ Huck) \in TWITTER\} \cap \{a \mid (a, William\ Bonner) \in TWITTER\}\ |$
ou
$|\{a \mid (a, Luciano\ Huck) \in TWITTER \wedge (a, William\ Bonner) \in TWITTER\}|$

b1)$\{0,50\ pt\}$ Defina uma expressão matemática que calcula quantas pessoas seguem e são seguidas por Luciano Huck.
Resposta: $|\{a \mid (a, Luciano\ Huck) \in TWITTER \wedge (Luciano\ Huck, a) \in TWITTER\}|$

b2)$\{0,2\ pt\}$ $TWITTER$ é reflexiva? Justifique sua resposta em, no máximo, 2 linhas.
Resposta: Não. Nem toda pessoa segue ela própria no Twitter.

c)$\{0,2\ pt\}$ $TWITTER$ é simétrica? Justifique sua resposta em, no máximo, 2 linhas.
Resposta: Não. Nem sempre se a segue b, então b segue a.

d)$\{0,2\ pt\}$ $TWITTER$ é antissimétria? Justifique sua resposta em, no máximo, 2 linhas.
Resposta: Não. Nem sempre se a segue b e b segue a, temos que $a = b$.

e)$\{0,2\ pt\}$ $TWITTER$ é transitiva? Justifique sua resposta em, no máximo, 2 linhas.
Resposta: Não. Nem sempre se a segue b e b segue c, temos que a segue c.

21. $\{2,0\ pt\}$ Seja R uma relação em $A = \{a, b, c, d\}$ dada por

$$R = \{(a, c), (b, a), (c, b), (c, d), (d, a)\}.$$

Utilize matrizes para calcular o fecho transitivo de R.
Resposta:
Assumindo que a linha e a coluna representam os vértices a, b, c e d (nesta ordem):

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_R^{[2]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_R^{[3]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_R^{[4]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_R^{[2]} \vee \mathbf{M}_R^{[3]} \vee \mathbf{M}_R^{[4]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$R^* = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c), (d, a), (d, b), (d, c)\}$

22. Seja *PESSOAS* o conjunto de todas as pessoas do planeta.

   a)$\{0,85\ pt\}$ A relação $R_1 = \{(a, b) \in PESSOAS^2 \mid a \textit{ odeia } b\}$ é transitiva? Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas.
   Resposta: Não. Nem sempre se a odeia b e b odeia c, a odeia c.

   b)$\{0,85\ pt\}$ A relação $R_2 = \{(a, b) \in PESSOAS^2 \mid a \textit{ ama } b\}$ é antissimétrica? Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas.
   Resposta: Não. Antissimetria só permite 1 tipo de simetria: aquela do tipo (a, a). Entretanto, R_2 possui pares (a, b) e (b, a), onde $a \neq b$.

   c)$\{0,85\ pt\}$ A relação R_2 da letra **b)** é simétrica? Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas.
   Resposta: Não. Nem sempre se a ama b, b ama a.

   d)$\{0,85\ pt\}$ A relação $R_3 = \{(a, b) \in PESSOAS^2 \mid a \textit{ vai matar } b\}$ é reflexiva? Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas.
   Resposta: Não. Nem todo a vai matar a (nem todo mundo vai se suicidar).

23. Seja $A = \{a, b, c\}$.

a) $\{0,50\ pt\}$ Classifique a relação $R = \{(a,a),(b,b),(a,b)\}$ em A como reflexiva, simétrica, antissimétrica ou transitiva (ou uma combinação delas). Exemplo de resposta: reflexiva, simétrica e transitiva.
Resposta: Antissimétrica e transitiva.

b) $\{0,50\ pt\}$ Defina uma relação em A que seja simétrica e antissimétrica ao mesmo tempo. "Definir uma relação" significa listar seus pares. Por exemplo, $\{(a,b),(b,c)\}$.
Resposta: Qualquer relação que só contenha pares do tipo (x,x). Por exemplo, $\{(c,c)\}$.

c) $\{0,50\ pt\}$ Defina o fecho reflexivo de $R = \{(a,a),(b,b),(a,b)\}$, onde R é uma relação em A.
Resposta: $\{(a,a),(b,b),(a,b),(c,c)\}$

d) $\{0,50\ pt\}$ Use matrizes para calcular o fecho transitivo da relação em A $S = \{(a,c),(b,a),(c,b)\}$. Exiba seus cálculos.
Resposta: Assumindo que a linha e a coluna representam os vértices a, b, c (nesta ordem):

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_{R \circ R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{(R \circ R) \circ R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{R^*} = \mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_{R \circ R} \vee \mathbf{M}_{((R \circ R) \circ R)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$R^* = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$

24. Seja *PESSOAS* o conjunto de todas as pessoas do planeta. Seja R uma relação em *PESSOAS* definida como

$$R = \{(a,b) \in PESSOAS^2 \mid a \text{ tem altura menor ou igual a } b\}.$$

a) $\{0,85\ pt\}$ R é antissimétrica? Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas.
Resposta: Não. Se a tem altura menor ou igual a b e b tem altura menor ou igual a a, não significa que $a = b$. Neste caso, a e b têm a mesma altura, mas não são necessariamente a mesma pessoa.

b) $\{0,85\ pt\}$ Crie uma relação S em *PESSOAS*, diferente de R, que seja transitiva. Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas.
Resposta: $R = \{(a,b) \in PESSOAS \mid a \text{ estuda mais que } b\}$. Justificativa: se a estuda mais que b e b estuda mais que c, então a estuda mais que c.

25. Seja $A = \{a,b,c\}$.

a) $\{0,50\ pt\}$ Defina uma relação em A que seja reflexiva. "Definir uma relação" significa listar seus pares. Por exemplo, $\{(a,b),(b,c)\}$.
Resposta: Qualquer relação que contenha $\{(a,a),(b,b),(c,c)\}$.

b) $\{0,50\ pt\}$ Defina uma relação em A que seja antissimétrica.

Resposta: Qualquer relação que não tenha simetria ou que tenha simetria do tipo (x, x).

c) $\{0,50\ pt\}$ Defina o fecho simétrico da relação em A, $R_1 = \{(a,b),(b,c)\}$.

Resposta: $\{(a,b),(b,c),(b,a),(c,b)\}$

d) $\{0,50\ pt\}$ Use matrizes para calcular o fecho transitivo da relação em A, $R_2 = \{(a,b),(b,c),(c,a)\}$. Exiba seus cálculos.

Resposta: Assumindo que a linha e a coluna representam os vértices a, b, c (nesta ordem):

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_{R\circ R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{(R\circ R)\circ R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{R^*} = \mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_{R\circ R} \vee \mathbf{M}_{((R\circ R)\circ R)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$R^* = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$

26. Seja *PESSOAS* o conjunto de todas as pessoas do planeta.

a)$\{0,85\ pt\}$ A relação $R_1 = \{(a,b) \in PESSOAS^2 \mid a \textit{ ganha mais dinheiro que } b\}$ é transitiva? Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas.

Resposta: Sim. Se a ganha mais dinheiro que b e b ganha mais dinheiro que c, então a ganha mais dinheiro que c.

b)$\{0,85\ pt\}$ A relação $R_2 = \{(a,b) \in PESSOAS^2 \mid a \textit{ sabe o nome de } b\}$ é antissimétrica? Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas.

Resposta: Não. Se a sabe o nome de b e b sabe o nome de a, então a não necessariamente é b.

27. Seja S o conjunto das partes de $\{1,2,3\}$.

a)$\{1,0\ pt\}$ Seja $R = \{(a,b) \in S\times S \mid a \subseteq b\}$. Qual a matriz zero-um desta relação? Obs. S é o conjunto definido lá em cima no enunciado da questão.

Resposta:

Assumindo que linhas e colunas referem-se aos elementos $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$ e $\{1,2,3\}$ (nesta ordem), temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)$\{1,0\ pt\}$ Classifique a relação R da letra **c)** como reflexiva, simétrica, antissimétrica, transitiva ou uma combinação delas.
Resposta: Reflexiva, antissimétrica e transitiva.

28. $\{3,3\}$ Seja $A = \{a, b, c\}$. Calcule o fecho transitivo da relação em A

$$R = \{(b, a), (c, b), (a, c)\}$$

utilizando matrizes zero-um.
Resposta:
Assumindo que a linha e a coluna representam os elementos a, b e c (nesta ordem):

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_R^{[2]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_R^{[3]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{R^*} = \mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_R^{[2]} \vee \mathbf{M}_R^{[3]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

29. $\{3,3\ pt\}$ Seja $A = \{a, b, c\}$. Calcule o fecho transitivo da relação em A

$$R = \{(a, b), (b, c), (c, a)\}$$

utilizando matrizes zero-um.
Resposta:
Assumindo que a linha e a coluna representam os elementos a, b e c (nesta ordem):

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_R^{[2]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_R^{[3]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{R^*} = \mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_R^{[2]} \vee \mathbf{M}_R^{[3]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

30. $\{1,0\ pt\}$ Seja P o conjunto contendo todas as pessoas do mundo. Seja $R = \{(a,b) \in P{\times}P \mid a\ sabe\ o\ nome\ de\ b\}$. Dentre reflexividade, simetria, antissimetria e transitividade, quais destas propriedades R possui? Justifique sua resposta.

   Resposta:

   Nenhuma. Não é reflexivo porque nem todos sabem o próprio nome (por exemplo, recém-nascidos). Não é simétrico porque, se eu sei o nome de Dilma Rousseff, por exemplo, ela não sabe o meu. Não é antissimétrico porque se eu sei o nome de alguém e esse alguém sabe meu nome, não necessariamente somos a mesma pessoa. E não é transitiva porque, se eu conheço uma pessoa e ela conhece outra, não necessariamente eu conheço esta outra.

31. $\{0,5\ pt\}$ Seja A o conjunto com todos os habitantes do planeta. Seja a relação $R = \{(x,y) \mid ((x,y) \in A^2)\ \wedge\ (x\ deve\ dinheiro\ a\ y)\}$. Justifique se R é ou não simétrica, antissimétria ou transitiva. Justifique em no máximo 4 linhas para cada propriedade.

   Resposta:

   Não é simétrica: se x deve dinheiro a y, não necessariamente y deve dinheiro a x.

   Não é antissimétrica. Se x deve dinheiro a y e y deve dinheiro a x, não necessariamente $x = y$.

   Não é transitiva. Se x deve dinheiro a y e y deve dinheiro a z, não necessariamente x deve dinheiro a z.

32. $\{0,5\ pt\}$ Seja A o conjunto com todos os habitantes do planeta. Invente uma relação S de A para A que seja simultaneamente simétrica e antissimétrica. Justifique sua resposta em, no máximo, 4 linhas.

   Resposta:

   $S = \{(x,y) \mid ((x,y) \in A^2) \wedge (x\ é\ y)\}$. Todos os pares de S são do tipo $(Fulano, Fulano)$, que é simétrico e antissimétrico, pois $(Fulano, Fulano)$ é a única simetria permitida pela antissimetria.

33. $\{2,0\ pt\}$ Seja $A = \{a,b,c\}$.

   Utilize matrizes para calcular o fecho transitivo de $R = \{(a,b),(b,c),(c,a)\}$.

   Resposta:

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{R \circ R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{(R \circ R) \circ R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{R^*} = \mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_{R \circ R} \vee \mathbf{M}_{(R \circ R) \circ R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

34. $\{3,4\ pt\}$ Seja a relação R definida de forma recursiva abaixo.

    Passo base. O par $(Neymar, Hulk) \in R$.

    Passo recursivo. Se $(x, y) \in R$ e y é amigo de z, então $(x, z) \in R$.

    Regra da exclusão. Todos elementos de S são provenientes do passo base e passo recursivo.

    Justifique se R é ou não simétrico, antissimétrico e transitivo. Justifique sua resposta em, no máximo, 4 linhas para cada propriedade.
    Resposta:
    Note que, em todos os pares de R, Neymar é o primeiro elemento sempre.

    Não é simétrico: se $(x, y) \in R$, **não necessariamente** $(y, x) \in R$.

    É antissimétrico: se $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R$, então $x = y$. Note que $(x, y) \in R$ significa que $x = Neymar$ (sempre) e que, $(y, x) \in R$ significa que $y = Neymar$. Portanto, $(Neymar, Neymar) \in R$ e $(Neymar, Neymar) \in R$, então $(Neymar, Neymar) \in R$.

    É transitivo: se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então, $(x, z) \in R$ porque $x = Neymar$ (por ser o primeiro elemento de (x, y)) e $y = Neymar$ (por ser o primeiro elemento de (y, z)). Ou seja, $(Neymar, Neymar) \in R$ e $(Neymar, z) \in R$ implica em $(Neymar, z) \in R$.

35. $\{1,0\ pt\}$ Seja A o conjunto com todos os habitantes do planeta que trabalham para apenas 1 empresa (ou seja, todos as pessoas que têm exatamente 1 emprego — mas não necessariamente na mesma empresa). Seja a relação $R = \{(x, y) \mid ((x, y) \in A^2) \ \wedge \ (x \ trabalha \ com \ y)\}$. Justifique se R é ou não simétrico, antissimétrico e transitivo. Justifique sua resposta em, no máximo, 4 linhas para cada propriedade.
    Resposta:
    É simétrico: se x trabalha com y, então y trabalha com x.

    Não é antissimétrico: se x trabalha com y e y trabalha com x, então não necessariamente $x = y$.

É transitivo: se x trabalha com y e y trabalha com z, então x trabalha com z, pois, neste caso, como todos trabalham para apenas 1 empresa, a empresa de x, y e z só pode ser a mesma.

36. $\{2,0\ pt\}$ Seja $A = \{a, b, c\}$.

Utilize matrizes para calcular o fecho transitivo de $R = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\}$. O fecho transitivo é igual ao fecho reflexivo neste caso?

Resposta:

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{R\circ R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{(R\circ R)\circ R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{R^*} = \mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_{R\circ R} \vee \mathbf{M}_{(R\circ R)\circ R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$R^* = A \times A$, que não é igual ao fecho reflexivo. O fecho reflexivo é

$$\{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (a, a), (b, b), (c, c)\}$$

Por exemplo, ele não possui (a, c).

37. $\{3,4\ pt\}$ Seja A o conjunto com todos os habitantes do planeta. Seja a relação $R = \{(x, y) \mid ((x, y) \in A^2) \wedge (x\ \textit{se considera amigo de}\ y\ \textit{e de todos os amigos de}\ y)\}$. Justifique se R é ou não reflexivo, simétrico e antissimétrico. Justifique sua resposta em, no máximo, 4 linhas para cada propriedade.

Resposta:

Não é reflexivo: não necessariamente todo mundo se considera amigo de si mesmo.

Não é simétrico: se x se considera amigo de y e de todos amigos de y, não necessariamente y se considera amigo de x e de todos seus amigos.

Não é antissimétrico: se x se considera amigo de y e de todos os amigos de y e y se considera amigo de x e de todos os amigos de x, então não necessariamente $x = y$.

6 Contagem

1. $\{1,0\ pt\}$ No Big Brother temos 15 competidores. A cada semana, 1 competidor é eliminado. Suponha que o resultado do Big Brother seja divulgado em forma

de uma tupla de 15 posições: ($competidor_1, competidor_2, \ldots, competidor_{15}$), onde $competidor_1$ foi o primeiro eliminado, $competidor_2$ foi o segundo eliminado e $competidor_{15}$ foi o último eliminado (no caso, $competidor_{15}$ ganhou o Big Brother). Quantas formas possíveis de resultados podem existir? Exiba seus cálculos e explique o raciocínio utilizado em no máximo 5 linhas. Não precisa simplificar seu cálculo ao máximo. Pode responder apenas com uma expressão. Por exemplo: "Resposta: $23^{540} + 50 \cdot (1000^2 + 40)$. Explicação: ...".

Resposta:
$15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 15!$. Temos 15 possibilidades para o primeiro eliminado, 14 para o segundo eliminado, 13 para o terceiro eliminado, etc.

2. $\{1,0\ pt\}$ Temos 2000 candidatos para 30 vagas no vestibular de Engenharia da Computação. Calcule o n inteiro tal que, pelo Princípio da Casa dos Pombos, pelo menos uma vaga será disputada por pelo menos n candidatos. Exiba seus cálculos e explique em no máximo 5 linhas quem faz o papel da casa dos pombos e quem faz o papel dos pombos.
Resposta:
$\lceil 2000/30 \rceil = \lceil 66, \ldots \rceil = 67$. As casas dos pombos são as vagas e o pombos, os candidatos.

3. $\{1,0\ pt\}$ No Big Brother temos 15 competidores. A casa do Big Brother tem 4 quartos. Calcule o n inteiro tal que, pelo Princípio da Casa dos Pombos, pelo menos um quarto será ocupado pelo menos n competidores. Exiba seus cálculos e explique em no máximo 5 linhas quem faz o papel da casa dos pombos e quem faz o papel dos pombos.
Resposta:
$\lceil 15/4 \rceil = \lceil 3, \ldots \rceil = 4$. As casas dos pombos são os quartos e os pombos, os competidores.

4. $\{1,0\ pt\}$ Temos 2000 candidatos a vagas para o vestibular de Sistemas de Informação. De quantas formas possíveis podemos gerar um listão dos classificados? Assuma que o listão contém todos os 2000 candidatos em ordem de classificação. Assuma que nenhum candidato empatou com nenhum outro. Exiba seus cálculos e explique o raciocínio utilizado em no máximo 5 linhas. Não precisa simplificar seu cálculo ao máximo. Pode responder apenas com uma expressão. Por exemplo: "Resposta: $23^{540} + 50 \cdot (1000^2 + 40)$. Explicação: ...".
Resposta:
$2000 \cdot 1999 \cdot 1998 \cdot 1997 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 2000!$. Temos 2000 possibilidades para o primeiro colocado, 1999 para o segundo colocado, 1998 para o terceiro colocado, etc.

5. $\{0,5\ pt\}$ Suponha que temos um baralho empilhado aleatoriamente. Suponha que retiramos uma carta do baralho de cada vez. Use o Princípio da Casa de Pombos para calcular quantas cartas de baralho devemos retirar para obtermos pelo menos 5 cartas do mesmo naipe. Exiba seus cálculos e diga quem faz o papel da casa de pombos e quem faz o papel dos pombos.
Resposta:
Casa de pombos: naipes. Pombos: cartas. Seja k o número de casas de

pombos, r o número desejado de cartas de mesmo naipe. Então, precisamos de $N = k \cdot (r-1) + 1 = 4 \cdot (5-1) + 1 = 17$.

6. $\{0,5\ pt\}$ Uma loja tem camisas brancas e azuis. Cada camisa vem nos tamanhos P, M e G, e podem ser masculinas ou femininas. Quantos tipos de camisa diferentes existem na loja? Exiba seus cálculos e explique seu raciocínio.
   Resposta:
   Podemos ter camisas brancas ou azuis (2 opções), cada uma pode ser P, M ou G (3 opções) e cada uma pode ser masculina ou feminina (2 opções). Total: $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$.

7. $\{1,0\ pt\}$ Um hotel tem 400 quartos. Quantos hóspedes são necessários para que pelo menos 1 quarto possua pelo menos 5 hóspedes? Use o Princípio da Casa de Pombos para responder e exiba seus cálculos.
   Resposta:
   Se os quartos são as casas de pombos e os hóspedes, os pombos, então temos $k = 400$ casas de pombos e precisamos de pelo menos $r = 5$ pombos em pelo menos 1 casa. Aplicando a fórmula $N = k(r-1) + 1$, precisamos de $N = 400(5-1) + 1 = 400 \cdot 4 + 1 = 1600 + 1 = 1601$ hóspedes.

8. Seja $S = \{a, b, c, d\}$ e $T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

   a) $\{0,5\ pt\}$ Quantas funções injetivas existem com domínio S e contradomínio T? Exiba seus cálculos.
   Resposta:
   Pela regra do produto, cada elemento do domínio pode estar ligado a 7 elementos, depois 6 elementos, depois 5, etc. Portanto, existem $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$.

   b) $\{0,5\ pt\}$ Quantas funções injetivas existem com domínio T e contradomínio S? Exiba seus cálculos.
   Resposta:
   Zero. Pelo Princípio da Casa de Pombos, se cada elemento do contradomínio for uma casa e cada elemento do domínio for um pombo, pelo menos uma casa vai ter pelo menos um pombo, pois $|S| = 4$ e $|T| = 7$. Ou seja, é impossível ter todos elementos do contradomínio mapeado a no máximo 1 elemento do domínio.

9. $\{1,0\ pt\}$ Uma sacola contém 50 bolas de gude. Algumas são azuis, outras são vermelhas, outras são verdes e outras são amarelas. Use o Princípio da Casa de Pombos para mostrar que existem ao menos 13 bolas de gude da mesma cor. Diga quem faz o papel da casa de pombos e quem faz o papel dos pombos.

   Resposta:
   Cada cor é uma casa de pombos e cada bola de gude é um pombo. Como temos 4 casas e 50 pombos, pelo menos uma casa vai ter pelo menos $\lceil 50/4 \rceil = \lceil 12,\ldots \rceil = 13$.

10. Seja $S = \{a, b, c\}$ e $T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

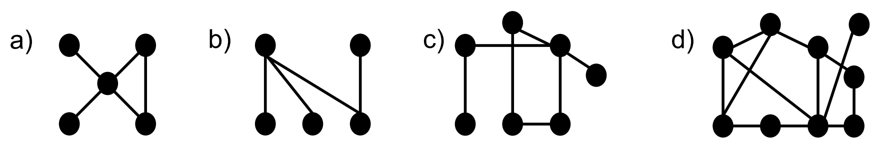
    a) $\{1,6\ pt\}$ Quantas funções injetivas existem com domínio S e contradomínio T? Exiba seus cálculos.

Resposta:
Pela regra do produto, cada elemento do domínio pode estar ligado a 8 elementos, depois 7 elementos e depois 6. Portanto, existem $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

b) $\{1,7\ pt\}$ Quantas funções injetivas existem com domínio T e contradomínio S? Exiba seus cálculos.
Resposta:
Zero. Pelo Princípio da Casa de Pombos, se cada elemento do contradomínio for uma casa e cada elemento do domínio for um pombo, pelo menos uma casa vai ter pelo menos um pombo, pois $|S| = 3$ e $|T| = 8$. Ou seja, é impossível ter todos elementos do contradomínio mapeado a no máximo 1 elemento do domínio.

7 Grafos

1. $\{2\ pt\}$ Use o teorema das cores para definir se os grafos abaixo são bipartidos. Caso não tenha lápis/caneta colorido: coloque um quadrado ao redor de um vértice para representar azul e um triângulo para representar vermelho.



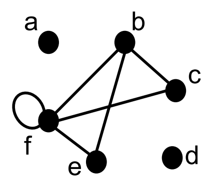
Resposta: a) Não bipartido. b) Bipartido. c) Bipartido. d) Não bipartido.

2. Seja $G = (V, A)$ um grafo não dirigido. Seja $V = \{a, b, c, d, e, f\}$. Sejam $deg(a) = deg(d) = 0$, $deg(b) = 3$, $deg(c) = deg(e) = 2$, $deg(f) = 5$.

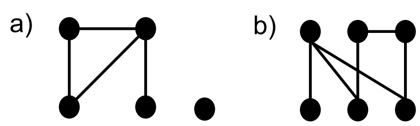
   a) $\{1\ pt\}$ Quantas arestas este grafo possui?
   Resposta:

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 0 + 3 + 2 + 2 + 5 = 12 = 2|A| \quad \therefore \quad |A| = 6$$

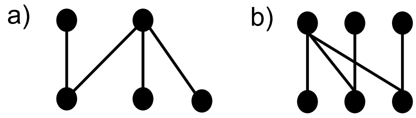
   b) $\{1\ pt\}$ Desenhe o grafo (lembre-se que pode haver laços).
   Resposta:



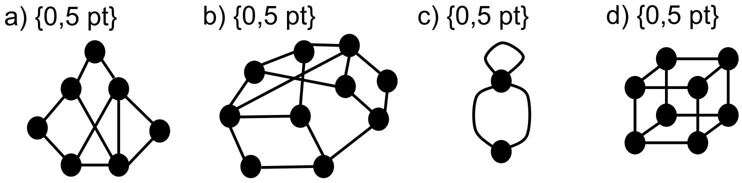
3. $\{1\ pt\}$ Remova exatamente 1 aresta ou adicione exatamente 1 aresta (ou ambos) de cada grafo abaixo de forma a transformá-los em árvore. Desenhe a árvore resultante da remoção/adição.



Resposta:

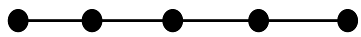


4. Utilize o teorema das cores e defina se os grafos abaixo são bipartidos ou não (exiba os desenhos pintados).

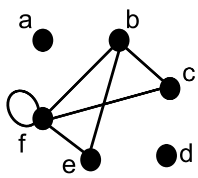


Resposta: a) Não bipartido b) Bipartido c) Não bipartido d) Bipartido

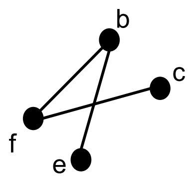
5. $\{1,0\ pt\}$ Desenhe um grafo não dirigido cuja soma dos graus de todos seus vértices seja 10.
Resposta: Pelo teorema do aperto de mãos, basta desenhar um grafo com 5 arestas.



6. $\{1,0\ pt\}$ Desenhe um sub-grafo do grafo abaixo que seja bipartido.



Resposta:
Existem várias respostas corretas. Uma delas é:



7. Suponha um grafo cujos nós são maratonistas e cuja aresta que liga a a b indica que a ganhou de b em exatamente uma maratona específica do passado. Por exemplo, se *Fulano* ganhou de *Sicrano* na maratona do Rio de 2009, então teremos uma aresta ligando *Fulano* a *Sicrano*.

a)$\{0,50\ pt\}$ Este grafo é dirigido ou não-dirigido? Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas.

Resposta: Dirigido. se a ganhou de b em uma maratona x, b não ganhou de a nesta maratona.

b)$\{0,50\ pt\}$ O que arestas paralelas representam neste grafo? Explique em no máximo 3 linhas.

Resposta: Que um maratonista competiu contra outro em mais de uma maratona. Se as arestas paralelas são na mesma direção, significa que um ganhou do outro n vezes.

c)$\{0,50\ pt\}$ Este grafo tem laços? Explique em no máximo 3 linhas.

Resposta: Não. Uma pessoa não pode ganhar dela mesma na mesma maratona.

d)$\{0,50\ pt\}$ O que o grau de um nó mede para este grafo? Explique sua resposta em no máximo 3 linhas.

Resposta: O grau de saída de a mede a quantidade de oponentes já vencidos por a (com repetição). O grau de entrada de a mede quantos oponentes venceram a (com repetição).

8. Suponha um grafo cujos nós são atores ou atrizes e cujas arestas ligam dois atores ou atrizes que atuaram juntos em um mesmo filme.

a)$\{0,50\ pt\}$ Este grafo é dirigido ou não-dirigido? Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas.

Resposta: Não dirigido. Se um ator a trabalhou com um ator b, então b também trabalhou com a. Não faz sentido haver direção em relacionamentos simétricos.

b)$\{0,50\ pt\}$ O que arestas paralelas representam neste grafo? Explique em no máximo 3 linhas.

Resposta: Dois atores que trabalharam juntos em mais de um filme.

c)$\{0,50\ pt\}$ Este grafo tem laços? Explique em no máximo 3 linhas.

Resposta: Se você acha que toda pessoa trabalha junto com ela mesma, sim. Se você acha que nunca trabalhamos juntos com nós mesmos, não.

d)$\{0,50\ pt\}$ Um nó deste grafo tem grau 1230. O que isto quer dizer? Explique sua resposta em no máximo 3 linhas.

Resposta: Que o ator representado pelo nó já trabalhou com 1230 atores.

9. Um grafo D, cujos vértices são deputados, conecta 2 deputados A e B se A e B compartilham um segredo.

a)$\{0,50\ pt\}$ O grafo D é direcionado ou não-direcionado? Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas.

Resposta: É não-direcionado. Se A compartilha um segredo com B, B também compartilha um segredo com A. Não faz sentido ter setas.

b)$\{0,50\ pt\}$ Suponha que o grafo D seja do tipo K_n. O que isto significa? Explique em no máximo 3 linhas.

Resposta: Significa que todos deputados compartilham um segredo com todos os outros deputados.

c)$\{0,50\ pt\}$ Suponha que o grafo D seja bipartido, onde uma partição (um "time") é composta pelos deputados da oposição e a outra partição (o outro "time") é composta pelos deputados da situação. Quem compartilha segredos com quem? Quem **não** compartilha segredos com quem? Explique em no máximo 3 linhas.

Resposta:

Os deputados da oposição compartilham segredos com os deputados da situação e vice-versa. Deputados da oposição e da situação não compartilham segredos entre eles.

d)$\{0,50\ pt\}$ Suponha que um subgrafo de D seja um C_3. O que este grafo significa? Explique em no máximo 3 linhas.

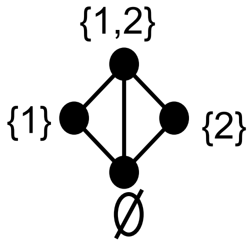
Resposta: Significa que um deputado d_1 compartilha um segredo com outro deputado d_2 que compartilha um segredo com outro deputado d_3 que compartilha um segredo com d_1.

10. $\{1,0\ pt\}$ Seja o grafo $G = (V, A)$, onde $V = P(\{1, 2\})$ (lembre-se: $P(A)$ é o conjunto das partes de A) e $A = \{\{x, y\} \mid x \subset y\}$. Desenhe G.

Resposta:

$V = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ e

$A = \{\{\emptyset, \{1\}\}, \{\emptyset, \{2\}\}, \{\emptyset, \{1, 2\}\}, \{\{1\}, \{1, 2\}\}, \{\{2\}, \{1, 2\}\}\}$



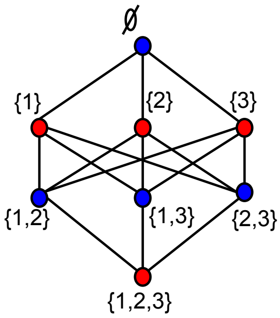
11. Seja o grafo $G = (V, A)$, onde

$$V = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$
$$A = \{\{a, b\} \mid |a| = |b| + 1\}$$

onde $|X|$ é o tamanho do conjunto X.

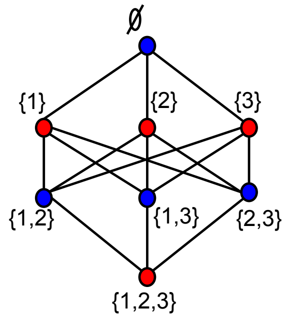
c)$\{0,85\ pt\}$ Desenhe G.

Resposta:



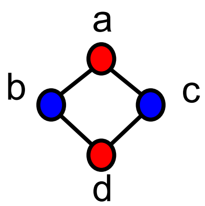
d)$\{0,85\ pt\}$ Use o teorema das cores e diga se o grafo G é bipartido ou não.

Resposta: Sim, G é bipartido.



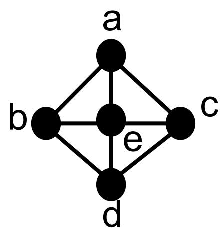
12. Seja o grafo $G = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}\})$.

   a)$\{0, 50\ pt\}$ Use o teorema das cores para definir se G é bipartido ou não.
   Resposta: É bipartido.



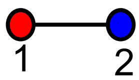
   b)$\{0, 50\ pt\}$ G é de que tipo: K_4, C_4, W_4 ou Q_4?
   Resposta: C_4.

   c)$\{0, 50\ pt\}$ Desenhe o grafo $(H \cup G)$, onde H é o grafo
   $H = (\{a, b, c, d, e\}, \{\{a, e\}, \{b, e\}, \{c, e\}, \{d, e\}\})$.
   Resposta:



   d)$\{0, 50\ pt\}$ $(H \cup G)$ é de que tipo: K_4, C_4, W_4 ou Q_4?
   Resposta: W_4.

13. $\{0, 85\ pt\}$ Seja $G = (\{1, 2, 3, 4\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 2\}\})$. Desenhe um subgrafo de G que seja bipartido.
   Resposta: Existem muitas respostas. Uma delas é:

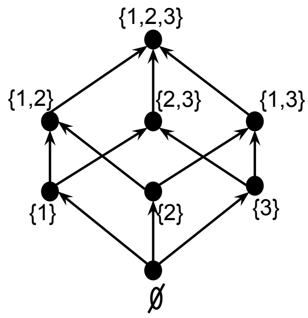


14. Seja S o conjunto das partes de $\{1, 2, 3\}$.

   a)$\{1, 0\ pt\}$ Desenhe um grafo direcionado cujos vértices são elementos de S e onde cada aresta (u, v) conecta os vértices u e v sempre que

$$(u \subset v) \wedge (|v| = (|u|+1)).$$

Lembre-se: $|u|$ e $|v|$ calcula o tamanho dos conjuntos u e v, respectivamente.
Resposta:



b)$\{1,0\ pt\}$ Qual a soma dos graus de saída dos vértices do grafo da letra **a)**?

Resposta: 12

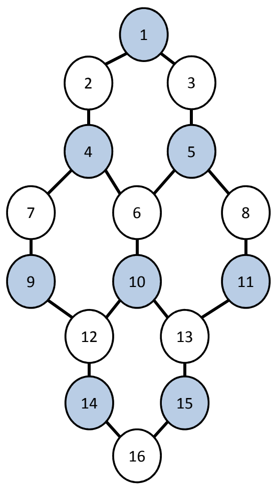
15. Suponha um grafo cujos vértices são as 26 letras do alfabeto e cujas arestas (v_1, v_2) ligam duas letras v_1 e v_2 tal que v_1 precede imediatamente v_2 na ordem alfabética. Exemplo: "a" precede "b" imediatamente na ordem alfabética, mas "a" não precede "c" imediatamente na ordem alfabética.

a)$\{1,0\ pt\}$ Este grafo é dirigido ou não-dirigido? Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas.
Resposta: Dirigido. A seta indica que letra sucede que letra.

b)$\{1,0\ pt\}$ Qual a soma dos graus de saída deste grafo?
Resposta: 25. Cada letra tem uma seta saindo dela exceto a letra "z".

16. $\{2,0\ pt\}$ Seja $V = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16\}$. E seja $A = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,4\},\{3,5\},\{4,7\},\{4,6\},\{5,6\},\{5,8\},\{7,9\},\{6,10\},\{8,11\},\{9,12\},\{10,12\},\{10,13\},\{11,13\},\{12,14\},\{13,15\},\{14,16\},\{15,16\}\}$. Desenhe o grafo $G = (V, A)$. Diga se G é bipartido ou não usando o teorema das cores.

Resposta:
Grafo bipartido.



17. $\{2,0\ pt\}$ Seja

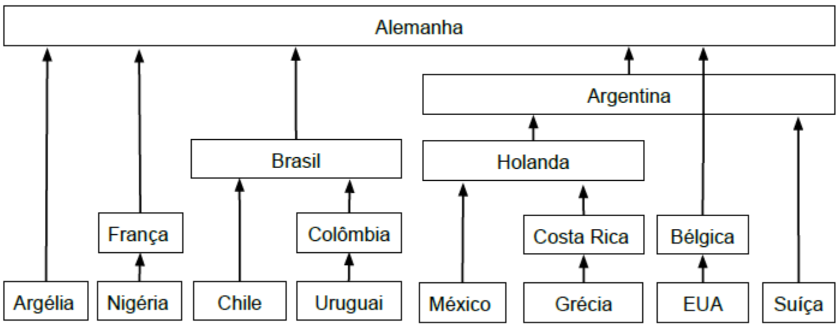
$$V = \{Alemanha, Argélia, Argentina, Bélgica, Brasil, Chile, Colômbia, Costa\ Rica, EUA, França, Grécia, Holanda, México, Nigéria, Suíça, Uruguai\}$$

Seja $A = \{(x, y) \mid ((x, y) \in V^2) \ \wedge \ (x \ perdeu \ para \ y)\}$.

Desenhe o grafo $G = (V, A)$ sabendo que:

Chile perdeu para o Brasil, Uruguai perdeu para a Colômbia, Nigéria perdeu para a França, Argélia perdeu para a Alemanha, México perdeu para a Holanda, Grécia perdeu para a Costa Rica, Suiça perdeu para a Argentina, USA perdeu para a Bélgica, Colômbia perdeu para o Brasil, França perdeu para a Alemanha, Costa Rica perdeu para a Holanda, Bélgica perdeu para a Alemanha, Brasil perdeu para a Alemanha, Holanda perdeu para a Argentina e Argentina perdeu para a Alemanha (ignore a disputa pelo terceiro lugar).

Resposta:



8 Conversão Binário-Decimal

1. Converta os números abaixo para binário. Exiba seus cálculos.

a)$\{0,50\ pt\}$ 5

Resposta:

$$5 = 2{\cdot}2 + 1$$
$$2 = 1{\cdot}2 + 0$$
$$1 = 0{\cdot}2 + 1$$

Ou seja, $(5)_{10} = (101)_2$

b)$\{0,50\ pt\}$ 10

Resposta:

$$10 = 5{\cdot}2 + 0$$
$$5 = 2{\cdot}2 + 1$$
$$2 = 1{\cdot}2 + 0$$
$$1 = 0{\cdot}2 + 1$$

Ou seja, $(10)_{10} = (1010)_2$

c)$\{0,50\ pt\}$ 20

Resposta:

$$\begin{aligned}20 &= 10{\cdot}2 + 0\\ 10 &= 5{\cdot}2 + 0\\ 5 &= 2{\cdot}2 + 1\\ 2 &= 1{\cdot}2 + 0\\ 1 &= 0{\cdot}2 + 1\end{aligned}$$

Ou seja, $(20)_{10} = (10100)_2$

d)$\{0,50\ pt\}$ 37

Resposta:

$$\begin{aligned}37 &= 18{\cdot}2 + 1\\ 18 &= 9{\cdot}2 + 0\\ 9 &= 4{\cdot}2 + 1\\ 4 &= 2{\cdot}2 + 0\\ 2 &= 1{\cdot}2 + 0\\ 1 &= 0{\cdot}2 + 1\end{aligned}$$

Ou seja, $(37)_{10} = (100101)_2$

2. $\{0,85\ pt\}$ Converta 45 em binário. Exiba seus cálculos.

Resposta:

$$\begin{aligned}45 &= 22{\cdot}2 + 1\\ 22 &= 11{\cdot}2 + 0\\ 11 &= 5{\cdot}2 + 1\\ 5 &= 2{\cdot}2 + 1\\ 2 &= 1{\cdot}2 + 0\\ 1 &= 0{\cdot}2 + 1\end{aligned}$$

Ou seja, $(45)_{10} = (101101)_2$

$$\mathsf{T} \equiv \neg \mathsf{F} \tag{1}$$
$$\neg \mathsf{T} \equiv \mathsf{F} \tag{2}$$
$$p \wedge \mathsf{T} \equiv p \tag{3}$$
$$p \vee \mathsf{F} \equiv p \tag{4}$$
$$p \vee \mathsf{T} \equiv \mathsf{T} \tag{5}$$
$$p \wedge \mathsf{F} \equiv \mathsf{F} \tag{6}$$
$$p \vee p \equiv p \tag{7}$$
$$p \wedge p \equiv p \tag{8}$$
$$\neg(\neg p) \equiv p \tag{9}$$
$$p \vee q \equiv q \vee p \tag{10}$$
$$p \wedge q \equiv q \wedge p \tag{11}$$
$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \tag{12}$$
$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \tag{13}$$
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \tag{14}$$
$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \tag{15}$$
$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q \tag{16}$$
$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q \tag{17}$$
$$p \vee (p \wedge q) \equiv p \tag{18}$$
$$p \wedge (p \vee q) \equiv p \tag{19}$$
$$p \vee \neg p \equiv \mathsf{T} \tag{20}$$
$$p \wedge \neg p \equiv \mathsf{F} \tag{21}$$
$$p \to q \equiv \neg p \vee q \tag{22}$$
$$p \to q \equiv \neg q \to \neg p \tag{23}$$
$$p \vee q \equiv \neg p \to q \tag{24}$$
$$p \wedge q \equiv \neg(p \to \neg q) \tag{25}$$
$$\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q \tag{26}$$
$$(p \to q) \wedge (p \to r) \equiv p \to (q \wedge r) \tag{27}$$
$$(p \to r) \wedge (q \to r) \equiv (p \vee q) \to r \tag{28}$$
$$(p \to q) \vee (p \to r) \equiv p \to (q \vee r) \tag{29}$$
$$(p \to r) \vee (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r \tag{30}$$
$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p) \tag{31}$$
$$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q \tag{32}$$
$$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \tag{33}$$
$$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q \tag{34}$$
$$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x) \tag{35}$$
$$\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x) \tag{36}$$
$$\begin{array}{l} p \\ p \to q \\ \hline \therefore q \end{array} \tag{37}$$
$$\begin{array}{l} \neg q \\ p \to q \\ \hline \therefore \neg p \end{array} \tag{38}$$
$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array} \tag{39}$$
$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \vee q \\ \neg q \\ \hline \therefore p \end{array} \tag{40}$$
$$\frac{p}{\therefore p \vee q} \qquad \frac{p}{\therefore q \vee p} \tag{41}$$
$$\frac{p \wedge q}{\therefore p} \qquad \frac{p \wedge q}{\therefore q} \tag{42}$$
$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array} \tag{43}$$
$$\frac{p \to q}{\therefore \neg q \to \neg p} \tag{44}$$
$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \vee r \\ \hline \therefore q \vee r \end{array} \tag{45}$$
$$a \notin A \equiv \neg(a \in A) \tag{46}$$
$$\{x \mid x \in A\} = A \tag{47}$$
$$P(a) \equiv a \in \{x \mid P(x)\} \tag{48}$$
$$(A = B) \equiv \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \tag{49}$$
$$(A \subseteq B) \equiv \forall x(x \in A \to x \in B) \tag{50}$$
$$\begin{aligned} (A \subset B) \quad \equiv \quad & \forall x(x \in A \to x \in B) \wedge \\ & \exists x(x \in B \wedge x \notin A) \end{aligned} \tag{51}$$
$$\emptyset \subseteq S, para\ todo\ S \tag{52}$$
$$\emptyset = \{x \mid \mathsf{F}\} \tag{53}$$
$$x \in \emptyset \equiv \mathsf{F} \tag{54}$$
$$S \subseteq S, para\ todo\ S \tag{55}$$
$$(A \times \emptyset) = (\emptyset \times A) = \emptyset \tag{56}$$
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\} \tag{57}$$
$$(x \in A \ \vee \ x \in B) \ \equiv \ (x \in (A \cup B)) \tag{58}$$
$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\} \tag{59}$$
$$(x \in A \ \wedge \ x \in B) \ \equiv \ (x \in (A \cap B)) \tag{60}$$
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \tag{61}$$
$$A - B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\} \tag{62}$$
$$(x \in A \ \wedge \ x \notin B) \ \equiv \ (x \in (A - B)) \tag{63}$$
$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\} \tag{64}$$
$$(x \notin A) \ \equiv \ (x \in \overline{A}) \tag{65}$$
$$A \cup \emptyset = A \tag{66}$$
$$A \cap U = A \tag{67}$$
$$A \cup U = U \tag{68}$$
$$A \cap \emptyset = \emptyset \tag{69}$$
$$A \cup A = A \tag{70}$$
$$A \cap A = A \tag{71}$$
$$\overline{(\overline{A})} = A \tag{72}$$
$$A \cup B = B \cup A \tag{73}$$
$$A \cap B = B \cap A \tag{74}$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \tag{75}$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \tag{76}$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{77}$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{78}$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \tag{79}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \tag{80}$$
$$A \cup (A \cap B) = A \tag{81}$$
$$A \cap (A \cup B) = A \tag{82}$$
$$A \cup \overline{A} = U \tag{83}$$
$$A \cap \overline{A} = \emptyset \tag{84}$$