

Matemática Discreta

Provas Anteriores

1 Lógica e Prova

1.1 Introdução a Lógica e Tabela Verdade

1. {0, 25 pt} Dê um exemplo de uma sentença que é uma proposição e justifique porque ela é uma proposição.
2. {0, 25 pt} Dê um exemplo de uma sentença que não é uma proposição e justifique porque ela não é uma proposição.
3. {0, 5 pt} Faça a tabela verdade de $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \vee \neg p)$.
4. {0, 4 pt} Prove **por tabela verdade** que $\neg((q \wedge (q \vee p)) \vee \neg q) \equiv \text{F}$.
5. {0, 7 pt} Prove por tabela verdade que $((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)) \equiv (p \rightarrow (q \wedge r))$.
6. {0, 7 pt} Prove por tabela verdade que $((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \equiv \neg(p \rightarrow \neg(q \vee r))$.
7. {0, 7 pt} Prove por tabela verdade que $((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)) \equiv ((p \wedge q) \rightarrow r)$.
8. {0, 7 pt} Prove por tabela verdade que
 $((p \rightarrow ((q \vee \neg\neg\neg q) \wedge q)) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \equiv q$.
9. {0, 7 pt} Prove por tabela verdade que
 $(((s \wedge s) \vee \neg q) \wedge (((\neg q \rightarrow \neg q) \wedge \neg q) \vee s)) \equiv (q \rightarrow s)$
10. {0, 3 pt} Traduza para uma fórmula da lógica proposicional: Se chove e molha, então ou vou à praia ou não molha (mas não ambos).
11. {0, 5 pt} Faça a tabela verdade da sua tradução do Quesito 10.
12. {0, 2 pt} Responda “Sim” ou “Não”: a frase do Quesito 10 é uma tautologia?
13. {0, 3 pt} Traduza para uma fórmula da lógica proposicional: Ganhar ou perder (ou ambos) implica em aprender e não perder.
14. {0, 5 pt} Faça a tabela verdade da sua tradução do Quesito 13.
15. {0, 2 pt} Responda “Sim” ou “Não”: a frase do Quesito 13 é uma contradição?

16. Traduza cada sentença abaixo em uma fórmula da lógica de predicados. Não precisa definir o domínio. Ele é dado no enunciado: consiste de todas as pessoas do planeta. Para definir suas fórmulas, use as funções proposicionais

$$\begin{aligned}HUMANA(x) &= \text{“}x \text{ é humana”} \\MORTAL(x) &= \text{“}x \text{ é mortal”}.\end{aligned}$$

- a) $\{0, 2 \text{ pt}\}$ Para toda pessoa, se ela é humana, então ela é mortal.
 - b) $\{0, 2 \text{ pt}\}$ Sócrates é humano.
 - c) $\{0, 2 \text{ pt}\}$ Sócrates é mortal.
 - d) $\{0, 2 \text{ pt}\}$ Não é verdade que existe uma pessoa que seja humana e não seja mortal.
17. Traduza cada sentença abaixo em uma fórmula da lógica de predicados. Não precisa definir o domínio. Ele é dado no enunciado: consiste de todas as pessoas do planeta. Para definir suas fórmulas, use as funções proposicionais

$$\begin{aligned}FACEBOOK(x) &= \text{“}x \text{ está no Facebook”} \\INTERNET(x) &= \text{“}x \text{ gosta da Internet”}.\end{aligned}$$

- a) $\{0, 2 \text{ pt}\}$ Não é verdade que existe alguém que, se ela está no Facebook, então ela não gosta da Internet.
 - b) $\{0, 2 \text{ pt}\}$ Fulano não está no Facebook.
 - c) $\{0, 2 \text{ pt}\}$ Se existe alguém que está no Facebook, então existe alguém que gosta da Internet.
 - d) $\{0, 2 \text{ pt}\}$ Para toda pessoa, ela está no Facebook e ela gosta da Internet.
18. Traduza cada sentença abaixo em uma fórmula da lógica proposicional.

- a) $\{0, 2 \text{ pt}\}$ A Microsoft tem lucro se, e somente se, a Apple tem prejuízo.
- b) $\{0, 3 \text{ pt}\}$ (A Microsoft tem lucro e a Apple tem prejuízo) ou (não é verdade que a Microsoft tem lucro e não é verdade que a Apple tem prejuízo) (ou ambos).
Obs. Os parênteses acima servem para tirar a ambiguidade da frase.
- c) $\{0, 5\}$ Faça a tabela verdade do se-e-somente-se das proposições descobertas nas letras a) e b) e responda “Sim” ou “Não” se elas são logicamente equivalentes ou não.

19. Traduza cada sentença abaixo em uma fórmula da lógica proposicional.

- a) $\{0, 2 \text{ pt}\}$ Não é verdade que, (se a Copa for no Brasil, então não haverá mais engarrafamentos).
Obs. Os parênteses acima servem para tirar a ambiguidade da frase.
- b) $\{0, 3 \text{ pt}\}$ A Copa será no Brasil e haverá engarrafamentos.
- c) $\{0, 5\}$ Faça a tabela verdade do se-e-somente-se das proposições descobertas nas letras a) e b) e responda “Sim” ou “Não” se elas são logicamente equivalentes ou não.

20. {0, 7 pt} Traduza a frase abaixo para lógica proposicional:

Se eu me eleger e eu for honesto, então não haverá milagres ou eu não sou honesto (mas não ambos).

Obs 1. Deixe claro quais frases suas variáveis p, q, r, s, t , etc. representam.

Obs 2. Existe mais de uma resposta correta. Escolha uma.

21. {0, 7 pt} Traduza a frase abaixo para lógica proposicional:

Se não é verdade que eu sou famoso e não é verdade que eu sou político, então se eu apareço na TV, então eu sou importante.

Obs. Deixe claro quais frases suas variáveis p, q, r, s, t , etc. representam.

1.2 Lógica Proposicional e de Predicados - Prova de Equivalências

1. {1, 0 pt} Prove, sem usar a tabela verdade, que

$$(p \rightarrow \neg q) \wedge (p \rightarrow \neg r) \equiv \neg((q \vee r) \wedge p).$$

Justifique cada passo da prova com uma equação em anexo.

2. {0, 8 pt} Prove **com equivalências lógicas** que

$$\neg(p \vee (p \wedge r)) \vee (\neg(q \vee \neg r)) \equiv (p \rightarrow \neg q) \wedge (p \rightarrow r).$$

Justifique cada passo de prova com as equações em anexo.

3. {2, 0 pt} Prove que

$$((r \vee s) \leftrightarrow q) \equiv (((\neg r \wedge \neg s) \vee q) \wedge (\neg q \vee (r \vee s)))$$

4. {2, 0 pt} Prove que

$$((r \vee s) \leftrightarrow q) \equiv (((\neg r \wedge \neg s) \vee q) \wedge (\neg q \vee (r \vee s)))$$

Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12), (13), (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

5. {1, 3 pt} Prove que $((q \wedge r) \vee ((\neg p \rightarrow p) \rightarrow p)) \equiv \top$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

6. {1, 3 pt} Prove que $((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \equiv \neg(p \rightarrow \neg(q \vee r))$ utilizando as equações em anexo. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

7. {4, 0 pt} Prove que $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv (p \leftrightarrow \neg q)$. **Não utilize a equação 34.** Justifique cada passo de prova com uma das equações ou regra de inferência no verso.

8. {1, 3 pt} Prove que $((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)) \equiv ((p \wedge q) \rightarrow r)$ utilizando as equações em anexo. **Não utilize a equação 30.** Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

9. {1, 3 pt} Prove que $((p \rightarrow ((q \vee \neg\neg q) \wedge q)) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \equiv q$ utilizando as equações em anexo. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

10. {1, 0 pt} Prove utilizando as equações em anexo que:

$$(\forall x \neg \exists y ((\exists z Q(x, y, z)) \rightarrow P(x, y))) \equiv (\forall x \forall y (\neg(\forall z \neg Q(x, y, z)) \wedge \neg P(x, y)))$$

Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

11. {2, 0 pt} Prove utilizando as equações em anexo que:

$$(((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow q)) \equiv \top$$

Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

12. {1, 3 pt} Prove que

$$(((s \wedge s) \vee \neg q) \wedge (((\neg q \rightarrow \neg q) \wedge \neg q) \vee s)) \equiv (q \rightarrow s)$$

utilizando as equações em anexo. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

13. {1, 0 pt} Prove utilizando as equações em anexo que:

$$(\forall x \exists y (\neg P(x, y) \wedge \neg Q(x, y))) \equiv (\neg \exists x \forall y (P(x, y) \vee Q(x, y)))$$

Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

14. {2, 0 pt} Prove utilizando as equações em anexo que:

$$(\neg(\neg p \wedge q) \wedge \neg(\neg q \wedge p)) \equiv (p \leftrightarrow q)$$

Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

15. {1, 0 pt} Prove que

$$(((p \wedge \neg q) \wedge (r \vee \neg(\neg p \vee q))) \rightarrow (p \wedge \neg q)) \equiv \top$$

utilizando as equações em anexo. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

16. {1, 0 pt} Sejam as premissas

$$\begin{aligned} & \exists z(\neg R(z) \vee \neg S(z)), \\ & (\neg \exists x \neg(P(x))) \vee (\forall z(R(z) \wedge S(z))) \text{ e} \\ & (\forall x(P(x))) \rightarrow (\exists y(Q(y))). \end{aligned}$$

Conclua, usando as equações em anexo, que $\exists y(Q(y))$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

17. {1, 0 pt} Prove que

$$\begin{aligned} & \forall x \forall z(\neg P(x, z) \wedge (\exists k \forall y(Q(x, z, k, y) \wedge \neg R(x, z, k, y)))) \\ & \equiv \neg \exists x \exists z(P(x, z) \vee (\forall k \exists y(\neg Q(x, z, k, y) \vee R(x, z, k, y)))) \end{aligned}$$

utilizando as equações em anexo. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

18. {1, 0 pt} Prove que

$$p \wedge ((\neg \neg \neg \neg p \vee p) \vee (r \rightarrow s)) \equiv p$$

utilizando as equações em anexo. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

19. {1, 0 pt} Sejam as premissas

$$\begin{aligned} & (\forall x(Q(x) \rightarrow R(x))) \rightarrow (\exists y \forall k(S(y, k) \wedge P(y, k))) \text{ e} \\ & \forall y \exists k(\neg S(y, k) \vee \neg P(y, k)). \end{aligned}$$

Conclua, usando as equações em anexo, que $\exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))$.

Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

20. {1, 0 pt} Prove que

$$\begin{aligned} & (\forall x \exists k (Q(x, k) \vee R(x, k))) \vee (\exists z \forall w (\neg R(z, w) \wedge S(z, w))) \\ \equiv & \neg ((\exists x \forall k \neg (Q(x, k) \vee R(x, k))) \wedge (\forall z \exists w (R(z, w) \vee \neg S(z, w)))) \end{aligned}$$

Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

21. {0, 5 pt} Prove que as fórmulas das respostas das letras **a)** e **d)** do Quesito 16 da Seção 1.1 são logicamente equivalentes utilizando as equações em anexo. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

22. {0, 7 pt} Prove que

$$\neg(p \wedge (p \vee \neg p)) \vee (\neg(\neg q \vee \neg r)) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$$

utilizando as equações em anexo. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

23. {0, 5 pt} Prove que as fórmulas das respostas das letras **a)** e **d)** do Quesito 17 da Seção 1.1 são logicamente equivalentes utilizando as equações em anexo. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

24. {0, 7 pt} Prove que

$$\forall x (P(x) \rightarrow \neg \exists y (\neg Q(x, y) \rightarrow \neg R(x, y))) \equiv \forall x (\forall y (R(x, y) \wedge \neg Q(x, y)) \vee \neg P(x))$$

utilizando as equações em anexo. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

25. {1, 0 pt} Prove que $(p \leftrightarrow q) \equiv ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$ utilizando as equações em anexo, **exceto a equação 33, que não pode ser usada**. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

26. Seja o domínio as cidades do Brasil. Sejam

$P(x) = \text{vai ter passeata em } x$

$B(x) = \text{a passagem de ônibus vai ficar mais barata em } x$

a) {0, 25} Traduza para lógica de predicados usando $P(x)$ e $B(x)$ dados no enunciado: Se existe uma cidade que não vai ter passeata, então não é verdade que, para toda cidade, a passagem de ônibus vai ficar mais barata.

b) {0, 25} Traduza para lógica de predicados usando $P(x)$ e $B(x)$ dados no enunciado: (toda cidade vai ter passeata) ou (não é verdade que em toda cidade a passagem de ônibus vai ficar mais barata) (ou ambos).

Obs. Os parênteses da frase servem para tirar a ambiguidade.

c) {0, 5 pt} Prove que os predicados encontrados nas letras **a)** e **b)** acima são logicamente equivalentes utilizando as equações em anexo. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

27. {1, 0 pt} Prove que $((p \wedge \neg r) \rightarrow (q \rightarrow r)) \equiv ((p \wedge q) \rightarrow r)$ utilizando as equações em anexo. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

28. Seja o domínio o conjunto dos **jogos** da Copa das Confederações.

Sejam

$B(x) = \text{o Brasil ganha o jogo } x$

$N(x) = \text{Neymar faz gol neste jogo } x.$

a) {0, 25 pt} Traduza para lógica de predicados usando $B(x)$ e $N(x)$ dados no enunciado: Não é verdade que, para todos os jogos, se o Brasil ganhar o jogo, então Neymar faz gol neste jogo.

b) {0, 25 pt} Traduza para lógica de predicados usando $B(x)$ e $N(x)$ dados no enunciado: Existe um jogo que o Brasil ganha e Neymar não faz gol neste jogo.

c) {0, 5 pt} Prove que os predicados encontrados nas letras **a)** e **b)** acima são logicamente equivalentes utilizando as equações em anexo. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

29. {1, 3 pt} Prove que $((p \wedge q) \wedge p) \rightarrow (\neg p \vee \neg q) \equiv (\neg(p \wedge q))$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

$$(\forall x(P(x))) \rightarrow (\exists y(P(y)) \wedge \forall x(P(x))) \equiv \neg(\forall x(P(x))) \vee (\exists y(P(y)))$$

utilizando as equações em anexo. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

30. {1, 3 pt} Prove que $((p \wedge (\neg\neg\neg p)) \vee p) \rightarrow (\neg(p \vee (\neg\neg p)) \rightarrow \neg p) \equiv \top$

Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

31. {1, 0 pt} Prove que

$$(\exists x(P(x)) \wedge \neg(\forall x(\neg P(x)))) \rightarrow \exists x(P(x)) \equiv \top$$

utilizando as equações em anexo. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

32. {1, 3 pt} Prove que $((q \rightarrow \neg p) \rightarrow q) \equiv q$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

33. {0, 7 pt} Veja abaixo a prova de que $(\neg(\neg p \vee q)) \equiv (p \wedge \neg q)$.

$$\begin{aligned} & \neg(\neg p \vee q) \\ & \equiv \neg\neg p \wedge \neg q \quad [17] \\ & \equiv p \wedge \neg q \quad [9] \end{aligned}$$

Use sua criatividade e invente proposições para p e q e depois escreva a prova deste teorema em português.

34. {3, 3 pt} Prove que $(p \leftrightarrow \neg p) \equiv \text{F}$

Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

35. {1, 3 pt} Prove que $(p \leftrightarrow \neg p) \equiv \text{F}$

Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

36. {0, 7 pt} Veja abaixo a prova de que $(p \rightarrow \neg q) \equiv \neg(p \wedge q)$.

$$\begin{aligned} & p \rightarrow \neg q \\ & \equiv \neg p \vee \neg q \quad [22] \\ & \equiv \neg(p \wedge q) \quad [16] \end{aligned}$$

Use sua criatividade e invente proposições para p e q e depois escreva a prova deste teorema em português.

1.3 Lógica Proposicional - Prova de Premissa-Conclusão

1. $\{1, 0\}$ pt Sejam

$p = \text{eu tomo a vacina H1N1}$

$q = \text{eu passo mal}$

$r = \text{eu morro}$

$s = \text{eu assisto à aula}$

Se eu tomo a vacina H1N1, então eu passo mal e não morro. Se eu não tomo a vacina H1N1, então eu morro ou não passo mal (ou ambos). Se eu passo mal, então eu não assisto à aula. Eu assisti à aula.

Dadas as premissas acima, prove que eu não tomei a vacina H1N1.

2. $\{1\}$ pt Dadas as 3 premissas $p \rightarrow q$, p e $\neg q$. Conclua que $(1 > 2)$. Justifique cada passo de prova com uma das equações ou regra de inferência em anexo.
3. $\{1, 0\}$ pt Dada a premissa $\neg(p \rightarrow p)$, prove que $(q \vee r)$. Justifique cada passo de prova com uma equação ou regra de inferência em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
4. $\{1, 0\}$ pt Dadas as premissas $((t \wedge u) \rightarrow (\neg s))$, $(\neg(t \wedge u) \rightarrow (q \wedge p))$, $(\neg q \vee \neg p)$ e s . Prove que F (falso). Justifique cada passo de prova com uma equação ou regra de inferência em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
5. $\{1, 0\}$ pt Dadas as premissas $(p \rightarrow \neg q)$, q , $(\neg(p \vee t) \rightarrow s)$ e $(\neg t)$, prove s usando as equações em anexo.
6. $\{2, 0\}$ pt Dadas as premissas $((t \rightarrow s) \rightarrow (q \wedge r))$ e $\neg t$, prove r usando as equações em anexo.
7. $\{1, 0\}$ pt Dadas as premissas $\neg(p \rightarrow q) \vee (r \wedge s)$ e $\neg((r \wedge s) \wedge \neg t)$, prove que $((p \rightarrow q) \rightarrow t)$ usando as equações em anexo.
8. $\{2, 0\}$ pt Dadas as premissas $((k \vee s) \rightarrow (p \vee q))$, $\neg q$ e k , prove que $(p \vee t)$ usando as equações em anexo.
9. $\{1, 0\}$ pt Sejam as premissas $\neg p \vee r$, $\neg\neg\neg t$ e $\neg t \rightarrow \neg\neg p$. Prove que $s \vee r$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
10. $\{1, 0\}$ pt Sejam as premissas $(p \vee (s \wedge \neg s)) \rightarrow q$ e $\neg(t \wedge u) \rightarrow \neg q$. Prove que $(p \rightarrow (t \wedge u)) \vee k$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

11. {1,0 pt} Sejam as premissas $(p \leftrightarrow q)$ e $(q \leftrightarrow r)$. Conclua que $(p \leftrightarrow r)$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
12. {1,0 pt} Sejam as premissas $((r \vee s) \rightarrow (q \leftrightarrow t))$, $(\neg\neg\neg\neg r)$, $t \rightarrow p$ e q . Conclua p . Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
13. {0,8 pt} Dadas as premissas $((\neg t \vee r) \rightarrow (t \vee (p \rightarrow q)))$ e $(s \wedge \neg t)$, prove que $(s \wedge (p \rightarrow q))$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
14. {0,8 pt} Dadas as premissas $((\neg t \vee r) \rightarrow (t \vee (p \rightarrow q)))$ e $(s \wedge \neg t)$, prove que $(s \wedge (p \rightarrow q))$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

2 Estruturas Básicas: Conjuntos, Funções, Sequências e Somatórios

2.1 Conjuntos

1. Seja $A \triangle B$ a *diferença simétrica* dada por

$$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B).$$

Prove as equações abaixo. Cada passo da prova deve ser justificada com a “Definição de \triangle ” ou pelas equações em anexo.

- a) {0,4 pt} $A \triangle A = \emptyset$
 - b) {0,4 pt} $A \triangle B = B \triangle A$
 - c) {0,4 pt} $A \triangle U = \bar{A}$, onde U é o conjunto universo.
2. {2,5 pt} Prove que

$$(((A \cap B) \cup (A \cap C)) \cap U) \cup \overline{(C \cup E)} = (\bar{C} \cap E) \cup (A \cap (B \cup C)),$$

onde U é o conjunto universo.

3. {3,5 pt} Prove que $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *sem* utilizar a equação 76. Ou seja, cada passo de prova deve ser justificado por uma equação da página seguinte *exceto* a equação 76.

4. {1,0 pt} Prove que $(x \in U) \equiv \top$, onde U é o conjunto universo.

5. {1,0 pt} Prove que $((A - C) \cap (C - B)) = \emptyset$

6. Sejam as equações

$$P(x) = x \notin x \quad (85)$$

$$S = \{x \mid P(x)\} \quad (86)$$

Prove o Paradoxo de Russell utilizando as equações de 1 a 86. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12), (13), (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

a) {1,5 pt} Dada a premissa $S \in S$, concluimos F.

b) {1,5 pt} Dada a premissa $S \notin S$, concluimos F.

7. {4,0 pt} Prove que $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 das equações do verso. A única **exceção** a esta regra é o uso das equações (10), (11), (12), (13), (73), (74), (75) e (76) que podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

8. {1,0 pt} Prove que $(A \cup (B - A)) = (A \cup B)$. Justifique cada passo de prova com uma equação ou regra de inferência em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12), (13), (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

9. {2,25 pt} Prove que $((A - B) - A) = \emptyset$. Justifique cada passo de prova com uma equação ou regra de inferência em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

10. {2,25 pt} Dadas as premissas $(x \in \overline{B})$, $(\neg(x \in B) \rightarrow (x \in D))$, $((x \in D) \rightarrow ((x \in A) \wedge (x \in C)))$, conclua que $x \in (A \cup E)$. Justifique cada passo de prova com uma equação ou regra de inferência em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12), (13), (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

11. {1,0 pt} Prove que $((A \cup B) \cap \overline{A}) = (B - A)$. Justifique cada passo de prova com uma equação ou regra de inferência em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12), (13), (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

12. {2,25 pt} Prove que $\overline{A \cap \overline{A}} = \{x \mid \top\}$. Justifique cada passo de prova com uma equação ou regra de inferência em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

13. {2, 25 pt} Dada a premissa $x \notin A$, conclua que $x \notin (A \cap B)$. Justifique cada passo de prova com uma equação ou regra de inferência em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12), (13), (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
14. {4, 0 pt} Prove que $(A - (B \cup C)) = ((A - B) \cap (A - C))$. Justifique cada passo de prova com uma das equações ou regra de inferência no verso. Somente as equações (10), (11), (12), (13), (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

15. {2, 0 pt} Prove utilizando as equações em anexo que:

$$\bar{\emptyset} = \{x \mid \top\}$$

Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12), (13), (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

16. {4, 0 pt} Sejam as premissas $(x \in (A \cap B))$ e $((x \in (B \cup C)) \rightarrow (x \in D))$. Conclua que $x \in (D \cup A)$.

Justifique cada passo de prova com uma das equações ou regra de inferência no verso. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12), (13), (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

17. {2, 0 pt} Prove utilizando as equações em anexo que:

$$\overline{(\bar{A} \cap \bar{A})} \cup (\bar{B} \cap (C \cap \bar{C})) = A$$

Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12), (13), (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

18. {3, 0 pt} Prove que $(x \in (A \cap B) \cap C) \equiv (x \in B \cap (C \cap A))$. Justifique cada passo de prova com uma das equações ou regra de inferência no verso. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12), (13), (73) e (75) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova. **Não utilize as equações 74 e 76 em nenhum passo (seja simultaneamente ou não).**

19. {2, 0 pt} Sejam as premissas $(\neg(x \in \emptyset) \rightarrow x \in (A \cap B) \cap C)$ e $((x \in A \wedge x \in B) \rightarrow x \in (D \cap E))$. Conclua, usando as equações em anexo, que $x \in E$.

Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

20. {2, 0 pt} Prove que $A \cup \overline{(B \cap (C \cap \emptyset))} = U$, onde U é o conjunto universo. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12), (13), (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
21. {2, 0 pt} Prove que $\overline{\overline{\emptyset}} = \overline{\emptyset}$ **sem utilizar a equação 72**. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12), (13), (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
22. {2, 0 pt} Sejam as premissas $((x \notin A) \rightarrow \neg(x \in (B - C)))$ e $((x \in (A \cap \emptyset)) \vee (x \in (B - C)))$. Conclua, usando as equações em anexo, que $x \in A$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
23. {2, 0 pt} Prove que $\overline{U} = \emptyset$, onde U é o conjunto universo. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12), (13), (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
24. {2, 0 pt} Prove que $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12), (13), (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
25. {1, 0 pt} Dadas as premissas $x \in (A \cup (B \cap C))$ e $x \notin B$. Conclua que $x \in A$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
26. {1, 0 pt} Prove que $\overline{A \cup (\overline{B \cap C})} = (\overline{A} \cap B) \cup \overline{(A \cup C)}$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12), (13), (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
27. {1, 0 pt} Prove que $\{x \mid \top\} = U$, onde U é o conjunto universo. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

28. Um sinal de trânsito pode estar em um destes três estados no instante atual: $AGORA = \{verde, vermelho, amarelo\}$. Na próxima mudança de sinal, o sinal pode estar: $PROXIMA = \{verde, vermelho, amarelo\}$. As mudanças de sinal do instante atual para a próxima mudança são modeladas como o conjunto $MUDANCA = AGORA \times PROXIMA$. Por exemplo, o par $(vermelho, verde) \in MUDANCA$ significa que o sinal está, neste momento, vermelho e será verde na próxima mudança.
- a) $\{1, 0\}$ pt} Liste todos os pares do conjunto $MUDANCA$.
- b) $\{1, 5\}$ pt} O conjunto $MUDANCA$ permite algumas mudanças de sinal ilegais como, por exemplo, $(amarelo, verde)$. Suponha o conjunto $NOVA_MUDANCA = \{(a, b) \in MUDANCA \mid P(a, b)\}$. Defina o predicado $P(a, b)$ de forma que $NOVA_MUDANCA$ só contenha mudanças permitidas em um sinal de trânsito.
29. $\{3, 3\}$ pt} Dadas as premissas $x \in A$ e $x \notin (A \cap B)$, conclua que $x \in (A - B)$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
30. $\{1, 0\}$ pt} Dada a premissa $x \notin (A \cup B)$, conclua que $x \in \overline{B}$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
31. O estado de um motor de carro é modelado como o conjunto $MOTOR = \{ligado, desligado\}$. O estado da porta é o conjunto $PORTA = \{aberta, fechada\}$ e o estado da marcha, $MARCHA = \{1, 2, 3, 4, 5, ré, neutra\}$. O estado do carro é o conjunto $CARRO = MOTOR \times PORTA \times MARCHA$.
- a) $\{0, 5\}$ pt} Liste 3 elementos que pertençam ao conjunto $CARRO$ e que capturem os seguintes estados de um carro: 1) carro desligado, porta aberta e na marcha ré; 2) carro desligado, porta fechada e na primeira marcha; e 3) carro ligado, porta aberta e na marcha neutra.
- b) $\{1, 0\}$ pt} Um carro seguro nunca permite que a porta esteja aberta com o motor ligado. Este carro pode ser definido como sendo $CARRO_SEGURO = \{(x, y, z) \in CARRO \mid P(x, y, z)\}$, onde $P(x, y, z) = (x = ligado \rightarrow y = fechada)$. Liste todos os elementos de $CARRO_SEGURO$.
- c) $\{1, 5\}$ pt} Defina o conjunto $CARRO_LENTO$ contendo estados de um carro que só possui 3 marchas além da ré e da neutra.
32. $\{3, 3\}$ pt} Dadas as premissas $x \in (A \cap B)$ e $x \notin (A \cap C)$, conclua que $x \notin C$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

33. {2, 0 pt} Sejam as premissas $x \notin (A \cap (B \cup C))$ e $x \in A$. Prove que $x \notin B$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
34. Seja $A = \{Dilma, Obama, Angela\}$.
- a) {0, 66} Quais são os elementos de $\mathcal{P}(A)$, o conjunto das partes de A ?
- b) {0, 66} Calcule $|P(A) \times A|$, ou seja o tamanho do conjunto $P(A) \times A$.
- c) {0, 68 pt} Quais são os elementos do conjunto $\{x \mid (x \in P(A)) \wedge (Dilma \in x)\}$?
35. {3, 3 pt} Dadas as premissas $x \notin C$, $x \in (B \cup C)$ e $((x \in B) \rightarrow (x \in A))$, conclua que $x \in A$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
36. {2, 0 pt} Sejam as premissas $x \in (A \cup (B \cap C))$ e $x \in (\overline{B} \cap \overline{D})$. Prove que $x \in A$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
37. Seja $A = \{Roberto, Erasmo, Carlos\}$.
- a) {0, 66 pt} Quais são os elementos de $P(A)$, o conjunto das partes de A ?
- b) {0, 66 pt} Quais são os elementos do conjunto $B = \{x \mid (x \in P(A)) \wedge (|x| = 2)\}$?
Obs. Lembre que $|x|$ é o tamanho do conjunto x .
- c) {0, 68 pt} Quais são os elementos do conjunto $A \times \{x \mid (x \in P(A)) \wedge (|x| = 2)\}$?
38. {3, 3 pt} Dadas as premissas $x \in (A - B)$ e $x \in (B \cup C)$, conclua que $x \in (A \cap C)$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
39. Um programa de computador pode ser *representado matematicamente* por conjunto de pares (e, s) , onde e é o valor de entrada e s , o de saída. Por exemplo, o programa que calcula o fatorial de um número pode ser representado pelo conjunto de pares $F = \{(0, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 6), (4, 24), \dots\}$ porque, se a entrada for 0, a saída será o fatorial de 0, que é 1; se a entrada for 1, a saída será o fatorial de 1, que é 1; se a entrada for 2, a saída será o fatorial de 2, que é 2, etc.
- a) {0, 50 pt} Liste quaisquer 5 pares do conjunto que representa matematicamente um programa que calcula o triplo de um número.

- b) $\{0, 50 \text{ pt}\}$ Sejam F o conjunto que representa matematicamente o programa fatorial (como exemplificado no enunciado) e

$$G = \{(x, z) \mid ((x, y) \in F) \wedge (z = 2 \cdot y)\}.$$

Liste quaisquer 5 pares do conjunto G .

- c) $\{0, 50 \text{ pt}\}$ O que o programa de computador representado por G computa?
d) $\{0, 50 \text{ pt}\}$ Seja

$$H = \{(x, y) \mid (x \in \mathbb{N}) \wedge ((x = 0) \rightarrow (y = 0)) \wedge ((x > 0) \rightarrow (y = x + 1))\}.$$

Liste quaisquer 5 pares do conjunto H .

40. $\{2, 0 \text{ pt}\}$ Sejam as premissas $(x \in A) \rightarrow (x \in B)$, $(x \in C) \rightarrow (x \in A)$, $(x \in B) \rightarrow (x \in C)$. Conclua \top . Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
41. $\{2, 0 \text{ pt}\}$ Prove que

$$\overline{\overline{(A \cap B) \cap (B \cap A)}} = (A \cap B).$$

Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

42. $\{3, 3 \text{ pt}\}$ Dadas as premissas $(x \notin \overline{(A \cup B)})$ e $(x \notin B)$, conclua que $(x \in A)$.
43. $\{2, 0 \text{ pt}\}$ Sejam as premissas $x \in \overline{A}$ e $x \in (A \cup (B \cap C))$. Conclua que $x \in B$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12), (13), (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
44. Seja $DATA = \{x \mid x \text{ é uma data qualquer}\}$. **Por exemplo**, $20/12/2013 \in DATA$, $10/03/2054 \in DATA$, $01/01/0001 \in DATA$, $21/04/1500 \in DATA$, **etc** (ou seja, todas as possíveis datas pertencem à $DATA$).
Seja $FERIADO = \{x \mid (x \in DATA) \wedge (x \text{ é um feriado nacional de 2013})\}$.
Seja $FERIAS = (23/12/2013, 05/01/2014)$.

Em cada letra abaixo, diga se a proposição é verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta em, no máximo, 3 linhas.

- a) $\{0, 50 \text{ pt}\}$ $FERIADO \subset DATA$
b) $\{0, 50 \text{ pt}\}$ $FERIAS \in (DATA \times DATA)$
c) $\{0, 50 \text{ pt}\}$ $(DATA \cap (FERIADO \cap \{20/12/2013\})) = FERIADO$.

d) {0, 50 pt} $\{FERIADO\} \subseteq \mathcal{P}(DATA)$, onde $\mathcal{P}(DATA)$ é o conjunto das partes de $DATA$.

45. {2, 0 pt} Prove que $\overline{\emptyset \cap \overline{\emptyset \cup U}} = U$, onde U é o conjunto universo.

46. {0, 8 pt} Sejam A e B conjuntos. Prove que

$$(A = B) \equiv (\forall x((x \notin A \rightarrow x \notin B) \wedge (x \notin B \rightarrow x \notin A)))$$

Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

47. {0, 4 pt} Seja $A = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$. Calcule $\mathcal{P}(A)$, o conjunto das partes de A .

48. Seja $CANDIDATOS = \{Aécio, Dilma, Eduardo\}$.

a) {0, 4 pt} Liste os elementos de $CANDIDATOS \times CANDIDATOS$.

b) {0, 4 pt} Quantos elementos tem o conjunto $\mathcal{P}(CANDIDATOS \times CANDIDATOS)$? Não precisa listar os elementos (pode listar em um rascunho se quiser, mas não é preciso). Lembre-se: $\mathcal{P}(A)$ é o conjunto das partes de A .

c) {0, 4 pt} Liste os elementos do conjunto

$$\{\{x, y\} \mid (x \in CANDIDATOS) \wedge (y \in CANDIDATOS) \wedge (x \neq y)\}.$$

d) {0, 4 pt} Liste os elementos de

$$\{(x, y) \mid (x \in CANDIDATOS) \wedge (y \in CANDIDATOS) \wedge (x \neq y)\}.$$

e) {0, 4 pt} Dados os conjuntos

$$A = CANDIDATOS \times CANDIDATOS$$

$$B = \{\{x, y\} \mid (x \in CANDIDATOS) \wedge (y \in CANDIDATOS) \wedge (x \neq y)\}$$

$$C = \{(x, y) \mid (x \in CANDIDATOS) \wedge (y \in CANDIDATOS) \wedge (x \neq y)\}$$

Qual deles melhor captura o conjunto das possíveis disputas no segundo turno das eleições presidenciais de 2014? Justifique sua resposta em, no máximo, 4 linhas.

49. {0, 8 pt} Prove que

$$(A \subset B) \equiv (\neg(\forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \rightarrow \forall x(x \notin B \vee x \in A))).$$

Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

50. {0, 4 pt} Seja $A = \{a, b, c, d\}$. Calcule $\mathcal{P}(A)$, o conjunto das partes de A .

51. {2, 0 pt} Dadas as premissas $a \geq 10$ e $a \leq 100$, conclua que

$$a \in \{x \mid ((x \geq 10) \vee (x = 0)) \wedge ((x \leq 100) \vee (x = 0))\}.$$

Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

52. {2, 0 pt} Seja *CONVOCADOS* o conjunto com os 23 jogadores brasileiros convocados para a Copa do Mundo. Qual equação abaixo melhor define os 11 jogadores titulares que jogarão na estreia da Copa? Justifique sua resposta escolhida e também porque as alternativas não escolhidas são inadequadas.

- $TITULARES_1 = CONVOCADOS \times CONVOCADOS$
- $TITULARES_2 \subseteq \mathcal{P}(CONVOCADOS)$
- $TITULARES_3 = \{x \mid x \in CONVOCADOS\}$
- $TITULARES_4 \in \mathcal{P}(CONVOCADOS)$
- $TITULARES_5 = \mathcal{P}(CONVOCADOS)$

Lembre-se: $\mathcal{P}(X)$ é o conjunto das partes de X .

53. {3, 3 pt} Dadas as premissas $x \in (A \cap B)$ e $x \notin (A \cap C)$, prove que $x \in (A - C)$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

2.2 Funções

1. Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{se } x \leq -1 \\ x^2, & \text{se } -1 < x \leq 1 \\ x, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Analise cada proposição abaixo. Se for verdadeira, justifique. Se for falsa, mostre um contra-exemplo.

- a) {0, 2 pt} A função é injetora no domínio dos reais no intervalo $[-1, 1]$ e contra-domínio \mathbb{R} .
 - b) {0, 2 pt} A função é injetora no domínio \mathbb{R} e contra-domínio \mathbb{R} .
 - c) {0, 2 pt} A função é sobrejetiva no domínio dos reais no intervalo $[1, +\infty)$ e contra-domínio \mathbb{R} .
 - d) {0, 2 pt} A função não possui inversa no domínio \mathbb{R} e contra-domínio \mathbb{R} .
2. {1, 0 pt} Seja A o conjunto dos assentos em um teatro. Seja C o conjunto dos clientes que *compraram* um ingresso. Gostaríamos de fazer um sistema que só vendesse ingressos com lugar marcado. Antes de fazermos um programa, devemos modelar o problema matematicamente. Descreva os problemas (se houver) de modelarmos a *marcação de lugares para uma peça* como:

- a) Uma relação (sem ser função) entre C e A .
- b) Uma função de C para A .
- c) Uma função injetora de C para A .
- d) Uma função sobrejetora de C para A .
- e) Uma função bijetora de C para A .

Qual dos modelos acima é o mais adequado?

3. $\{1, 0 \text{ pt}\}$ Sejam $g : A \rightarrow B$ e $f : B \rightarrow C$. Faça um desenho similar ao da Figura 1 retratando f e g de tal maneira que f **não** seja injetiva, mas tanto $f \circ g$ sejam injetivas.

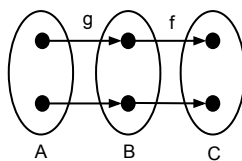


Figura 1: Exemplo de resposta.

4. Seja h uma função com domínio em R . Defina o conjunto imagem para:
- a) $\{1, 0 \text{ pt}\}$ $h(x) = \lfloor [x] \rfloor$.
 - b) $\{1, 0 \text{ pt}\}$ $h(x) = \lfloor x \rfloor + \lceil -x \rceil$.
5. Sejam h e h' duas funções com domínio em R .
- (a) $\{1, 0 \text{ pt}\}$ Se $h(x) = \lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor$, qual o conjunto imagem de h ?
 - (b) $\{1, 0 \text{ pt}\}$ Se $h'(x) = \lfloor x \rfloor + \lceil -x \rceil$, qual o conjunto imagem de h' ?
6. A função que calcula o *valor absoluto* ou o *módulo* de x , $f(x) = |x|$, é definida para um domínio dos reais e contra-domínio dos reais. Defina um novo domínio e um novo contra-domínio de forma que:
- a) $\{0, 5 \text{ pt}\}$ f seja injetiva mas não seja sobrejetiva;
 - b) $\{0, 5 \text{ pt}\}$ f seja sobrejetiva mas não seja injetiva;
 - c) $\{0, 5 \text{ pt}\}$ f possua inversa.
7. Desenhe o gráfico de:
- a) $\{0, 5 \text{ pt}\}$ $\lfloor x \rfloor$
 - b) $\{0, 5 \text{ pt}\}$ $\lceil [x] \rceil$
 - b) $\{0, 5 \text{ pt}\}$ $\lfloor 2x \rfloor$
8. Sobre funções.
- a) $\{1, 0 \text{ pt}\}$ Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c, d, e\}$. Defina uma função f_1 que seja **injetiva** mas **não seja sobrejetiva** de A para B .

b) {1, 0 pt} Sejam $C = \{1, 2, 3, 4\}$ e $D = \{a, b, c, d\}$. Defina uma função f_2 que **não seja sobrejetiva** e **não seja injetiva** de C para D .

c) {1, 0 pt} Sejam $E = \{1, 2, 3\}$ e $F = \{a, b, c\}$. Defina uma função f_3 que **tenha inversa** de E para F .

Obs. “Defina uma função” significa “liste os pares”. Por exemplo, $\{(1, a), (2, d), (3, a)\}$ é uma definição de função de A para B .

9. Desenhe o gráfico das funções abaixo e diga se elas são “injetivas”, “sobrejetivas”, “bijetivas” ou “nenhuma delas”. Não precisa provar um teorema sobre isto. Basta apenas dizer o que a função é baseado no gráfico. A palavra “gráfico” aqui tem o mesmo significado de gráfico em Cálculo: uma curva ou reta no plano xy . Faça seu gráfico com o eixo x no intervalo de -2 a $+4$.

a) {0, 5 pt} $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor + \lceil x/2 \rceil$, onde f tem domínio real e contra-domínio **real**.

b) {0, 5 pt} $g(x) = \lceil x \rceil + 1$, onde g tem domínio real e contra-domínio **inteiro**.

10. Desenhe o gráfico das funções abaixo e diga se elas são “injetivas”, “sobrejetivas”, “bijetivas” ou “nenhuma delas”. Não precisa provar um teorema sobre isto. Basta apenas dizer o que a função é baseado no gráfico. A palavra “gráfico” aqui tem o mesmo significado de gráfico em Cálculo: uma curva ou reta no plano xy . Faça seu gráfico com o eixo x no intervalo de -2 a $+4$.

a) {0, 5 pt} $f(x) = 2 \cdot \lceil x/2 \rceil$, onde f tem domínio real e contra-domínio **inteiro**.

b) {0, 5 pt} $f(x) = \lfloor x \rfloor - \lceil x \rceil$, onde f tem domínio real e contra-domínio **$\{0, -1\}$** .

11. Responda, para cada letra abaixo, se temos uma “relação”, “função”, “função injetiva”, “função sobrejetiva”, ou “função bijetiva”.

a) {0, 25 pt} Sejam A o conjunto dos carros de **Recife** e B o conjunto das placas dos carros do **Brasil**. Sejam $a \in A$ e $b \in B$. $f_1(a) = b$ se, e somente se, o carro a tem a placa b .

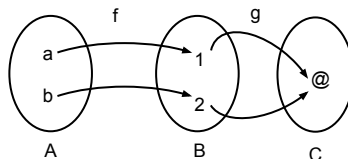
b) {0, 25 pt} Sejam A o conjunto dos atores que já atuaram em pelo menos um filme e B o conjunto das filmes. Sejam $a \in A$ e $b \in B$. $f_2(a) = b$ se, e somente se, o ator a atuou no filme b .

c) {0, 25 pt} Sejam A o conjunto dos alunos de EC e B o conjunto das idades dos alunos de EC. Sejam $a \in A$ e $b \in B$. $f_3(a) = b$ se, e somente se, o aluno a tem a idade b .

d) {0, 25 pt} Sejam A o conjunto dos inteiros e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Sejam $a \in A$ e $b \in B$. $f_4(a) = b$ se, e somente se, $\lceil (a \bmod 5) \rceil = b$.

12. Responda, para cada letra abaixo, se temos uma “relação”, “função”, “função injetiva”, “função sobrejetiva”, ou “função bijetiva”.

- a) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ Sejam A o conjunto dos atletas e B o conjunto das medalhas de ouro olímpicas. Sejam $a \in A$ e $b \in B$. $f_1(a) = b$ se, e somente se, o atleta a ganhou a medalha b .
- b) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ Sejam A o conjunto das contas correntes e B o conjunto dos reais. Sejam $a \in A$ e $b \in B$. $f_2(a) = b$ se, e somente se, o saldo de a é b .
- c) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ Sejam A o conjunto dos celulares de 1 chip e B o conjunto das operadoras de celulares. Sejam $a \in A$ e $b \in B$. $f_3(a) = b$ se, e somente se, o celular a utiliza a operadora b .
- d) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ Sejam A o conjunto dos reais e B o conjunto dos inteiros. Sejam $a \in A$ e $b \in B$. $f_4(a) = b$ se, e somente se, $\lfloor a \rfloor = b$.
13. $\{0, 25 \text{ pt}\}$ Seja $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 5\}$. Seja f uma função cujo domínio é A e o contra-domínio é \mathbb{R} . O mapeamento de f é definido por $f(x) = (\lfloor x \rfloor + \lceil x \rceil)/2$. Qual o conjunto imagem de f ?
14. $\{0, 25 \text{ pt}\}$ Seja $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0 \wedge x \equiv 0 \pmod{2}\}$. Seja g uma função com domínio A e contradomínio \mathbb{Z} cujo mapeamento é $g(x) = \lfloor [(x+0), 5] \rfloor$. Qual o conjunto imagem de g ?
15. Sejam $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ funções definidas na figura abaixo.



- a) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ Qual o resultado de $((g \circ \iota_B^{-1}) \circ f)(b)$, onde ι_B^{-1} é a inversa da função identidade de B ? Apenas responda. Não precisa justificar.
- b) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ $(g \circ f)$ é injetiva? Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas usando a analogia dos casais.
- c) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ $(g \circ f)$ é sobrejetiva? Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas usando a analogia dos casais.
- d) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ f possui inversa? Apenas responda. Não precisa justificar.
- e) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ g possui inversa? Apenas responda. Não precisa justificar.
- f) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ $(g \circ f)$ possui inversa? Apenas responda. Não precisa justificar.
16. $\{2, 0 \text{ pt}\}$ Prove que $((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ (g \circ h))(x)$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo, além da equação [100] abaixo dada de graça.

$$(R \circ S)(y) = R(S(y)) \quad [100]$$

A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova. **Dica:** p nas equações em anexo pode ser “qualquer coisa”. Da mesma forma, R , S e y na equação [100] acima também podem ser “qualquer coisa”.

17. Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ e $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, onde $f(x) = \lceil x \rceil$ e $g(x) = \lfloor x \rfloor$.

- a) {0, 25 pt} $f(x)$ é injetiva? Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas usando a analogia dos casais.
- b) {0, 25 pt} $g(x)$ é injetiva? Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas usando a analogia dos casais.
- c) {0, 25 pt} $g(x) = \iota_{\mathbb{Z}}(x)$, onde $\iota_{\mathbb{Z}}$ é a função identidade de \mathbb{Z} ? Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas.
- d) {0, 25 pt} Desenhe o gráfico de $g(x)$ no plano cartesiano com os eixos x e y variando de -2 a $+2$.
18. {2, 0 pt} Prove que se $\lfloor x \rfloor \neq x$, então $\lfloor x \rfloor \neq \lceil x \rceil$. Ou seja, dadas as premissas $\neg(\lfloor x \rfloor = x)$, $\lfloor x \rfloor \leq x$, $x \leq \lceil x \rceil$, $((\lfloor x \rfloor < x) \wedge (x \leq \lceil x \rceil)) \rightarrow (\lfloor x \rfloor \neq \lceil x \rceil)$ e $(\lfloor x \rfloor \leq x) \rightarrow ((\lfloor x \rfloor < x) \vee (\lfloor x \rfloor = x))$, conclua que $\lfloor x \rfloor \neq \lceil x \rceil$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
19. Sejam $A = \{Dilma, Obama, Angela\}$, $B = \{Brasil, EUA, Alemanha\}$ e $C = \{Presidente, Chanceler\}$.
- a) {0, 66 pt} Seja $f : A \rightarrow B$, onde $f = \{(Dilma, Brasil), (Obama, EUA), (Angela, Alemanha)\}$. Seja $g : B \rightarrow C$, onde $g = \{(Brasil, Presidente), (EUA, Presidente), (Alemanha, Chanceler)\}$. Quais são os pares da função $(g \circ f)$?
- b) {0, 66 pt} Calcule $(\iota_A \circ f^{-1})(EUA)$. Exiba seus cálculos.
- c) {0, 68} A função $(g \circ f)$ possui inversa? Justifique sua resposta em, no máximo, 4 linhas.
20. Desenhe os gráficos das funções abaixo nos eixos x e y no intervalo entre $-2 \leq x \leq 2$.
- a) {0, 5 pt} $f(x) = \lceil x + \lfloor x \rfloor \rceil$
- b) {0, 5 pt} $g(x) = \lceil x \rceil + \lfloor x \rfloor$
21. Sejam $A = \{Roberto, Erasmo, Carlos\}$, $B = \{Cantor, Ator\}$ e $C = \{Famoso, Desconhecido\}$.
- a) {0, 66 pt} Seja $f : A \rightarrow B$, onde $f = \{(Roberto, Cantor), (Erasmo, Cantor), (Carlos, Ator)\}$. Seja $g : B \rightarrow C$, onde $g = \{(Cantor, Famoso), (Ator, Desconhecido)\}$. Quais são os pares da função $(g \circ f)$?
- b) {0, 66 pt} Calcule $(\iota_B \circ g^{-1})(Famoso)$. Exiba seus cálculos.
- c) {0, 68} A função $(f \circ \iota_A)$ possui inversa? Justifique sua resposta em, no máximo, 4 linhas.
22. Desenhe os gráficos das funções abaixo nos eixos x e y no intervalo entre $-2 \leq x \leq 2$.
- a) {0, 5 pt} $f(x) = \lfloor x + \lceil x \rceil \rfloor$
- b) {0, 5 pt} $g(x) = \lfloor x \rfloor + \lceil x \rceil$

23. Classifique como relação, função, função injetiva, função sobrejetiva ou função bijetiva e justifique sua resposta em, no máximo, 3 linhas.
- a) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ Seja A_1 o conjunto de CNPJs do Brasil. Seja B_1 o conjunto de empresas no Brasil. Assuma que não há CNPJs ou empresas em situação irregular. Sejam $a_1 \in A_1$ e $b_1 \in B_1$. $f_1(a_1) = b_1$ se, e somente se, a_1 é o CNPJ de b_1 .
- b) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ Seja A_2 o conjunto de CNPJs do Brasil. Seja B_2 o conjunto de empresas no Brasil. Assuma que é possível haver CNPJs e empresas em situações irregulares. Sejam $a_2 \in A_2$ e $b_2 \in B_2$. $f_2(a_2) = b_2$ se, e somente se, a_2 é o CNPJ de b_2 .
- c) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ Seja A_3 o conjunto de todas as mulheres. Seja B_3 o conjunto de todos os homens. Seja C_3 o conjunto $A_3 \times B_3$. Sejam $p_3 \in (A_3 \cup B_3)$ e $c_3 \in C_3$. $f_3(p_3) = c_3$ se, e somente se, p_3 é o(a) filho(a) biológico(a) de c_3 .
- d) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ Seja A_4 o conjunto de todos os títulos de livros da língua portuguesa. Seja B_4 o conjunto de todas as palavras da língua portuguesa. Seja C_4 o conjunto das partes de B_4 . Sejam $a_4 \in A_4$ e $c_4 \in C_4$. $f_4(a_4) = c_4$ se, e somente se, c_4 contém todas as palavras usadas no livro a_4 . Assuma que nenhum livro contém o mesmo conjunto de palavras de outro livro.
24. Classifique como relação, função, função injetiva, função sobrejetiva ou função bijetiva e justifique sua resposta em, no máximo, 3 linhas.
- a) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ Seja A_1 o conjunto contendo todas as lojas do Shopping Center Recife. Seja B_1 o conjunto contendo todas as lojas do Shopping Rio Mar. Assuma que $(A_1 - B_1) \neq \emptyset$. Sejam $a_1 \in A_1$ e $b_1 \in B_1$. $f_1(a_1) = b_1$ se, e somente se, a loja $a_1 = b_1$.
- b) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ Seja A_2 o conjunto contendo todos os cantores do Brasil. Seja B_2 o conjunto contendo todas as músicas existentes. Seja C_2 o conjunto das partes de B_2 . Sejam $a_2 \in A_2$ e $c_2 \in C_2$. $f_2(a_2) = c_2$ se, e somente se, a_2 já cantou antes as músicas contidas em c_2 .
- c) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ Sejam $A_3 = \mathbb{Z}$ e $B_3 = \mathbb{Z}$. Sejam $a_3 \in A_3$ e $b_3 \in B_3$. $f_3(a_3) = b_3$ se, e somente se, $b_3 = \lfloor a_3 \rfloor$.
- d) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ Sejam $A_4 = \mathbb{R}$ e $B_4 = \{x \mid (x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \leq x < 1)\}$. Sejam $a_4 \in A_4$ e $b_4 \in B_4$. $f_4(a_4) = b_4$ se, e somente se, $b_4 = a_4 - \lfloor a_4 \rfloor$.
25. $\{1, 0 \text{ pt}\}$ Seja $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ a função $f_1(x) = \lfloor x \rfloor$. Desenhe o gráfico de f_1 no eixo cartesiano (basta desenhar no intervalo do domínio $[-2, +2]$).
26. $\{1, 0 \text{ pt}\}$ Seja $f_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ a função $f_2(x) = \lfloor x \rfloor$. Desenhe o gráfico de f_2 no eixo cartesiano (basta desenhar no intervalo do domínio $[-2, +2]$).
27. Classifique as funções abaixo como função, função injetiva, função sobrejetiva ou função bijetiva. Justifique sua resposta em, no máximo, 3 linhas.
- a) $\{0, 8\}$ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $f(x) = x^2$
- b) $\{0, 8\}$ $f : \mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$, onde $f(x) = x^2$.
O conjunto $(\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$ é o conjunto dos números reais contendo o zero e os números reais positivos.

- c) $\{0, 8\}$ $f : (\mathbb{R}^+ \cup \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$, onde $f(x) = x^2$.
d) $\{0, 9\}$ $f : (\mathbb{R}^+ \cup \{0\}) \rightarrow (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$, onde $f(x) = x^2$.

28. Classifique as funções abaixo como função, função injetiva, função sobrejetiva ou função bijetiva. Justifique sua resposta em, no máximo, 3 linhas.

- a) $\{0, 5\}$ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $f(x) = x^2$
b) $\{0, 5\}$ $f : \mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$, onde $f(x) = x^2$.
O conjunto $(\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$ é o conjunto dos números reais contendo o zero e os números reais positivos.
c) $\{0, 5\}$ $f : (\mathbb{R}^+ \cup \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$, onde $f(x) = x^2$.
d) $\{0, 5\}$ $f : (\mathbb{R}^+ \cup \{0\}) \rightarrow (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$, onde $f(x) = x^2$.

3 Fundamentos: Algoritmos, Inteiros e Matrizes

3.1 Algoritmos

1. Qual o big-O de:

- a) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ $a(n) = (n + 3n^3 + 8n^2) + (63n(\log n) + 5)$
b) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ $b(n) = (n + 153)(\log n)(\sqrt{3} + 8)$
c) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ $c(n) = (132n^7 + 363n^{11} + 5) + (53 \cdot 2^n + 23n!)$
d) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ $d(n) = 35n + 9324n(\log n) + 634n^2$
e) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ $e(n) = (4n(\log n)) + (8\log n) + n$
f) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ $f(n) = (36\log n) + (2^{35}n + 54n) + (642 + 3n + 5n^2 + 11n^3)$

2. $\{0, 25 \text{ pt}\}$ Ponha as funções acima em ordem de complexidade. Escreva sua resposta da seguinte forma: “ $\{c, e\}$ melhor que $\{a, d, f\}$ melhor que $\{b\}$ ” (isto é um **exemplo**).

Esta resposta **exemplo** significa que $c(n)$ e $e(n)$ são equivalentes e ambos são melhores que $a(n)$, $d(n)$ e $f(n)$, que, por sua vez, são equivalentes entre si e melhores que $b(n)$.

3. Encontre funções $f'(n)$, $g'(n)$, $h'(n)$ e $k'(n)$ que são big- Θ de $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$ e $k(n)$, respectivamente.

- a) $\{0, 2 \text{ pt}\}$ $f(n) = 5n + (\log n)$
b) $\{0, 2 \text{ pt}\}$ $g(n) = 10n^3 + 5n^7 + 400$
c) $\{0, 2 \text{ pt}\}$ $h(n) = (5 + 80n^3)(n^2 + 3)$
d) $\{0, 2 \text{ pt}\}$ $k(n) = 10 \cdot 2^n + 5000$

4. Encontre funções $f'(n)$, $g'(n)$, $h'(n)$ e $k'(n)$ que são big- O de $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$ e $k(n)$, respectivamente.

- a) $\{0, 5 \text{ pt}\}$ $f(n) = (100 + 92n)(10 + \log n)$
b) $\{0, 5 \text{ pt}\}$ $g(n) = n^2 + 200n^8 + 510n^{13} + 5n^7 + 400n$
c) $\{0, 5 \text{ pt}\}$ $h(n) = n(\log n) + 5n! + 80n^3$

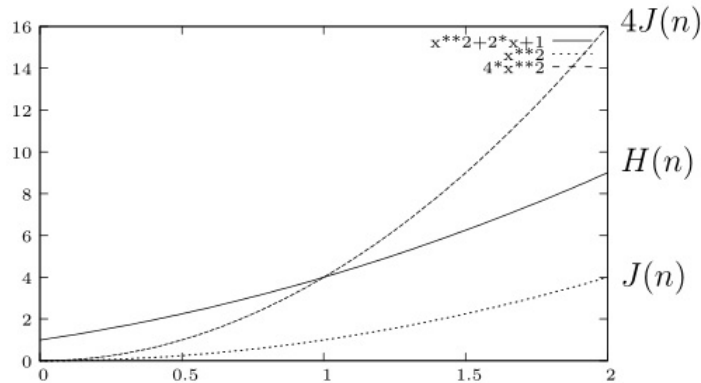
d) $\{0, 5 \text{ pt}\}$ $k(n) = n^{18} + 2^n + 5000$

5. Sejam $H(n) = n^2 + 2n + 1$ e $J(n) = n^2$ (veja a figura abaixo).

a) $\{0, 5 \text{ pt}\}$ Defina valores para k e C tal que $H(n)$ seja $O(J(n))$. Justifique sua resposta.

b) $\{0, 5 \text{ pt}\}$ Defina valores para k e C tal que $J(n)$ seja $O(H(n))$. Justifique sua resposta.

“Defina valores” significa dar valores numéricos. Por exemplo: “ $k = -5, 3$ e $C = 5283$ ”.



6. Calcule o big-O de

a) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ $(n^2 + 3n + 10)(5n^3 + 2n^{10})(n^3 \cdot n^{10})$

b) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ $(5 + 3)(\log n)(n + 34 + 4n)$

c) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ $2^n + (n(\log n)) + (n^3 + 3n^2 + 2)$

d) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ $(n + (3n + 4) + (5n))(n^2 + n)$

7. Sejam $f(n) = n^3n^2 + n(\log n)$ e $g(n) = (8 + 4)(2^n)$.

a) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ Defina uma função que seja big- Θ de $f(n)$.

b) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ Defina uma função $h(n)$ que seja big-O de $f(n)$, mas não seja big- Θ de $f(n)$.

c) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ Defina uma função que seja big- Θ de $g(n)$.

d) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ Defina uma função $k(n)$ que seja big-O de $g(n)$, mas não seja big- Θ de $g(n)$.

8. Sejam $f(n) = n^4n^3n^2n$ e $g(n) = n(1 + (\log n))$.

a) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ Defina uma função que seja big- Θ de $f(n)$.

b) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ Defina uma função $h(n)$ que seja big-O de $f(n)$, mas não seja big- Θ de $f(n)$.

c) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ Defina uma função que seja big- Θ de $g(n)$.

d) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ Defina uma função $k(n)$ que seja big-O de $g(n)$, mas não seja big- Θ de $g(n)$.

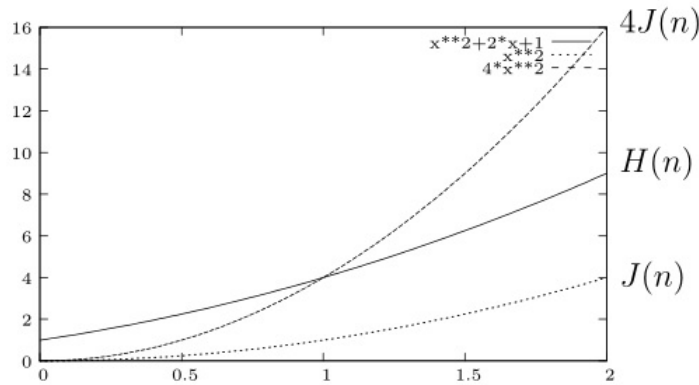


Figura 2: $J(n)$ x $H(n)$.

9. As funções $H(n)$ e $J(n)$ da Figura 3 representam as complexidades de 2 algoritmos. Assuma que as posições dos gráficos não mudam a partir de $n > 1$.
- $\{0, 5 \text{ pt}\}$ $J(n)$ é $O(H(n))$? Justifique sua resposta (responda em no máximo 4 linhas).
 - $\{0, 5 \text{ pt}\}$ $H(n)$ é $O(J(n))$? Justifique sua resposta (responda em no máximo 4 linhas).
10. $\{0, 50 \text{ pt}\}$ Assuma que $H(n)$ é $O(J(n))$. Ou seja, existem C e k , tal que $|H(n)| \leq C|J(n)|$ para todo $n > k$. Ou seja, $H(n)$ pode ser pior que $J(n)$ por um fator constante e ainda assim será considerado $O(J(n))$. Explique o porquê disto (em no máximo 4 linhas).

3.2 Inteiros

- $\{0, 25 \text{ pt}\}$ Seja x_n uma sequência de números pseudo-aleatórios definida como:
 $x_0 = 0$
 $x_{n+1} = (4x_n + 5) \bmod 6$.
 Quantos números diferentes são gerados (contando com x_0) antes de a sequência repetir valores?
- $\{0, 25 \text{ pt}\}$ Encontre o mdc de 26 e 16 utilizando a técnica de fatoração.
- $\{0, 25 \text{ pt}\}$ Encontre o mmc de 14 e 20 utilizando a técnica de fatoração.
- $\{0, 75 \text{ pt}\}$
 Teorema 1. $(ab)^m = a^m b^m$.
 Teorema 2 (Pequeno Teorema de Fermat). Se p é primo e a é inteiro não divisível por p , então $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.
 Prove que o resto da divisão de 16.777.216.000.000.000.000 por 13 é 1. Note que $4^{12} = 16.777.216$.
- $\{3, 5 \text{ pt}\}$ Sejam a e b inteiros positivos. Prove que $ab = \text{mdc}(a, b) \cdot \text{mmc}(a, b)$.
 Dica: defina a e b como fatoração de primos e use as definições de mdc e mmc baseado em fatoração de primos. Caso precise, utilize o Teorema 1: $\min(x, y) + \max(x, y) = x + y$.

6. O algoritmo abaixo se propõe a imprimir os fatores primos de um número inteiro $n > 0$.

```
input: inteiro  $n > 0$ 
primo := 2;
while (primo  $\leq n$ ) {
    if (n mod primo == 0) {
        print(primo);
        n := n div primo;
        primo := 2;
    }
    else {
        primo := prox_primo(n);
    }
}
print(n);
```

- a) {1, 0 pt} O algoritmo funciona?
- b) {2, 0 pt} Existe alguma correção ou melhoria possível? Qual?
7. Seja $f(n) = (n + 4) \bmod 26$ a função que encripta uma mensagem de texto considerando o alfabeto
A=0, B=1, C=2, D=3, E=4, F=5, G=6, H=7, I=8, J=9, K=10, L=11, M=12, N=13, O=14, P=15, Q=16, R=17, S=18, T=19, U=20, V=21, W=22, X=23, Y=24, Z=25.
- a) {0, 2 pt} Encripte a mensagem “ZEUS”. Exiba os cálculos que te levam à resposta.
- b) {0, 2 pt} Defina a função $f^{-1}(n)$ que desencripta mensagens de $f(n)$.
- c) {0, 2 pt} Desencripte a mensagem “GCBA”. Exiba os cálculos que te levam à resposta.
8. {0, 6 pt} Sejam $\text{mdc}(p, q) = 2^3 3^4 5^1 7^0$ e $q = 2^5 3^4 5^8 7^{10}$. Utilize a definição de mdc em termos de fatores primos para encontrar p .
- Obs. Existem infinitas respostas. Basta escrever 1 delas.

9. {1, 0 pt} Resolva o sistema de equações abaixo.

$$\begin{aligned}x &\equiv 2 \pmod{3} \\x &\equiv 1 \pmod{4} \\x &\equiv 3 \pmod{5}\end{aligned}$$

- Mostre seus cálculos;
 - Deixe explícito os valores de cada \mathbf{M}_k
 - Deixe explícito os valores de cada \mathbf{y}_k
 - **Dica:** sempre que calcular y_k e x , teste se estes números estão corretos.
10. Calcule o inverso de
- a) {1, 0 pt} 4 módulo 9.

b) $\{1, 0 \text{ pt}\}$ 2 módulo 17.

c) $\{1, 0 \text{ pt}\}$ 7 módulo 26.

Teste sua solução!

11. $\{2, 0 \text{ pt}\}$ Calcule x usando o teorema Chinês do Resto. Deixe explícito os valores de M_k e y_k .

$$x \equiv 1 \pmod{2}$$

$$x \equiv 2 \pmod{3}$$

$$x \equiv 3 \pmod{5}$$

12. Sejam a, b, c, d e m inteiros, onde $m \geq 2, c > 0$ e $d > 0$. Descubra valores numéricos para a, b, c, d e m que tornem as proposições abaixo **falsas**. Observação. Os valores para a, b, c, d e m são **diferentes** nas letras (a) e (b).

A resposta deve estar neste formato:

(a) $a = 3, b = 4, c = 8, m = 3$

(b) $a = 5, b = 3, c = 2, d = 7, m = 4$

(a) $\{1, 0 \text{ pt}\} (ac \equiv bc \pmod{m}) \rightarrow (a \equiv b \pmod{m})$

(b) $\{1, 0 \text{ pt}\} ((a \equiv b \pmod{m}) \wedge (c \equiv d \pmod{m})) \rightarrow (a^c \equiv b^d \pmod{m})$

13. $\{1, 0 \text{ pt}\}$ Use o Teorema Chinês do Resto para encontrar uma solução para o sistema de equações abaixo. **Exiba seus cálculos**. Sugestão: teste seu resultado para ter certeza que calculou corretamente.

$$x \equiv 1 \pmod{3}$$

$$x \equiv 2 \pmod{4}$$

$$x \equiv 3 \pmod{5}$$

Para sua ajuda, segue abaixo a fórmula do Teorema Chinês do Resto. Em um sistema de equações

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1}$$

$$x \equiv a_2 \pmod{m_2}$$

\vdots

$$x \equiv a_n \pmod{m_n}$$

A solução é $x = a_1M_1y_1 + a_2M_2y_2 + \dots + a_nM_ny_n$. Onde, $m = m_1m_2 \dots m_n$, $M_k = m/m_k$ e y_k é o inverso de M_k módulo m_k .

14. Calcule o MDC de

a) $\{0, 5 \text{ pt}\}$ 30 e 12 utilizando o método da fatoração.

b) $\{0, 5 \text{ pt}\}$ 126 e 48 utilizando o algoritmo de Euclides.

Nas duas letras acima, exiba seus cálculos.

15. Calcule (e **exiba seus cálculos**):

a) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ O inverso de 43 módulo 15.

b) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ O inverso de 15 módulo 43.

c) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ Um x , tal que $5x \equiv 2 \pmod{34}$.

d) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ Um x , tal que $74x \equiv 5 \pmod{33}$.

16. Calcule o MDC de

a) $\{0, 5 \text{ pt}\}$ 52 e 24 utilizando o método da fatoração.

b) $\{0, 5 \text{ pt}\}$ 212 e 88 utilizando o algoritmo de Euclides.

17. $\{1, 0 \text{ pt}\}$ Use o Teorema Chinês do Resto para encontrar uma solução para o sistema de equações abaixo. **Exiba seus cálculos.** Sugestão: teste seu resultado para ter certeza que calculou corretamente.

$$x \equiv 4 \pmod{5}$$

$$x \equiv 3 \pmod{3}$$

$$x \equiv 2 \pmod{8}$$

Para sua ajuda, segue abaixo a fórmula do Teorema Chinês do Resto. Em um sistema de equações

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1}$$

$$x \equiv a_2 \pmod{m_2}$$

\vdots

$$x \equiv a_n \pmod{m_n}$$

A solução é $x = a_1M_1y_1 + a_2M_2y_2 + \dots + a_nM_ny_n$. Onde, $m = m_1m_2 \dots m_n$, $M_k = m/m_k$ e y_k é o inverso de M_k módulo m_k .

18. $\{1, 0 \text{ pt}\}$ Use o Teorema Chinês do Resto para encontrar uma solução para o sistema de equações abaixo. **Exiba seus cálculos.** Sugestão: teste seu resultado para ter certeza que calculou corretamente.

$$x \equiv 2 \pmod{3}$$

$$x \equiv 3 \pmod{4}$$

$$x \equiv 4 \pmod{5}$$

Para sua ajuda, segue abaixo a fórmula do Teorema Chinês do Resto. Em um sistema de equações

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1}$$

$$x \equiv a_2 \pmod{m_2}$$

\vdots

$$x \equiv a_n \pmod{m_n}$$

A solução é $x = a_1M_1y_1 + a_2M_2y_2 + \dots + a_nM_ny_n$. Onde, $m = m_1m_2 \dots m_n$, $M_k = m/m_k$ e y_k é o inverso de M_k módulo m_k .

19. $\{1, 0 \text{ pt}\}$ Use o Teorema Chinês do Resto para encontrar uma solução para o sistema de equações abaixo. **Exiba seus cálculos.** Sugestão: teste seu resultado para ter certeza que calculou corretamente.

$$x \equiv 1 \pmod{3}$$

$$x \equiv 3 \pmod{4}$$

$$x \equiv 3 \pmod{5}$$

Para sua ajuda, segue abaixo a fórmula do Teorema Chinês do Resto. Em um sistema de equações

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1}$$

$$x \equiv a_2 \pmod{m_2}$$

\vdots

$$x \equiv a_n \pmod{m_n}$$

A solução é $x = a_1M_1y_1 + a_2M_2y_2 + \dots + a_nM_ny_n$. Onde, $m = m_1m_2 \dots m_n$, $M_k = m/m_k$ e y_k é o inverso de M_k módulo m_k .

20. $\{1, 0 \text{ pt}\}$ Use o Teorema Chinês do Resto para encontrar uma solução para o sistema de equações abaixo. **Exiba seus cálculos.** Sugestão: teste seu resultado para ter certeza que calculou corretamente.

$$\begin{aligned}x &\equiv 3 \pmod{4} \\x &\equiv 7 \pmod{5} \\x &\equiv 1 \pmod{9}\end{aligned}$$

Para sua ajuda, segue abaixo a fórmula do Teorema Chinês do Resto. Em um sistema de equações

$$\begin{aligned}x &\equiv a_1 \pmod{m_1} \\x &\equiv a_2 \pmod{m_2} \\&\vdots \\x &\equiv a_n \pmod{m_n}\end{aligned}$$

A solução é $x = a_1M_1y_1 + a_2M_2y_2 + \dots + a_nM_ny_n$. Onde, $m = m_1m_2 \dots m_n$, $M_k = m/m_k$ e y_k é o inverso de M_k módulo m_k .

21. $\{1, 0 \text{ pt}\}$ Use o Teorema Chinês do Resto para encontrar uma solução para o sistema de equações abaixo. **Exiba seus cálculos.** Sugestão: teste seu resultado para ter certeza que calculou corretamente.

$$\begin{aligned}x &\equiv 4 \pmod{2} \\x &\equiv 5 \pmod{3} \\x &\equiv 4 \pmod{7}\end{aligned}$$

Para sua ajuda, segue abaixo a fórmula do Teorema Chinês do Resto. Em um sistema de equações

$$\begin{aligned}x &\equiv a_1 \pmod{m_1} \\x &\equiv a_2 \pmod{m_2} \\&\vdots \\x &\equiv a_n \pmod{m_n}\end{aligned}$$

A solução é $x = a_1M_1y_1 + a_2M_2y_2 + \dots + a_nM_ny_n$. Onde, $m = m_1m_2 \dots m_n$, $M_k = m/m_k$ e y_k é o inverso de M_k módulo m_k .

22. Para criptografar a mensagem M , calculamos $C = M^e \bmod (p \cdot q)$. Para decriptografar a mensagem C , calculamos $M' = C^d \bmod (p \cdot q)$, onde d é o inverso de e módulo $(p - 1) \cdot (q - 1)$. Sejam $M = 7$, $e = 3$, $p = 3$ e $q = 5$.

a) $\{0, 30 \text{ pt}\}$ Calcule C . Exiba seus cálculos.

b) $\{0, 70 \text{ pt}\}$ Calcule d e M' . Exiba seus cálculos. **Dica:** Teste sua resposta. Verifique se $M' = M$.

23. Para criptografar a mensagem M , calculamos $C = M^e \bmod (p \cdot q)$. Para decriptografar a mensagem C , calculamos $M' = C^d \bmod (p \cdot q)$, onde d é o inverso de e módulo $(p - 1) \cdot (q - 1)$. Sejam $M = 6$, $e = 5$, $p = 3$ e $q = 7$.

a) $\{0, 30 \text{ pt}\}$ Calcule C . Exiba seus cálculos.

b) $\{0, 70 \text{ pt}\}$ Calcule d e M' . Exiba seus cálculos. **Dica:** Teste sua resposta. Verifique se $M' = M$.

24. $\{1, 0 \text{ pt}\}$ Use o Teorema Chinês do Resto para encontrar uma solução para o sistema de equações abaixo. **Exiba seus cálculos.** Sugestão: teste seu resultado para ter certeza que calculou corretamente.

$$\begin{aligned}x &\equiv 5 \pmod{2} \\x &\equiv 2 \pmod{3} \\x &\equiv 4 \pmod{5}\end{aligned}$$

Teorema Chinês do Resto. Em um sistema de equações

$$\begin{aligned}x &\equiv a_1 \pmod{m_1} \\x &\equiv a_2 \pmod{m_2} \\&\vdots \\x &\equiv a_n \pmod{m_n}\end{aligned}$$

a solução é $x = a_1M_1y_1 + a_2M_2y_2 + \dots + a_nM_ny_n$, onde $m = m_1m_2 \dots m_n$, $M_k = m/m_k$ e y_k é o inverso de M_k módulo m_k .

25. $\{1, 0 \text{ pt}\}$ Use o Teorema Chinês do Resto para encontrar uma solução para o sistema de equações abaixo. **Exiba seus cálculos.** Sugestão: teste seu resultado para ter certeza que calculou corretamente.

$$\begin{aligned}x &\equiv 6 \pmod{5} \\x &\equiv 3 \pmod{6} \\x &\equiv 5 \pmod{7}\end{aligned}$$

Teorema Chinês do Resto. Em um sistema de equações

$$\begin{aligned}x &\equiv a_1 \pmod{m_1} \\x &\equiv a_2 \pmod{m_2} \\&\vdots \\x &\equiv a_n \pmod{m_n}\end{aligned}$$

a solução é $x = a_1M_1y_1 + a_2M_2y_2 + \dots + a_nM_ny_n$, onde $m = m_1m_2 \dots m_n$, $M_k = m/m_k$ e y_k é o inverso de M_k módulo m_k .

26. Qual o menor número **natural** congruente a

- a) $\{0, 10 \text{ pt}\}$ 20 módulo 3?
- b) $\{0, 10 \text{ pt}\}$ 33 módulo 4?
- c) $\{0, 10 \text{ pt}\}$ 49 módulo 5?
- d) $\{0, 10 \text{ pt}\}$ 100 módulo 7?

27. $\{0, 6 \text{ pt}\}$ Qual a fórmula que calcula o menor número **natural** congruente a x módulo m ? Dica: use o Quesito 26 como inspiração para descobrir a fórmula.

28. $\{1, 0 \text{ pt}\}$ Use o Teorema Chinês do Resto para encontrar uma solução para o sistema de equações abaixo. **Exiba seus cálculos.** Sugestão: teste seu resultado para ter certeza que calculou corretamente.

$$\begin{aligned}x &\equiv 1 \pmod{2} \\x &\equiv 2 \pmod{3} \\x &\equiv 4 \pmod{5}\end{aligned}$$

Para sua ajuda, segue abaixo a fórmula do Teorema Chinês do Resto. Em um sistema de equações

$$\begin{aligned}x &\equiv a_1 \pmod{m_1} \\x &\equiv a_2 \pmod{m_2} \\&\vdots \\x &\equiv a_n \pmod{m_n}\end{aligned}$$

A solução é $x = a_1M_1y_1 + a_2M_2y_2 + \dots + a_nM_ny_n$. Onde, $m = m_1m_2 \dots m_n$, $M_k = m/m_k$ e y_k é o inverso de M_k módulo m_k .

29. {3, 3 pt} Dadas as premissas $(-1 \equiv -1 \pmod{m})$, $(a \equiv b \pmod{m})$ e $(c \equiv d \pmod{m})$, prove que $((a-c) \equiv (b-d) \pmod{m})$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo e com as equações [100] e [101] dadas de graça abaixo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

$$\frac{(x_1 \equiv y_1 \pmod{z}) \wedge (x_2 \equiv y_2 \pmod{z})}{\therefore (x_1 + x_2) \equiv (y_1 + y_2) \pmod{z}} \quad [100]$$

$$\frac{(x_1 \equiv y_1 \pmod{z}) \wedge (x_2 \equiv y_2 \pmod{z})}{\therefore (x_1 x_2) \equiv (y_1 y_2) \pmod{z}} \quad [101]$$

30. {1, 0 pt} Dadas as premissas $(a \mid b)$ e $(a \mid c)$, conclua que $(a \mid (mb + nc))$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo e com as regras de inferência [100] e [101] dadas de graça abaixo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

$$\frac{(x \mid y)}{\therefore (x \mid ky)} \quad [100]$$

$$\frac{(x \mid y) \wedge (x \mid z)}{\therefore (x \mid (y+z))} \quad [101]$$

31. {1, 0 pt} Use o Teorema Chinês do Resto para encontrar uma solução para o sistema de equações abaixo. **Exiba seus cálculos.** Sugestão: teste seu resultado para ter certeza que calculou corretamente.

$$\begin{aligned}x &\equiv 0 \pmod{2} \\x &\equiv 3 \pmod{5} \\x &\equiv 2 \pmod{7}\end{aligned}$$

Para sua ajuda, segue abaixo a fórmula do Teorema Chinês do Resto. Em um sistema de equações

$$\begin{aligned}x &\equiv a_1 \pmod{m_1} \\x &\equiv a_2 \pmod{m_2} \\&\vdots \\x &\equiv a_n \pmod{m_n}\end{aligned}$$

A solução é $x = a_1M_1y_1 + a_2M_2y_2 + \dots + a_nM_ny_n$. Onde, $m = m_1m_2 \dots m_n$, $M_k = m/m_k$ e y_k é o inverso de M_k módulo m_k .

32. {1, 0 pt} Qual o número que, quando dividido por 8, tem resto 3, quando dividido por 9, tem resto 1 e, quando dividido por 11 tem resto 4? Dica: use o Teorema Chinês do Resto para encontrar este número.

Para sua ajuda, segue abaixo a fórmula do Teorema Chinês do Resto. Em um sistema de equações

$$\begin{aligned}x &\equiv a_1 \pmod{m_1} \\x &\equiv a_2 \pmod{m_2} \\&\vdots \\x &\equiv a_n \pmod{m_n}\end{aligned}$$

A solução é $x = a_1M_1y_1 + a_2M_2y_2 + \dots + a_nM_ny_n$. Onde, $m = m_1m_2 \dots m_n$, $M_k = m/m_k$ e y_k é o inverso de M_k módulo m_k .

33. {1, 0 pt} Para criptografar uma mensagem M , o remetente calcula a expressão $(M^e \bmod (p \cdot q))$, onde e e $(p \cdot q)$ são as chaves públicas do destinatário. Note que o remetente não sabe quem são p e q separadamente, pois enxerga apenas o resultado da multiplicação $(p \cdot q)$. Apenas o destinatário sabe quais são os valores de p e q separadamente. Por isso que p e q são as chaves privadas do destinatário. Para decriptografar uma mensagem C , o destinatário calcula $(C^d \bmod (p \cdot q))$, onde d é o inverso de e módulo $(p - 1) \cdot (q - 1)$.

Suponha que as chaves públicas de Dilma Rousseff sejam $e = 5$, e $(p \cdot q) = 21$, onde as chaves privadas são $p = 3$ e $q = 7$.

Edward Snowden enviou uma mensagem a Dilma criptografada 3 vezes. Ou seja, a mesma mensagem foi criptografada uma vez, o resultado foi criptografado uma segunda vez e, por fim, este segundo resultado foi criptografado uma terceira vez. A mensagem recebida por Dilma, após as 3 criptografias, foi 11.

Calcule a mensagem original de Edward Snowden. Exiba seus cálculos.

4 Indução e Recursão

4.1 Indução Matemática

1. {2, 0 pt} Queremos provar que $((8^n - 2^n) \bmod 6) = 0$ para todo inteiro $n \geq 1$. Prove por *indução matemática*. Caso precise, utilize o Teorema 1: $8^{k+1} - 2^{k+1} = 8(8^k - 2^k) + 8 \cdot 2^k - 2 \cdot 2^k$

2. {1, 0 pt} Seja $P(n) = \left(\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$.

Prove por indução que $P(n)$ é verdade para $n \geq 1$.

- Mostre seus cálculos;
- Escreva o **objetivo de prova** do caso base e do passo indutivo.
- Escreva a **hipótese de indução**
- Justifique da melhor forma possível cada passo de prova.
- Utilize a Equação 1 abaixo caso precise:

$$\frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6} \quad [1]$$

3. Prove por indução matemática que

$$(4 + 10 + 16 + \dots + (6n - 2)) = (n(3n + 1))$$

para todo $n > 0$. Justifique cada passo de prova com os termos “[Aritmética]”, “[Hipótese de Indução]” ou com “[100]”, cuja equação é dada abaixo:

$$(3k^2 + 7k + 4) = ((k + 1)(3(k + 1) + 1)) \quad [100]$$

Use, obrigatoriamente, a hipótese de indução.

4. Prove por indução matemática que

$$n + n = 2n$$

para todo $n \geq 0$.

Justifique cada passo com “Aritmética”, “Hipótese de Indução” ou com uma das equações abaixo.

$$\begin{array}{r} 2(x + 1) = 2x + 2 \quad [100] \\ (x + y) + (x + y) = (x + x) + (y + y) \quad [101] \\ (1 + 1) = 2 \quad [102] \end{array}$$

Use, obrigatoriamente, a hipótese de indução.

5. Seja a função F definida da seguinte forma:

$$\begin{array}{l} F(1) = 5 \\ F(n) = F(n - 1) + 5n \end{array}$$

Queremos provar por **indução matemática** que $5 + 10 + 15 + \dots + 5n = F(n)$, para todo $n > 0$.

Justifique cada passo de prova com “Aritmética”, “Definição de F ” ou “Hipótese de Indução”.

Use, obrigatoriamente, a hipótese de indução.

6. Prove por indução matemática que todo número par, ao ser dividido por 2, tem resto 0. Ou seja, prove por indução matemática que $(2n \bmod 2) = 0$ para todo $n \geq 0$.

Justifique seus passos de prova com “Aritmética”, “Hipótese de Indução” ou “[1]”, onde [1] é a equação abaixo:

$$((2k + 2) \bmod 2) = (((2k \bmod 2) + (2 \bmod 2)) \bmod 2) \quad [1]$$

Use, obrigatoriamente, a hipótese de indução.

7. Prove por indução matemática que todo número ímpar, ao ser dividido por 2, tem resto 1. Ou seja, prove que $((2n - 1) \bmod 2) = 1$ para todo $n > 0$.

Justifique seus passos de prova com “Aritmética”, “Hipótese de Indução” ou “[1]”, onde [1] é a equação abaixo:

$$(((2k - 1) + 2) \bmod 2) = (((2k - 1) \bmod 2) + (2 \bmod 2)) \bmod 2 \quad [1]$$

Use, obrigatoriamente, a hipótese de indução.

8. Prove por indução matemática que

$$(0 \bmod 2) \cdot (2 \bmod 2) \cdot (4 \bmod 2) \cdot (6 \bmod 2) \cdot \dots \cdot (2n \bmod 2) = 0$$

para todo $n \geq 0$.

Justifique seus passos de prova com “Aritmética” ou “Hipótese de Indução”.

Use, obrigatoriamente, a hipótese de indução.

9. Prove por indução matemática que

$$n + n + n + n = 4n$$

para todo $n \geq 0$.

Justifique seus passos de prova com “Aritmética” ou “Hipótese de Indução”.

Use, obrigatoriamente, a hipótese de indução.

10. Prove por indução matemática que

$$(1 \bmod 2) + (3 \bmod 2) + (5 \bmod 2) + \dots + ((2n - 1) \bmod 2) = n$$

para todo $n > 0$.

Justifique seus passos de prova com “Aritmética”, “Hipótese de Indução” ou “[100]”, onde [100] é a equação dada (de graça) abaixo:

$$((2k + 1) \bmod 2) = 1 \quad [100]$$

Use, **obrigatoriamente**, a hipótese de indução.

11. Prove por indução matemática que

$$(1 + 2 + 3 + \dots + n) + (1 + 2 + 3 + \dots + n) = n(n + 1)$$

para todo $n > 0$.

Justifique seus passos de prova com “Aritmética” ou “Hipótese de Indução”.

Utilize, **obrigatoriamente**, a hipótese de indução na sua prova.

12. Prove por indução matemática que

$$2^n = 2 \cdot 2^{n-1}$$

para todo $n > 0$.

Justifique seus passos de prova com “Aritmética” ou “Hipótese de Indução”.

Utilize, **obrigatoriamente**, a hipótese de indução na sua prova.

13. Prove por indução matemática que

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n + 1)}{2} \right)^2$$

para todo $n > 0$.

Justifique seus passos de prova com “Aritmética”, “Hipótese de Indução”, [1] ou [2], dados abaixo.

$$\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2} + (k+1)\right)^2 \quad [1]$$

$$(k+1)(k+2) = k(k+1) + 2(k+1) \quad [2]$$

Utilize, obrigatoriamente, a hipótese de indução na sua prova.

14. Prove por indução matemática que

$$(0 + 2 + 4 + 6 + \dots + 2n) \bmod 2 = 0$$

para todo $n \geq 0$.

Justifique seus passos de prova com “Aritmética”, “Hipótese de Indução” ou [1], dado abaixo. Utilize, obrigatoriamente, a hipótese de indução na sua prova.

$$\begin{aligned} & (0 + 2 + 4 + 6 + \dots + 2k + 2(k+1)) \bmod 2 \\ &= (((0 + 2 + 4 + 6 + \dots + 2k) \bmod 2) + (2(k+1) \bmod 2)) \bmod 2 \quad [1] \end{aligned}$$

15. Prove por indução matemática que

$$\frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n} = \frac{n+1}{2}$$

para todo $n > 0$.

Justifique seus passos de prova com “Aritmética”, “Hipótese de Indução” ou [1], dado abaixo.

$$\frac{1+2+3+\dots+k+(k+1)}{k+1} = \left(\frac{1+2+3+\dots+k}{k} + \frac{k+1}{k}\right) \cdot \frac{k}{k+1} \quad [1]$$

Utilize, obrigatoriamente, a hipótese de indução na sua prova.

16. Prove por indução matemática que

$$0 + 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n \cdot (n+1)$$

para todo $n \geq 0$.

Justifique seus passos de prova com “Aritmética”, “Hipótese de Indução” ou [1], dado abaixo.

$$k \cdot (k+1) + 2 \cdot (k+1) = (k+1)(k+2) \quad [1]$$

Utilize, obrigatoriamente, a hipótese de indução na sua prova.

17. Prove por indução matemática que $(n!/n) = (n-1)!$, onde $n > 0$.

Justifique cada passo com os termos “[Aritmética]”, “[Hipótese de Indução]”, “[100]” ou “[101]”, cujas equações são dadas abaixo:

$$(k+1)! = ((k+1) \cdot k \cdot k!)/k \quad [100]$$

$$k \cdot (k-1)! = k! \quad [101]$$

Use, **obrigatoriamente**, a Hipótese de Indução.

18. Prove por indução matemática que

$$(3 \cdot 2^0 + 3 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \dots + 3 \cdot 2^n) = (3 \cdot 2^{n+1} - 3)$$

para todo $n \geq 0$.

Justifique seus passos de prova com “Aritmética”, “Hipótese de Indução” ou [100], dado abaixo.

$$3 \cdot 2^{k+1} + 3 \cdot 2^{k+1} = 3 \cdot 2 \cdot 2^{k+1} \quad [100]$$

Utilize, obrigatoriamente, a hipótese de indução na sua prova.

19. Prove, por indução matemática, que $\lfloor n \rfloor = \lceil n \rceil$, para todo inteiro $n \geq 0$.

Justifique cada passo com os termos “[Aritmética]”, “[Hipótese de Indução]”, “[100]” ou “[101]”, cujas equações são dadas abaixo:

$$\begin{aligned} \lfloor k+1 \rfloor &= \lfloor k \rfloor + 1 && [100] \\ \lceil k+1 \rceil &= \lceil k \rceil + 1 && [101] \end{aligned}$$

Use, **obrigatoriamente**, a Hipótese de Indução.

20. Prove por indução matemática que

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) = \frac{n!}{(n-3)!}$$

para todo $n \geq 3$.

Justifique cada passo de prova com “Aritmética”, “Definição de Fatorial”, “Hipótese de Indução”, [100] ou [101], dados abaixo. Utilize, obrigatoriamente, a hipótese de indução na sua prova.

$$\begin{aligned} (k+1) \cdot (k) \cdot (k-1) &= k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \frac{k+1}{k-2} && [100] \\ \frac{k!}{(k-3)!} \cdot \frac{k+1}{k-2} &= \frac{(k+1)!}{(k-2)!} && [101] \end{aligned}$$

Definição de fatorial:

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ (n+1)! &= (n+1) \cdot n! \end{aligned}$$

21. Prove por indução matemática que

$$((2 + 4 + 6 + \dots + 2n) - (1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1))) = n$$

para todo inteiro $n > 0$.

Justifique cada passo de prova com os termos “[Aritmética]” ou “[Hipótese de Indução]”. Use, obrigatoriamente, a hipótese de indução.

22. {2, 0 pt} Prove por indução matemática que

$$((n \cdot (n+1)) \bmod 2) = 0$$

para todo inteiro $n > 0$.

Justifique cada passo de prova com os termos “[Aritmética]”, “[Hipótese de Indução]” ou as equações [100] e [101] dadas abaixo:

$$\begin{aligned} ((x + y) \bmod z) &= (((x \bmod z) + (y \bmod z)) \bmod z) & [100] \\ ((x \cdot 2) \bmod 2) &= 0 & [101] \end{aligned}$$

Use, obrigatoriamente, a hipótese de indução.

23. {3, 4 pt} Prove por indução matemática que

$$(1 + 2 + 3 + \dots + n) \cdot \left(\frac{2}{n(n+1)} \right) = 1$$

para todo inteiro $n > 0$.

Justifique cada passo de prova com os termos “[Aritmética]”, “[Hipótese de Indução]” ou as equações [100] e [101] dadas abaixo:

$$\begin{aligned} (1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1)) \cdot \left(\frac{2}{(k+1)(k+2)} \right) \\ = (1 + 2 + 3 + \dots + k) \cdot \left(\frac{2}{k(k+1)} \right) \cdot \left(\frac{k(k+1)}{(k+1)(k+2)} \right) + (k + 1) \cdot \left(\frac{2}{(k+1)(k+2)} \right) & [100] \end{aligned}$$

$$\frac{k(k+1)}{(k+1)(k+2)} + (k + 1) \cdot \left(\frac{2}{(k+1)(k+2)} \right) = \frac{k^2 + 3k + 2}{(k+1)(k+2)} \quad [101]$$

Use, obrigatoriamente, a hipótese de indução.

24. {3, 4 pt} Prove por indução matemática que

$$\left(\frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)}{n^2} \right) = 1$$

para todo inteiro $n > 0$.

Justifique cada passo de prova com os termos “[Aritmética]”, “[Hipótese de Indução]” ou a equação [100] dada abaixo:

$$\frac{1+3+5+\dots+(2k-1)+(2(k+1)-1)}{(k+1)^2} = \frac{1+3+5+\dots+(2k-1)}{k^2} \cdot \frac{k^2}{(k+1)^2} + \frac{2(k+1)-1}{(k+1)^2} \quad [100]$$

Use, obrigatoriamente, a hipótese de indução.

25. {2, 0 pt} Prove por indução matemática que

$$(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (n-1) \cdot n) = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{3}$$

para todo $n > 1$.

Justifique cada passo de prova com os termos “[Aritmética]”, “[Hipótese de Indução]” ou a equação [100] dada abaixo:

$$\frac{(k-1) \cdot k \cdot (k+1) + 3 \cdot (k^2 + k)}{3} = \frac{((k+1)-1)(k+1)((k+1)+1)}{3} \quad [100]$$

Use, obrigatoriamente, a hipótese de indução.

26. {1, 00 pt} Seja r um número real. Prove, por indução matemática, que

$$\lfloor r + n \rfloor = \lfloor r \rfloor + n$$

para todo inteiro $n \geq 0$. Justifique cada passo de prova com os termos “[Aritmética]”, “[Hipótese de Indução]” ou com “[100]”, cuja equação é dada abaixo:

$$\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1 \quad [100]$$

Use, obrigatoriamente, a hipótese de indução.

27. {1, 0 pt} Prove por indução matemática que

$$((n \cdot (n + 1) - 1) \bmod 2) = 1$$

para todo $n > 0$.

Justifique cada passo de prova com os termos [Aritmética], [Hipótese de Indução] ou as equações [100], [101] e [102] dadas abaixo:

$$((x + y) \bmod z) = (((x \bmod z) + (y \bmod z)) \bmod z) \quad [100]$$

$$((x \cdot 2) \bmod 2) = 0 \quad [101]$$

$$(((k + 1)((k + 1) + 1) - 1) \bmod 2) = ((k \cdot (k + 1) - 1) + (k + 1) \cdot 2) \bmod 2 \quad [102]$$

Use, obrigatoriamente, a hipótese de indução.

28. {2, 0 pt} Prove por indução matemática que

$$\left(\left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \right) = \frac{n + 1}{2n}$$

para todo $n > 1$.

Justifique cada passo de prova com os termos [Aritmética], [Hipótese de Indução] ou a equação [100], dada abaixo:

$$\left(\frac{k+1}{2k} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = \frac{k^2+2k}{2k(k+1)} \quad [100]$$

Use, obrigatoriamente, a hipótese de indução.

29. {1, 0 pt} Prove por indução matemática que o produto de quaisquer 3 números naturais consecutivos é divisível por 3. Ou seja, prove por indução matemática que

$$((n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)) \bmod 3) = 0$$

para todo $n \geq 0$.

Justifique cada passo de prova com os termos [Aritmética], [Hipótese de Indução] ou as equações [100], [101] e [102] dadas abaixo:

$$((k + 1)((k + 1) + 1)((k + 1) + 2) \bmod 3) = ((k \cdot (k + 1)(k + 2)) + (3 \cdot (k + 1)(k + 2))) \bmod 3 \quad [100]$$

$$((x + y) \bmod z) = (((x \bmod z) + (y \bmod z)) \bmod z) \quad [101]$$

$$((3x) \bmod 3) = 0 \quad [102]$$

Use, obrigatoriamente, a hipótese de indução.

30. $\{2, 0\}$ Prove por indução matemática que

$$\left(\frac{1}{1 \cdot (1+1)} + \frac{1}{2 \cdot (2+1)} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right) = \frac{n}{n+1}$$

para todo $n > 0$.

Justifique cada passo de prova com os termos [Aritmética], [Hipótese de Indução] ou a equação [100], dada abaixo:

$$\frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)((k+1)+1)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \quad [100]$$

Use, obrigatoriamente, a hipótese de indução.

4.2 Indução Estrutural

1. Seja o conjunto de strings $A = \{“1”, “11”, “111”, \dots\}$ definido assim:

Caso base. O string “1” pertence a A .

Caso recursivo. Seja s um string que pertença a A . Então o string “1”+ s também pertence à A .

Obs₁. O símbolo de + acima é uma concatenação de strings. Exemplo: “xyz”+“abc” = “xyzabc”, “1”+“111” = “1111”.

Obs₂. Todos elementos de A são provenientes do passo base e passo recursivo.

Seja $C(s)$ a função que retorna o *comprimento* do string s . Por exemplo, $C(“1”) = 1$, $C(“11111”) = 5$, etc.

Seja $F(s)$ a função que retorna a *soma dos dígitos* do string s . Por exemplo, $F(“1”) = 1$, $F(“123”) = 1 + 2 + 3 = 6$, $F(“1111”) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$, etc.

Prove por indução estrutural que $C(s) = F(s)$ para todo $s \in A$.

Justifique cada passo de prova com “Def. de C ”, “Def. de F ” ou “Hipótese de Indução”.

2. Seja o conjunto de strings $A = \{“2”, “22”, “222”, \dots\}$ definido assim:

Caso base. “2” $\in A$.

Caso recursivo. Se $s \in A$, então “2”+ $s \in A$.

Obs₁. O símbolo de + acima concatena strings. Exemplo: “2”+“222” = “2222”.

Obs₂. Todos elementos de A são provenientes do passo base e passo recursivo.

Seja $C(s)$ a função que retorna o *comprimento* do string s .

Por exemplo, $C(“2”) = 1$, $C(“22222”) = 5$, etc.

Seja $P(s)$ a função que retorna o *produto dos dígitos* do string s .

Por exemplo, $P(“2”) = 2$, $P(“222”) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Prove por indução estrutural que $2^{C(t)} = P(t)$, para todo $t \in A$.

Justifique cada passo de prova com “Def. de C ”, “Def. de P ”, “Aritmética”, “Hipótese de Indução” ou com uma das equações abaixo:

$$\begin{aligned} 2^{1+n} &= 2 \cdot 2^n & [1] \\ C(“2”+s) &= 1 + C(s) & [2] \\ P(“2”+s) &= 2 \cdot P(s) & [3] \end{aligned}$$

3. Seja o conjunto de strings contendo programas de computador:

$$A = \{ "x = 2 ;", "x = 2 ; x = x + 2 ;", "x = 2 ; x = x + 2 ; x = x + 2 ;", \dots \}$$

Note que os programas têm apenas atribuições. A definição formal é:

Caso base. $"x = 2 ;" \in A$.

Passo recursivo. Se $s \in A$, então $(s + "x = x + 2 ;") \in A$.

Obs₁. O símbolo de + aplicado a s concatena strings. Exemplo: "a" + "bcd" = "abcd".

O símbolo de + aplicado a x é soma aritmética.

Obs₂. Todos elementos de A são provenientes do passo base e passo recursivo.

Seja $EXEC(s)$ a função que retorna o *valor de x ao término* da execução do programa s .

Por exemplo, $EXEC("x = 2 ;") = 2$, $EXEC("x = 2 ; x = x + 2 ;") = 4$, etc.

Seja $ATR(s)$ a função que retorna o *número de atribuições* contidos em s .

Por exemplo, $ATR("x = 2 ;") = 1$, $ATR("x = 2 ; x = x + 2 ;") = 2$.

Prove por indução estrutural que $EXEC(s) = 2 \cdot ATR(s)$, para todo $s \in A$.

Justifique cada passo de prova com "Def. de $EXEC$ ", "Def. de ATR ", "Aritmética", "Hipótese de Indução" ou com as equações [1] ou [2] abaixo:

$$\begin{aligned} EXEC(s + "x = x + 2 ;") &= 2 + EXEC(s) & [1] \\ ATR(s + "x = x + 2 ;") &= 1 + ATR(s) & [2] \end{aligned}$$

4. Seja o conjunto de strings de bits $A = \{ "0", "1", "01", "10", \dots \}$ definido assim:

Passo base 1. $"0" \in A$.

Passo base 2. $"1" \in A$.

Passo recursivo. Se $s \in A$ e $t \in A$, então $s + t \in A$.

Obs₁. O símbolo de + acima concatena strings. Exemplo: "ab" + "cd" = "abcd".

Obs₂. Todos elementos de A são provenientes dos passos base e passo recursivo.

Seja $UNS(s)$ a função que retorna a *quantidade de bits 1* do string s .

Por exemplo, $UNS("0") = 0$, $UNS("1") = 1$, $UNS("010") = 1$, etc.

Seja $S(s)$ a função que retorna a *soma dos bits* do string s .

Por exemplo, $S("0") = 0$, $S("1") = 1$, $S("0101") = 2$, $S("0101011") = 4$, etc.

Prove por indução estrutural que $UNS(t) = S(t)$, para todo $t \in A$.

Justifique cada passo de prova com "Def. de UNS ", "Def. de S ", "Aritmética", "Hipótese de Indução" ou com uma das equações abaixo:

$$\begin{aligned} UNS(s + t) &= UNS(s) + UNS(t) & [1] \\ S(s + t) &= S(s) + S(t) & [2] \end{aligned}$$

5. Seja A o conjunto definido recursivamente abaixo.

Caso base. $17 \in A$.

Passo recursivo. Se $n \in A$, então $(n + n) \in A$.

Prove por indução estrutural que $\forall n \in A (n \bmod 17 = 0)$.

Justifique cada passo de prova com “Def. de **mod**”, “Aritmética”, “Hipótese de Indução” ou com a equação [1] abaixo:

$$((x + y) \bmod z) = (((x \bmod z) + (y \bmod z)) \bmod z) \quad [1]$$

6. Seja A definido recursivamente abaixo.

Caso base. $1 \in A$.

Passo recursivo. Se $n \in A$, então $(n + 2) \in A$.

Prove que por indução estrutural, que $\forall n \in A((n - 1) \bmod 2) = 0$.

Justifique com “Aritmética”, “Definição de **mod**”, “Hipótese de Indução”, “[1]” ou “[2]”, onde [1] e [2] são as equações abaixo:

$$\begin{aligned} ((x + y) \bmod z) &= (((x \bmod z) + (y \bmod z)) \bmod z) \quad [1] \\ (((n + 2) - 1) \bmod 2) &= (((n - 1) + 2) \bmod 2) \quad [2] \end{aligned}$$

7. Seja A o conjunto de strings definido recursivamente abaixo.

Caso base. “ana” $\in A$.

Passo recursivo. Se $s \in A$, então $s + s \in A$.

Obs₁. O símbolo de + acima concatena strings. Exemplo: “a”+“bcd” = “abcd”.

Obs₂. Todos elementos de A são provenientes do passo base e passo recursivo.

Seja $CONTAA(s)$ a função que retorna a *quantidade de letras “a”* do string s . Por exemplo, $CONTAA(\text{“anaanaana”}) = 6$.

Seja $CONTAN(s)$ a função que retorna a *quantidade de letras “n”* do string s . Por exemplo, $CONTAN(\text{“anaanaana”}) = 3$.

Prove por indução estrutural que $CONTAA(s) = 2 \cdot CONTAN(s)$, para todo $s \in A$.

Justifique cada passo de prova com “Def. de $CONTAA$ ”, “Def. de $CONTAN$ ”, “Aritmética”, “Hipótese de Indução” ou com as equações [1] ou [2] abaixo:

$$\begin{aligned} CONTAA(s + s) &= CONTAA(s) + CONTAA(s) \quad [1] \\ CONTAN(s + s) &= CONTAN(s) + CONTAN(s) \quad [2] \end{aligned}$$

8. Seja A o conjunto definido recursivamente abaixo.

Caso base. $2 \in A$.

Passo recursivo. Se $n \in A$, então $n^2 \in A$.

Obs. Todos elementos de A são provenientes do passo base e passo recursivo.

Queremos provar por indução estrutural que $((n \bmod 2) = 0)$, para todo $n \in A$.

Justifique cada passo com “Aritimética”, “Definição de **mod**”, “Hipótese de Indução” ou “[1]”, onde [1] é a equação abaixo:

$$((x \cdot y) \bmod z) = (((x \bmod z) \cdot (y \bmod z)) \bmod z) \quad [1]$$

9. Seja A o conjunto de strings definido recursivamente abaixo.

Caso base. “ana” $\in A$.

Passo recursivo. Se $s \in A$, então “b” + s + “b” $\in A$.

Obs₁. O símbolo de + acima concatena strings. Exemplo: “a” + “bcd” = “abcd”.

Obs₂. Todos elementos de A são provenientes do passo base e passo recursivo.

Seja $REV(s)$ a função que retorna o *reverso* do string s . Por exemplo, $REV(\text{“discreta”}) = \text{“atercsid”}$ e $REV(\text{“k”}) = \text{“k”}$.

Prove por indução estrutural que todos os elementos de A são palíndromos.

Ou seja, queremos provar que: $REV(s) = s$, para todo $s \in A$.

Justifique cada passo de prova com “Def. de REV ”, “Aritmética”, “Hipótese de Indução” ou com a equação [1] abaixo:

$$REV(\text{“b”} + s + \text{“b”}) = REV(\text{“b”}) + REV(s) + REV(\text{“b”}) \quad [1]$$

10. {2, 0 pt} Seja $A = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \dots\}$ um conjunto de conjuntos. Defina o conjunto A de forma recursiva.

Dica: faça uso da operação de *tamanho* de um conjunto. O tamanho de um conjunto s é dado por $|s|$. Por exemplo, $|\{7, 354, 10\}| = 3$.

11. Seja A um conjunto de conjuntos definido recursivamente abaixo.

Caso base. $\emptyset \in A$.

Passo recursivo. Se $s \in A$, então $s \cup \emptyset \in A$.

Obs. Todos elementos de A são provenientes do passo base e passo recursivo.

Prove por indução estrutural que o tamanho de todo elemento de A é 0. Ou seja, queremos provar que $|s| = 0$, para todo $s \in A$.

Justifique cada passo de prova com “Def. de tamanho”, “Aritmética”, “Hipótese de Indução” ou com as equações [1] e [2] abaixo:

$$\begin{aligned} |B \cup C| &= |B| + |C| - |B \cap C| & [1] \\ B \cap \emptyset &= \emptyset & [2] \end{aligned}$$

4.3 Recursão

12. {0, 2 pt} A função de Ackermann é definida abaixo para m e n inteiros positivos. Calcule $Ack(1, 1)$. Exiba seus cálculos.

$$Ack(m, n) = \begin{cases} n + 1 & \text{if } m = 0 \\ Ack(m - 1, 1) & \text{if } (m > 0) \wedge (n = 0) \\ Ack(m - 1, Ack(m, n - 1)) & \text{if } (m > 0) \wedge (n > 0) \end{cases}$$

13. {0, 2 pt} Seja L a função abaixo similar ao número de Lucas. Calcule $L(8)$. Exiba seus cálculos.

$$L(n + 2) = \begin{cases} 2 & \text{se } n = 0 \\ 1 & \text{se } n = 1 \\ L(n + 1) + L(n) & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

14. $\{0, 5 \text{ pt}\}$ Defina de forma recursiva o conjunto F que contém todos os usuários do Facebook. Assuma que: (1) o primeiro usuário foi Mark Zuckerberg; e que (2) só entra no Facebook aqueles que são convidados por quem já é usuário do Facebook.
15. $\{1, 0 \text{ pt}\}$ Defina de forma recursiva o conjunto P de todas as pessoas já existentes no planeta. Assuma que as primeiras pessoas foram Adão e Eva.
16. $\{0, 5 \text{ pt}\}$ Calcule $L(0)$, $L(1)$, $L(-1)$, $L(-2)$ e $L(-3)$, onde $L(n)$ é definido abaixo. Exiba seus cálculos.
 Passo base 1. $L(0) = 2$
 Passo base 2. $L(1) = 1$
 Passo recursivo. $L(n - 2) = L(n) - L(n - 1)$

5 Relações

1. $\{2 \text{ pt}\}$ Seja R uma relação em $A = \{a, b, c, d\}$ dada por

$$R = \{(a, d), (b, a), (b, c), (c, a), (c, d), (d, c)\}.$$

Utilize matrizes para calcular o fecho transitivo de R .

2. Seja R uma relação em $A = \{1, 2, 3, 4\}$ definida por:

$$R = \{(1, 2), (2, 1), (3, 1), (4, 2), (4, 3)\}.$$

Defina:

- a) $\{1, 0 \text{ pt}\}$ O fecho reflexivo de R ;
 - b) $\{1, 0 \text{ pt}\}$ O fecho simétrico de R ;
 - c) $\{2, 0 \text{ pt}\}$ O fecho transitivo de R ; Utilize matrizes e mostre seus cálculos.
3. $\{2, 0 \text{ pt}\}$ Seja R uma relação em $A = \{1, 2, 3, 4\}$ definida por

$$R = \{(2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 1), (4, 3)\}$$

Utilize matrizes para calcular o fecho transitivo de R .

4. Sejam $B = \{1, 2, 3\}$ e $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$ uma relação em B .
 - a) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ Defina o fecho reflexivo de R .
 - b) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ Defina o fecho simétrico de R .
5. $\{2 \text{ pt}\}$ Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $R = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$ uma relação em A . Calcule a matriz \mathbf{M}_{R^*} que representa o fecho transitivo de R .

6. Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
- $\{1, 0 \text{ pt}\}$ Defina uma relação em A que seja reflexiva, simétrica e antissimétrica simultaneamente.
 - $\{1, 0 \text{ pt}\}$ Defina uma relação em A que seja irreflexiva e simétrica simultaneamente.
 - $\{1, 0 \text{ pt}\}$ Defina uma relação em A que seja irreflexiva e assimétrica simultaneamente.
7. A empresa Golaço oferece voos (Recife, Aracaju), (Aracaju, João Pessoa) e (João Pessoa, Recife).
- $\{2, 0 \text{ pt}\}$ Calcule o fecho transitivo desta relação usando matrizes. Exiba seus cálculos. Faça uma matriz com linha e coluna representando Recife, Aracaju e João Pessoa (nesta ordem).
 - $\{0, 5 \text{ pt}\}$ Baseado na matriz do fecho transitivo, liste os pares de voos possíveis com a Golaço (incluindo voos com escalas).
8. Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
- $\{1, 0 \text{ pt}\}$ Defina uma relação R_1 em A que seja reflexiva.
 - $\{1, 0 \text{ pt}\}$ Defina uma relação R_2 em A que seja reflexiva e antissimétrica.
 - $\{1, 0 \text{ pt}\}$ Defina uma relação R_3 em A que seja reflexiva, antissimétrica e transitiva.
9. Seja $PESSOAS = \{Jo\tilde{a}o, Maria, Raimundo, Teresa\}$.
- $\{0, 5 \text{ pt}\}$ Liste os pares da relação $R = \{(a, b) \mid a \text{ amava } b\}$ em $PESSOAS$ baseado no texto de Drummond: “João amava Teresa que amava Raimundo que amava Maria.”
 - $\{0, 5 \text{ pt}\}$ A relação R é transitiva? Justifique sua resposta.
 - $\{1, 0 \text{ pt}\}$ Utilize matrizes para calcular o fecho transitivo. Faça uma matriz com linha e coluna representando João, Maria, Raimundo e Teresa (nesta ordem).
 - $\{0, 5 \text{ pt}\}$ Liste os pares que compõem o fecho transitivo.
10. Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Construa as relações R_1, R_2, R_3 e R_4 em A abaixo. “Construir relações” significa definir seus pares. Por exemplo, $R_1 = \{(1, 1), (2, 1)\}$.
- $\{1, 0 \text{ pt}\}$ Construa R_1 , tal que ela seja a **menor** relação reflexiva, antissimétrica e transitiva.
 - $\{0, 5 \text{ pt}\}$ Construa R_2 tal que ela seja reflexiva e simétrica.
 - $\{0, 5 \text{ pt}\}$ Construa R_3 , tal que ela seja igual ao seu fecho simétrico.
 - $\{0, 5 \text{ pt}\}$ Construa R_4 , tal que ela seja assimétrica.
11. $\{2, 0 \text{ pt}\}$ Seja $A = \{1, 2, 3\}$. Seja $R = \{(1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1)\}$. Calcule o fecho transitivo utilizando matrizes. Faça uma matriz com linha e coluna representando os elementos 1, 2 e 3 (nesta ordem).

12. Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Sejam $R_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$, $R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ e $R_3 = \{(3, 1), (4, 4)\}$ relações em A . Defina que propriedades as relações abaixo possuem: reflexividade, simetria, transitividade, antissimetria, ou qualquer combinação destas. Por exemplo, “reflexividade, antissimetria e transitividade” é uma possível resposta.
- $\{0, 5 \text{ pt}\}$ Fecho simétrico de $(R_2 \cup R_3)$
 - $\{0, 5 \text{ pt}\}$ $R_1 \circ R_2$
 - $\{0, 5 \text{ pt}\}$ $R_1 \cup R_2 \cup R_3$
 - $\{0, 5 \text{ pt}\}$ Fecho reflexivo de R_2
 - $\{0, 5 \text{ pt}\}$ $R_1 - R_2$
13. Seja $A = \{\text{Bicicleta}, \text{Fusca}, \text{Ferrari}\}$.
Seja $R = \{(x, y) \in A^2 \mid x \text{ é mais rápido que } y\}$.
- $\{0, 75 \text{ pt}\}$ Descreva os pares (x, y) que pertençam a R .
 - $\{0, 75 \text{ pt}\}$ Das propriedades reflexividade, simetria, antissimetria e transitividade, quais destas R possui?
 - $\{1, 5 \text{ pt}\}$ Calcule o fecho transitivo utilizando matrizes. Faça uma matriz com linha e coluna representando os elementos Bicicleta, Fusca e Ferrari (nesta ordem).
14. $\{2, 0 \text{ pt}\}$ Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3)\}$ uma relação em A . Calcule a matriz \mathbf{M}_{R^*} que representa o fecho transitivo de R .
15. Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
- $\{0, 5 \text{ pt}\}$ Defina uma relação em A que seja simultaneamente reflexiva e antissimétrica.
 - $\{0, 5 \text{ pt}\}$ Defina uma relação em A que seja simultaneamente simétrica e antissimétrica.
 - $\{0, 5 \text{ pt}\}$ Defina o fecho reflexivo da relação definida na letra b).
 - $\{0, 5 \text{ pt}\}$ Defina uma relação em A que seja igual ao seu fecho simétrico.
16. Seja $CLUBE$ o conjunto dos clubes de futebol do Brasil. Seja $DATA$ o conjunto das datas (por exemplo, $21/03/1932 \in DATA$). E sejam $GANHOU$ e $EMPATOU$ relações que armazenam os resultados dos jogos disputados em uma certa data.
- $$GANHOU = \{(a, b, c) \in CLUBE \times CLUBE \times DATA \mid a \text{ ganhou de } b \text{ no dia } c\}$$
- $$EMPATOU = \{(a, b, c) \in CLUBE \times CLUBE \times DATA \mid (a \text{ jogou em casa}) \wedge (a \text{ empatou com } b \text{ no dia } c)\}.$$
- $\{0, 50 \text{ pt}\}$ Defina uma expressão matemática que calcule o percentual de vitórias do Náutico em relação ao total de jogos disputados pelo Náutico.
Dica: Exemplo de uma expressão matemática que calcula o número de vitórias do Santa: $|\{(a, b, c) \in GANHOU \mid a = \text{Santa}\}|$, onde $|A|$ calcula o tamanho do conjunto A .

- b) {0, 50 pt} Se uma vitória vale 3 pontos, um empate vale 1 ponto e uma derrota vale 0 ponto, defina uma expressão que calcule o número de pontos ganhos pelo Sport.
17. Seja *PESSOAS* o conjunto das pessoas que sabem seu próprio CPF decorado. Seja $R = \{(a, b) \in \text{PESSOAS}^2 \mid a \text{ sabe o CPF de } b\}$.
- a) {0, 2 pt} R é reflexiva? Justifique sua resposta em, no máximo, 2 linhas.
- b) {0, 2 pt} R é simétrica? Justifique sua resposta em, no máximo, 2 linhas.
- c) {0, 2 pt} R é antissimetria? Justifique sua resposta em, no máximo, 2 linhas.
- d) {0, 2 pt} R é transitiva? Justifique sua resposta em, no máximo, 2 linhas.
18. {2, 0 pt} Seja R uma relação em $A = \{a, b, c, d\}$ dada por
- $$R = \{(a, c), (b, c), (c, b), (c, d), (d, c)\}.$$
- Utilize matrizes para calcular o fecho transitivo de R .
19. Seja *LIVROS* o conjunto de todos os livros do planeta.
- a) {0, 85 pt} A relação $R_1 = \{(a, b) \in \text{LIVROS}^2 \mid a \text{ menciona } b\}$ é transitiva? Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas.
- b) {0, 85 pt} A relação $R_2 = \{(a, b) \in \text{LIVROS}^2 \mid a \text{ é mais vendido que } b\}$ é reflexiva? Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas.
- c) {0, 85 pt} A relação $R_3 = \{(a, b) \in \text{LIVROS}^2 \mid a \text{ é a tradução de } b \text{ em outra língua}\}$ é simétrica? Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas.
- d) {0, 85 pt} A relação R_3 da letra c) é antissimétrica? Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas.
20. Seja *PESSOAS* o conjunto das pessoas.
Seja $TWITTER = \{(a, b) \in \text{PESSOAS} \times \text{PESSOAS} \mid a \text{ segue } b \text{ no Twitter}\}$ uma relação em *PESSOAS*.
- a) {0, 50 pt} Defina uma expressão matemática que calcula quantas pessoas seguem tanto Luciano Huck quanto William Bonner no Twitter.
Dica: Exemplo de uma expressão matemática que calcula quantas pessoas seguem apenas Luciano Huck: $|\{a \mid (a, \text{Luciano Huck}) \in TWITTER\}|$, onde $|A|$ calcula o tamanho do conjunto A .
- b1) {0, 50 pt} Defina uma expressão matemática que calcula quantas pessoas seguem e são seguidas por Luciano Huck.
- b2) {0, 2 pt} $TWITTER$ é reflexiva? Justifique sua resposta em, no máximo, 2 linhas.
- c) {0, 2 pt} $TWITTER$ é simétrica? Justifique sua resposta em, no máximo, 2 linhas.
- d) {0, 2 pt} $TWITTER$ é antissimetria? Justifique sua resposta em, no máximo, 2 linhas.

e) {0, 2 pt} *TWITTER* é transitiva? Justifique sua resposta em, no máximo, 2 linhas.

21. {2, 0 pt} Seja R uma relação em $A = \{a, b, c, d\}$ dada por

$$R = \{(a, c), (b, a), (c, b), (c, d), (d, a)\}.$$

Utilize matrizes para calcular o fecho transitivo de R .

22. Seja *PESSOAS* o conjunto de todas as pessoas do planeta.

a) {0, 85 pt} A relação $R_1 = \{(a, b) \in \text{PESSOAS}^2 \mid a \text{ odeia } b\}$ é transitiva? Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas.

b) {0, 85 pt} A relação $R_2 = \{(a, b) \in \text{PESSOAS}^2 \mid a \text{ ama } b\}$ é antissimétrica? Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas.

c) {0, 85 pt} A relação R_2 da letra b) é simétrica? Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas.

d) {0, 85 pt} A relação $R_3 = \{(a, b) \in \text{PESSOAS}^2 \mid a \text{ vai matar } b\}$ é reflexiva? Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas.

23. Seja $A = \{a, b, c\}$.

a) {0, 50 pt} Classifique a relação $R = \{(a, a), (b, b), (a, b)\}$ em A como reflexiva, simétrica, antissimétrica ou transitiva (ou uma combinação delas). Exemplo de resposta: reflexiva, simétrica e transitiva.

b) {0, 50 pt} Defina uma relação em A que seja simétrica e antissimétrica ao mesmo tempo. “Definir uma relação” significa listar seus pares. Por exemplo, $\{(a, b), (b, c)\}$.

c) {0, 50 pt} Defina o fecho reflexivo de $R = \{(a, a), (b, b), (a, b)\}$, onde R é uma relação em A .

d) {0, 50 pt} Use matrizes para calcular o fecho transitivo da relação em A $S = \{(a, c), (b, a), (c, b)\}$. Exiba seus cálculos.

24. Seja *PESSOAS* o conjunto de todas as pessoas do planeta. Seja R uma relação em *PESSOAS* definida como

$$R = \{(a, b) \in \text{PESSOAS}^2 \mid a \text{ tem altura menor ou igual a } b\}.$$

a) {0, 85 pt} R é antissimétrica? Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas.

b) {0, 85 pt} Crie uma relação S em *PESSOAS*, diferente de R , que seja transitiva. Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas.

25. Seja $A = \{a, b, c\}$.

a) {0, 50 pt} Defina uma relação em A que seja reflexiva. “Definir uma relação” significa listar seus pares. Por exemplo, $\{(a, b), (b, c)\}$.

b) {0, 50 pt} Defina uma relação em A que seja antissimétrica.

c) {0, 50 pt} Defina o fecho simétrico da relação em A , $R_1 = \{(a, b), (b, c)\}$.

- d) $\{0, 50 \text{ pt}\}$ Use matrizes para calcular o fecho transitivo da relação em A , $R_2 = \{(a, b), (b, c), (c, a)\}$. Exiba seus cálculos.
26. Seja $PESSOAS$ o conjunto de todas as pessoas do planeta.
- a) $\{0, 85 \text{ pt}\}$ A relação $R_1 = \{(a, b) \in PESSOAS^2 \mid a \text{ ganha mais dinheiro que } b\}$ é transitiva? Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas.
- b) $\{0, 85 \text{ pt}\}$ A relação $R_2 = \{(a, b) \in PESSOAS^2 \mid a \text{ sabe o nome de } b\}$ é antissimétrica? Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas.
27. Seja S o conjunto das partes de $\{1, 2, 3\}$.
- a) $\{1, 0 \text{ pt}\}$ Seja $R = \{(a, b) \in S \times S \mid a \subseteq b\}$. Qual a matriz zero-um desta relação? Obs. S é o conjunto definido lá em cima no enunciado da questão.
- b) $\{1, 0 \text{ pt}\}$ Classifique a relação R da letra c) como reflexiva, simétrica, antissimétrica, transitiva ou uma combinação delas.
28. $\{3, 3\}$ Seja $A = \{a, b, c\}$. Calcule o fecho transitivo da relação em A
- $$R = \{(b, a), (c, b), (a, c)\}$$
- utilizando matrizes zero-um.
29. $\{3, 3 \text{ pt}\}$ Seja $A = \{a, b, c\}$. Calcule o fecho transitivo da relação em A
- $$R = \{(a, b), (b, c), (c, a)\}$$
- utilizando matrizes zero-um.
30. $\{1, 0 \text{ pt}\}$ Seja P o conjunto contendo todas as pessoas do mundo. Seja $R = \{(a, b) \in P \times P \mid a \text{ sabe o nome de } b\}$. Dentre reflexividade, simetria, antissimetria e transitividade, quais destas propriedades R possui? Justifique sua resposta.
31. $\{0, 5 \text{ pt}\}$ Seja A o conjunto com todos os habitantes do planeta. Seja a relação $R = \{(x, y) \mid ((x, y) \in A^2) \wedge (x \text{ deve dinheiro a } y)\}$. Justifique se R é ou não simétrica, antissimétrica ou transitiva. Justifique em no máximo 4 linhas para cada propriedade.
32. $\{0, 5 \text{ pt}\}$ Seja A o conjunto com todos os habitantes do planeta. Invente uma relação S de A para A que seja simultaneamente simétrica e antissimétrica. Justifique sua resposta em, no máximo, 4 linhas.
33. $\{2, 0 \text{ pt}\}$ Seja $A = \{a, b, c\}$.
Utilize matrizes para calcular o fecho transitivo de $R = \{(a, b), (b, c), (c, a)\}$.
34. $\{3, 4 \text{ pt}\}$ Seja a relação R definida de forma recursiva abaixo.
Passo base. O par $(Neymar, Hulk) \in R$.
Passo recursivo. Se $(x, y) \in R$ e y é amigo de z , então $(x, z) \in R$.
Regra da exclusão. Todos elementos de S são provenientes do passo base e passo recursivo.
Justifique se R é ou não simétrico, antissimétrico e transitivo. Justifique sua resposta em, no máximo, 4 linhas para cada propriedade.

35. $\{1, 0 \text{ pt}\}$ Seja A o conjunto com todos os habitantes do planeta que trabalham para apenas 1 empresa (ou seja, todos as pessoas que têm exatamente 1 emprego — mas não necessariamente na mesma empresa). Seja a relação $R = \{(x, y) \mid ((x, y) \in A^2) \wedge (x \text{ trabalha com } y)\}$. Justifique se R é ou não simétrico, antissimétrico e transitivo. Justifique sua resposta em, no máximo, 4 linhas para cada propriedade.
36. $\{2, 0 \text{ pt}\}$ Seja $A = \{a, b, c\}$.
Utilize matrizes para calcular o fecho transitivo de $R = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\}$. O fecho transitivo é igual ao fecho reflexivo neste caso?
37. $\{3, 4 \text{ pt}\}$ Seja A o conjunto com todos os habitantes do planeta. Seja a relação $R = \{(x, y) \mid ((x, y) \in A^2) \wedge (x \text{ se considera amigo de } y \text{ e de todos os amigos de } y)\}$. Justifique se R é ou não reflexivo, simétrico e antissimétrico. Justifique sua resposta em, no máximo, 4 linhas para cada propriedade.

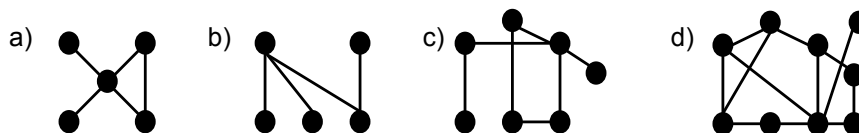
6 Contagem

- $\{1, 0 \text{ pt}\}$ No Big Brother temos 15 competidores. A cada semana, 1 competidor é eliminado. Suponha que o resultado do Big Brother seja divulgado em forma de uma tupla de 15 posições: $(competidor_1, competitor_2, \dots, competitor_{15})$, onde $competidor_1$ foi o primeiro eliminado, $competidor_2$ foi o segundo eliminado e $competidor_{15}$ foi o último eliminado (no caso, $competidor_{15}$ ganhou o Big Brother). Quantas formas possíveis de resultados podem existir? Exiba seus cálculos e explique o raciocínio utilizado em no máximo 5 linhas. Não precisa simplificar seu cálculo ao máximo. Pode responder apenas com uma expressão. Por exemplo: “Resposta: $23^{540} + 50 \cdot (1000^2 + 40)$. Explicação: ...”.
- $\{1, 0 \text{ pt}\}$ Temos 2000 candidatos para 30 vagas no vestibular de Engenharia da Computação. Calcule o n inteiro tal que, pelo Princípio da Casa dos Pombos, pelo menos uma vaga será disputada por pelo menos n candidatos. Exiba seus cálculos e explique em no máximo 5 linhas quem faz o papel da casa dos pombos e quem faz o papel dos pombos.
- $\{1, 0 \text{ pt}\}$ No Big Brother temos 15 competidores. A casa do Big Brother tem 4 quartos. Calcule o n inteiro tal que, pelo Princípio da Casa dos Pombos, pelo menos um quarto será ocupado pelo menos n competidores. Exiba seus cálculos e explique em no máximo 5 linhas quem faz o papel da casa dos pombos e quem faz o papel dos pombos.
- $\{1, 0 \text{ pt}\}$ Temos 2000 candidatos a vagas para o vestibular de Sistemas de Informação. De quantas formas possíveis podemos gerar um listão dos classificados? Assuma que o listão contém todos os 2000 candidatos em ordem de classificação. Assuma que nenhum candidato empatou com nenhum outro. Exiba seus cálculos e explique o raciocínio utilizado em no máximo 5 linhas. Não precisa simplificar seu cálculo ao máximo. Pode responder apenas com uma expressão. Por exemplo: “Resposta: $23^{540} + 50 \cdot (1000^2 + 40)$. Explicação: ...”.

5. $\{0, 5 \text{ pt}\}$ Suponha que temos um baralho empilhado aleatoriamente. Suponha que retiramos uma carta do baralho de cada vez. Use o Princípio da Casa de Pombos para calcular quantas cartas de baralho devemos retirar para obtermos pelo menos 5 cartas do mesmo naipe. Exiba seus cálculos e diga quem faz o papel da casa de pombos e quem faz o papel dos pombos.
6. $\{0, 5 \text{ pt}\}$ Uma loja tem camisas brancas e azuis. Cada camisa vem nos tamanhos P, M e G, e podem ser masculinas ou femininas. Quantos tipos de camisa diferentes existem na loja? Exiba seus cálculos e explique seu raciocínio.
7. $\{1, 0 \text{ pt}\}$ Um hotel tem 400 quartos. Quantos hóspedes são necessários para que pelo menos 1 quarto possua pelo menos 5 hóspedes? Use o Princípio da Casa de Pombos para responder e exiba seus cálculos.
8. Seja $S = \{a, b, c, d\}$ e $T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
 - a) $\{0, 5 \text{ pt}\}$ Quantas funções injetivas existem com domínio S e contradomínio T ? Exiba seus cálculos.
 - b) $\{0, 5 \text{ pt}\}$ Quantas funções injetivas existem com domínio T e contradomínio S ? Exiba seus cálculos.
9. $\{1, 0 \text{ pt}\}$ Uma sacola contém 50 bolas de gude. Algumas são azuis, outras são vermelhas, outras são verdes e outras são amarelas. Use o Princípio da Casa de Pombos para mostrar que existem ao menos 13 bolas de gude da mesma cor. Diga quem faz o papel da casa de pombos e quem faz o papel dos pombos.
10. Seja $S = \{a, b, c\}$ e $T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
 - a) $\{1, 6 \text{ pt}\}$ Quantas funções injetivas existem com domínio S e contradomínio T ? Exiba seus cálculos.
 - b) $\{1, 7 \text{ pt}\}$ Quantas funções injetivas existem com domínio T e contradomínio S ? Exiba seus cálculos.

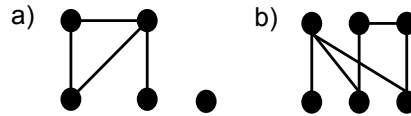
7 Grafos

1. $\{2 \text{ pt}\}$ Use o teorema das cores para definir se os grafos abaixo são bipartidos. Caso não tenha lápis/caneta colorido: coloque um quadrado ao redor de um vértice para representar azul e um triângulo para representar vermelho.

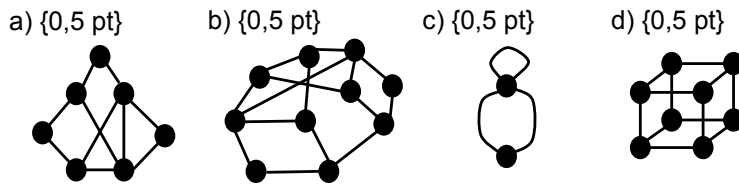


2. Seja $G = (V, A)$ um grafo não dirigido. Seja $V = \{a, b, c, d, e, f\}$. Sejam $\deg(a) = \deg(d) = 0$, $\deg(b) = 3$, $\deg(c) = \deg(e) = 2$, $\deg(f) = 5$.
 - a) $\{1 \text{ pt}\}$ Quantas arestas este grafo possui?
 - b) $\{1 \text{ pt}\}$ Desenhe o grafo (lembre-se que pode haver laços).

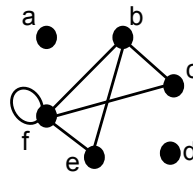
3. {1 pt} Remova exatamente 1 aresta ou adicione exatamente 1 aresta (ou ambos) de cada grafo abaixo de forma a transformá-los em árvore. Desenhe a árvore resultante da remoção/adição.



4. Utilize o teorema das cores e defina se os grafos abaixo são bipartidos ou não (exiba os desenhos pintados).



5. {1,0 pt} Desenhe um grafo não dirigido cuja soma dos graus de todos seus vértices seja 10.
6. {1,0 pt} Desenhe um sub-grafo do grafo abaixo que seja bipartido.



7. Suponha um grafo cujos nós são maratonistas e cuja aresta que liga a a b indica que a ganhou de b em exatamente uma maratona específica do passado. Por exemplo, se *Fulano* ganhou de *Sicrano* na maratona do Rio de 2009, então teremos uma aresta ligando *Fulano* a *Sicrano*.

- a) {0,50 pt} Este grafo é dirigido ou não-dirigido? Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas.
- b) {0,50 pt} O que arestas paralelas representam neste grafo? Explique em no máximo 3 linhas.
- c) {0,50 pt} Este grafo tem laços? Explique em no máximo 3 linhas.
- d) {0,50 pt} O que o grau de um nó mede para este grafo? Explique sua resposta em no máximo 3 linhas.

8. Suponha um grafo cujos nós são atores ou atrizes e cujas arestas ligam dois atores ou atrizes que atuaram juntos em um mesmo filme.

- a) {0,50 pt} Este grafo é dirigido ou não-dirigido? Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas.
- b) {0,50 pt} O que arestas paralelas representam neste grafo? Explique em no máximo 3 linhas.

- c) {0, 50 pt} Este grafo tem laços? Explique em no máximo 3 linhas.
- d) {0, 50 pt} Um nó deste grafo tem grau 1230. O que isto quer dizer? Explique sua resposta em no máximo 3 linhas.
9. Um grafo D , cujos vértices são deputados, conecta 2 deputados A e B se A e B compartilham um segredo.
- a) {0, 50 pt} O grafo D é direcionado ou não-direcionado? Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas.
- b) {0, 50 pt} Suponha que o grafo D seja do tipo K_n . O que isto significa? Explique em no máximo 3 linhas.
- c) {0, 50 pt} Suponha que o grafo D seja bipartido, onde uma partição (um “time”) é composta pelos deputados da oposição e a outra partição (o outro “time”) é composta pelos deputados da situação. Quem compartilha segredos com quem? Quem **não** compartilha segredos com quem? Explique em no máximo 3 linhas.
- d) {0, 50 pt} Suponha que um subgrafo de D seja um C_3 . O que este grafo significa? Explique em no máximo 3 linhas.
10. {1, 0 pt} Seja o grafo $G = (V, A)$, onde $V = P(\{1, 2\})$ (lembre-se: $P(A)$ é o conjunto das partes de A) e $A = \{\{x, y\} \mid x \subset y\}$. Desenhe G .
11. Seja o grafo $G = (V, A)$, onde
- $$V = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$
- $$A = \{\{a, b\} \mid |a| = |b| + 1\}$$
- onde $|X|$ é o tamanho do conjunto X .
- c) {0, 85 pt} Desenhe G .
- d) {0, 85 pt} Use o teorema das cores e diga se o grafo G é bipartido ou não.
12. Seja o grafo $G = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}\})$.
- a) {0, 50 pt} Use o teorema das cores para definir se G é bipartido ou não.
- b) {0, 50 pt} G é de que tipo: K_4 , C_4 , W_4 ou Q_4 ?
- c) {0, 50 pt} Desenhe o grafo $(H \cup G)$, onde H é o grafo $H = (\{a, b, c, d, e\}, \{\{a, e\}, \{b, e\}, \{c, e\}, \{d, e\}\})$.
- d) {0, 50 pt} $(H \cup G)$ é de que tipo: K_4 , C_4 , W_4 ou Q_4 ?
13. {0, 85 pt} Seja $G = (\{1, 2, 3, 4\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 2\}\})$. Desenhe um subgrafo de G que seja bipartido.
14. Seja S o conjunto das partes de $\{1, 2, 3\}$.
- a) {1, 0 pt} Desenhe um grafo direcionado cujos vértices são elementos de S e onde cada aresta (u, v) conecta os vértices u e v sempre que

$$(u \subset v) \wedge (|v| = (|u|+1)).$$

Lembre-se: $|u|$ e $|v|$ calcula o tamanho dos conjuntos u e v , respectivamente.

- b)** {1, 0 pt} Qual a soma dos graus de saída dos vértices do grafo da letra **a**)?
15. Suponha um grafo cujos vértices são as 26 letras do alfabeto e cujas arestas (v_1, v_2) ligam duas letras v_1 e v_2 tal que v_1 precede imediatamente v_2 na ordem alfabética. Exemplo: “a” precede “b” imediatamente na ordem alfabética, mas “a” não precede “c” imediatamente na ordem alfabética.
- a)** {1, 0 pt} Este grafo é dirigido ou não-dirigido? Justifique sua resposta em no máximo 3 linhas.
- b)** {1, 0 pt} Qual a soma dos graus de saída deste grafo?
16. {2, 0 pt} Seja $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$. E seja $A = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 7\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}, \{5, 8\}, \{7, 9\}, \{6, 10\}, \{8, 11\}, \{9, 12\}, \{10, 12\}, \{10, 13\}, \{11, 13\}, \{12, 14\}, \{13, 15\}, \{14, 16\}, \{15, 16\}\}$. Desenhe o grafo $G = (V, A)$. Diga se G é bipartido ou não usando o teorema das cores.
17. {2, 0 pt} Seja
- $$V = \{ \text{Alemanha, Argélia, Argentina, Bélgica, Brasil, Chile, Colômbia, Costa Rica, EUA, França, Grécia, Holanda, México, Nigéria, Suíça, Uruguai} \}$$

Seja $A = \{(x, y) \mid ((x, y) \in V^2) \wedge (x \text{ perdeu para } y)\}$.

Desenhe o grafo $G = (V, A)$ sabendo que:

Chile perdeu para o Brasil, Uruguai perdeu para a Colômbia, Nigéria perdeu para a França, Argélia perdeu para a Alemanha, México perdeu para a Holanda, Grécia perdeu para a Costa Rica, Suíça perdeu para a Argentina, USA perdeu para a Bélgica, Colômbia perdeu para o Brasil, França perdeu para a Alemanha, Costa Rica perdeu para a Holanda, Bélgica perdeu para a Alemanha, Brasil perdeu para a Alemanha, Holanda perdeu para a Argentina e Argentina perdeu para a Alemanha (ignore a disputa pelo terceiro lugar).

8 Conversão Binário-Decimal

- Converta os números abaixo para binário. Exiba seus cálculos.
 - {0, 50 pt} 5
 - {0, 50 pt} 10
 - {0, 50 pt} 20
 - {0, 50 pt} 37
- {0, 85 pt} Converta 45 em binário. Exiba seus cálculos.

$$\begin{aligned} \top &\equiv \neg\text{F} & (1) \\ \neg\top &\equiv \text{F} & (2) \\ p \wedge \top &\equiv p & (3) \\ p \vee \text{F} &\equiv p & (4) \\ p \vee \top &\equiv \top & (5) \\ p \wedge \text{F} &\equiv \text{F} & (6) \\ p \vee p &\equiv p & (7) \\ p \wedge p &\equiv p & (8) \\ \neg(\neg p) &\equiv p & (9) \\ p \vee q &\equiv q \vee p & (10) \\ p \wedge q &\equiv q \wedge p & (11) \\ (p \vee q) \vee r &\equiv p \vee (q \vee r) & (12) \\ (p \wedge q) \wedge r &\equiv p \wedge (q \wedge r) & (13) \\ p \vee (q \wedge r) &\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) & (14) \\ p \wedge (q \vee r) &\equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) & (15) \\ \neg(p \wedge q) &\equiv \neg p \vee \neg q & (16) \\ \neg(p \vee q) &\equiv \neg p \wedge \neg q & (17) \\ p \vee (p \wedge q) &\equiv p & (18) \\ p \wedge (p \vee q) &\equiv p & (19) \\ p \vee \neg p &\equiv \top & (20) \\ p \wedge \neg p &\equiv \text{F} & (21) \\ p \rightarrow q &\equiv \neg p \vee q & (22) \\ p \rightarrow q &\equiv \neg q \rightarrow \neg p & (23) \\ p \vee q &\equiv \neg p \rightarrow q & (24) \\ p \wedge q &\equiv \neg(p \rightarrow \neg q) & (25) \\ \neg(p \rightarrow q) &\equiv p \wedge \neg q & (26) \\ (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) &\equiv p \rightarrow (q \wedge r) & (27) \\ (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) &\equiv (p \vee q) \rightarrow r & (28) \\ (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) &\equiv p \rightarrow (q \vee r) & (29) \\ (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) &\equiv (p \wedge q) \rightarrow r & (30) \\ p \leftrightarrow q &\equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) & (31) \\ p \leftrightarrow q &\equiv \neg p \leftrightarrow \neg q & (32) \\ p \leftrightarrow q &\equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) & (33) \\ \neg(p \leftrightarrow q) &\equiv p \leftrightarrow \neg q & (34) \\ \neg\exists x P(x) &\equiv \forall x \neg P(x) & (35) \\ \neg\forall x P(x) &\equiv \exists x \neg P(x) & (36) \\ \frac{p}{p \rightarrow q} & & (37) \\ \therefore q & & \\ \frac{\neg q}{p \rightarrow q} & & (38) \\ \therefore \neg p & & \\ \frac{p \rightarrow q}{q \rightarrow r} & & (39) \\ \therefore p \rightarrow r & & \\ \frac{p \vee q}{\neg p} & \quad \frac{p \vee q}{\neg q} & (40) \\ \therefore q & \quad \therefore p & \\ \frac{p}{\therefore p \vee q} & \quad \frac{p}{\therefore q \vee p} & (41) \end{aligned}$$

$$\frac{p \wedge q}{\therefore p} \quad \frac{p \wedge q}{\therefore q} \quad (42)$$

$$\frac{p}{q} \quad (43)$$

$$\therefore p \wedge q$$

$$\frac{p \rightarrow q}{\therefore \neg q \rightarrow \neg p} \quad (44)$$

$$\frac{p \vee q}{\neg p \vee r} \quad (45)$$

$$\therefore q \vee r$$

$$a \notin A \equiv \neg(a \in A) \quad (46)$$

$$\{x \mid x \in A\} = A \quad (47)$$

$$P(a) \equiv a \in \{x \mid P(x)\} \quad (48)$$

$$(A = B) \equiv \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \quad (49)$$

$$(A \subseteq B) \equiv \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \quad (50)$$

$$(A \subset B) \equiv \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \exists x(x \in B \wedge x \notin A) \quad (51)$$

$$\emptyset \subseteq S, \text{ para todo } S \quad (52)$$

$$\emptyset = \{x \mid \text{F}\} \quad (53)$$

$$x \in \emptyset \equiv \text{F} \quad (54)$$

$$S \subseteq S, \text{ para todo } S \quad (55)$$

$$(A \times \emptyset) = (\emptyset \times A) = \emptyset \quad (56)$$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\} \quad (57)$$

$$(x \in A \vee x \in B) \equiv (x \in (A \cup B)) \quad (58)$$

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\} \quad (59)$$

$$(x \in A \wedge x \in B) \equiv (x \in (A \cap B)) \quad (60)$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad (61)$$

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} \quad (62)$$

$$(x \in A \wedge x \notin B) \equiv (x \in (A - B)) \quad (63)$$

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\} \quad (64)$$

$$(x \notin A) \equiv (x \in \overline{A}) \quad (65)$$

$$A \cup \emptyset = A \quad (66)$$

$$A \cap U = A \quad (67)$$

$$A \cup U = U \quad (68)$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset \quad (69)$$

$$A \cup A = A \quad (70)$$

$$A \cap A = A \quad (71)$$

$$\overline{(\overline{A})} = A \quad (72)$$

$$A \cup B = B \cup A \quad (73)$$

$$A \cap B = B \cap A \quad (74)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \quad (75)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C \quad (76)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (77)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (78)$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad (79)$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad (80)$$

$$A \cup (A \cap B) = A \quad (81)$$

$$A \cap (A \cup B) = A \quad (82)$$

$$A \cup \overline{A} = U \quad (83)$$

$$A \cap \overline{A} = \emptyset \quad (84)$$