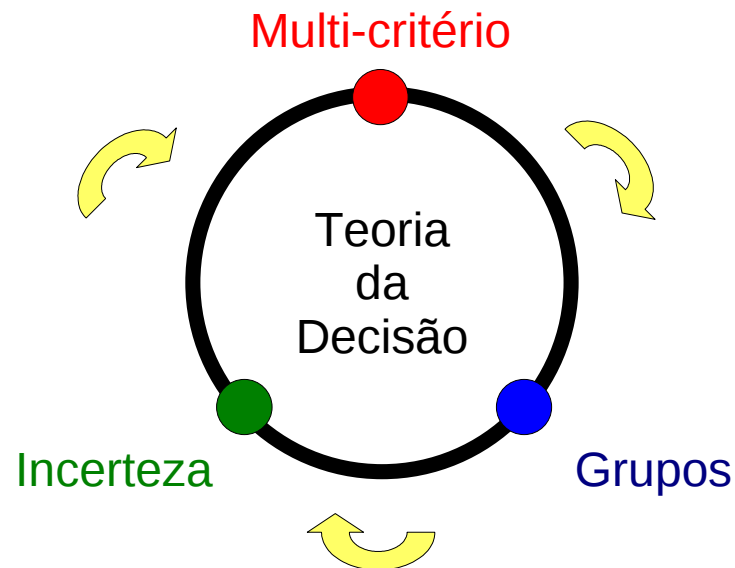


Teoria da Decisão

- Abordagem científica para o suporte à decisão
 - Modelos formais de representação de preferências
 - Aplicações em
 - Suporte à decisão
 - Pesquisa operacional
 - Inteligência artificial



Vantagens do uso de modelos formais

- Clareza a respeito do que é considerado na avaliação de alternativas/ações
- Facilita a comunicação entre os atores de um processo decisório (linguagem bem definida)
- Permite a identificação de fraquezas no modelo, facilitando críticas e assim melhorias
- Permite o estudo das propriedades matemáticas dos métodos utilizados
- Facilita a automatização dos procedimentos e a explicação das decisões

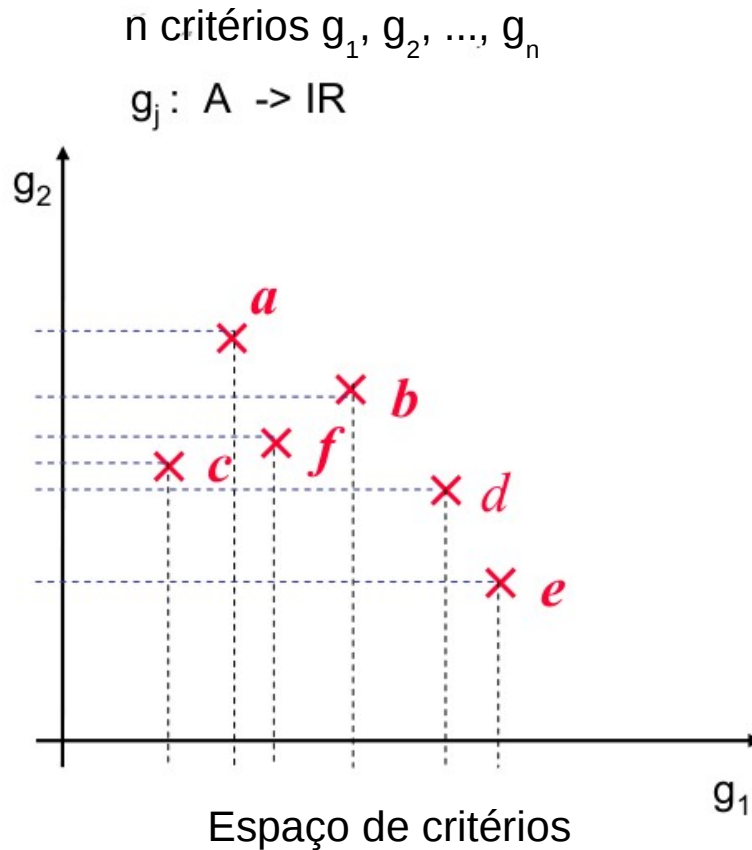
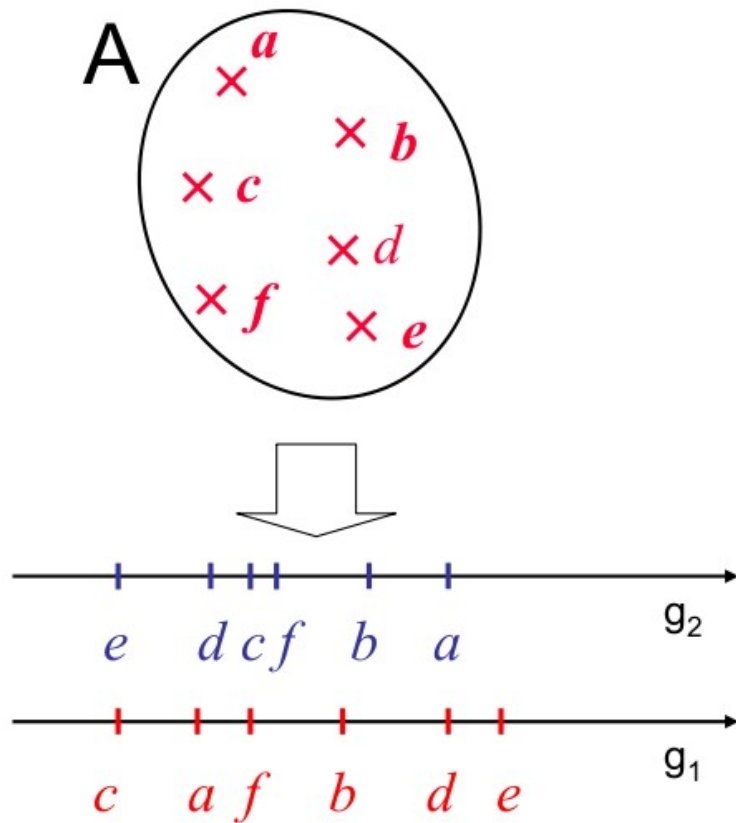
Relações de preferência

- $a \geq b$ (a é preferível ou indiferente a b)
- $a \sim b$ (a é indiferente a b)
- $a > b$ (a é preferível – estritamente – a b)
- Funções de utilidade
 - Se \geq é uma pré-ordem (reflexiva, transitiva) completa, então existe uma função $u : A \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que:
 - $a \geq b \Leftrightarrow u(a) \geq u(b)$

1. Introdução à análise multicritério

Critérios

- Eixos de avaliação das alternativas
- Expressam a satisfação em relação a diferentes aspectos



Objetivos da Análise Multicritério

- Propor metodologias e ferramentas para
 - Ajudar a estruturar problemas de decisão e de avaliação, levando em conta a totalidade dos pontos de vista pertinentes
 - Elicitar e modelizar as preferências
 - Agregar as preferências
 - Efetuar a escolha da melhor alternativa, ou ordenar as alternativas segundo múltiplos critérios

Objetivos da Análise Multicritério

- Propor metodologias e ferramentas para
 - Ajudar a estruturar problemas de decisão e de avaliação, levando em conta a totalidade dos pontos de vista pertinentes
 - Elicitar e modelizar as preferências
 - Agregar as preferências
 - Efetuar a escolha da melhor alternativa, ou ordenar as alternativas segundo múltiplos critérios

Suporte à decisão

Decisão automática

Normalmente não se trata apenas de minimizar um custo!

Exemplo: Seleção de projetos

	Return	Development	Risk level	Economic Context	Term
	↑	↑	↓	↑	↓
a	14%	8%	low	good	7 years
b	16%	8%	high	bad	2 years
c	12%	9%	fair	very bad	4 years
d	13%	10%	low	fair	4 years
e	20%	12%	fair	good	10 years

a	14	8	15	14	13	12.8
b	16	8	5	5	18	10.4
c	12	9	10	2	16	9.8
d	13	10	15	10	16	12.8
e	20	12	10	14	10	13.2

Exemplo: Seleção de projetos

	Return	Development	Risk level	Economic Context	Term
	↑	↑	↓	↑	↓
<i>a</i>	14%	8%	low	good	7 years
<i>b</i>	16%	8%	high	bad	2 years
<i>c</i>	12%	9%	fair	very bad	4 years
<i>d</i>	13%	10%	low	fair	4 years
<i>e</i>	20%	12%	fair	good	10 years

e	e	a,d	a,e	b
b	d	c,d	d	c,d
a	c	b	b	a
d	a,b		c	e
c				



Exemplos: decisão coletiva, voto

Escolha coletiva

4 filmes a, b, c, d

Y : $a > b > c > d$

S : $c > b > a > d$

L : $d > c > b > a$

P : $d > b > a > c$

Qual é a melhor opção?

Escrutínio de listas

4 candidatos, n indivíduos

24% : $a > b > c > d$

25% : $c > b > a > d$

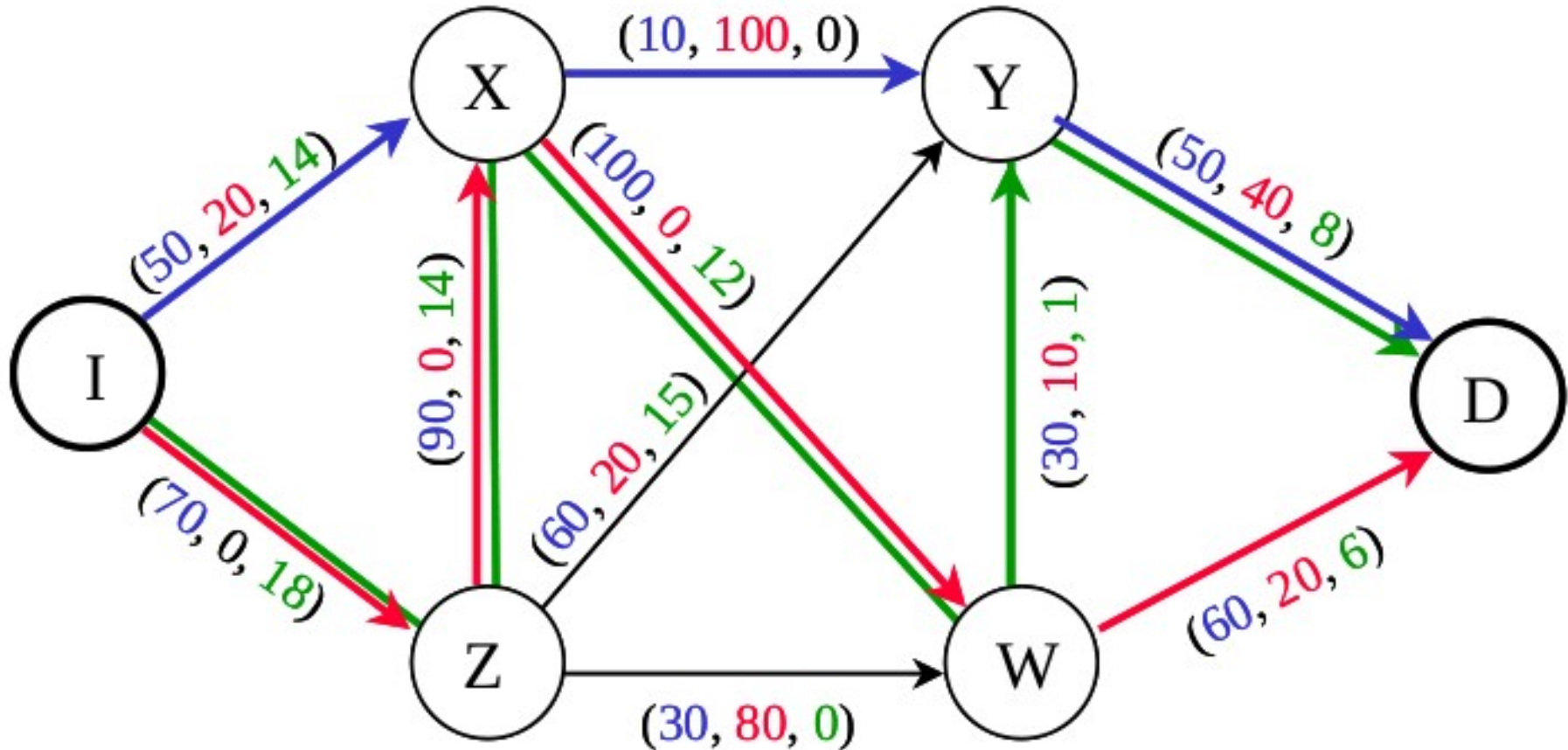
26% : $d > c > b > a$

25% : $d > b > a > c$

Como classificá-los?

Exemplo: Otimização multi-critério de itinerários

(tempo, custo, beleza)

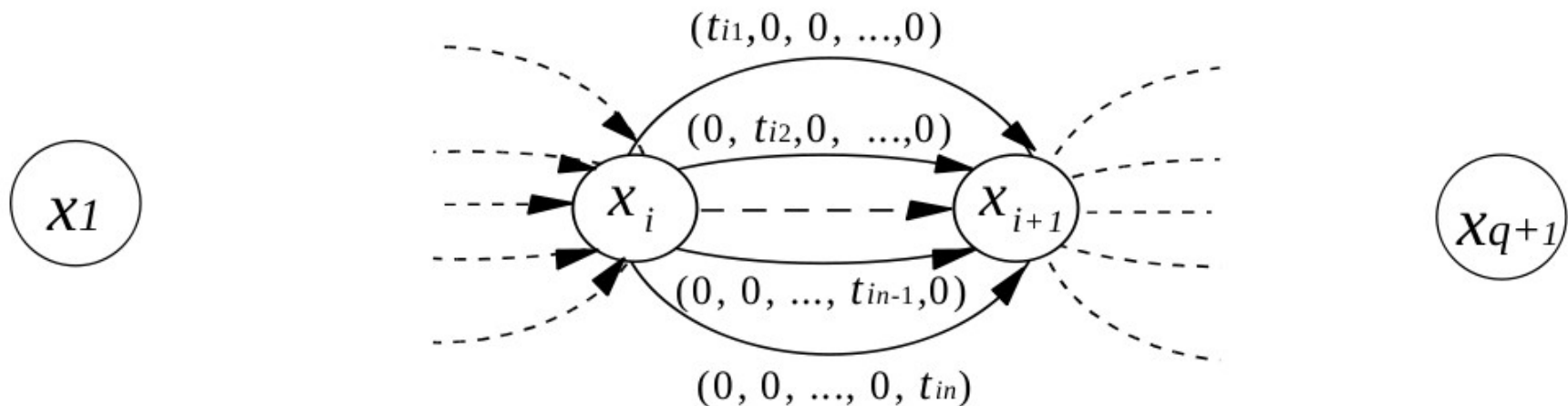


Atenção

- Um problema aparentemente mono-critério pode esconder um outro, que por sua vez é multi-critério
- Exemplos a seguir
 - Otimização robusta (sob incerteza ou risco)
 - 1 critério, múltiplos agentes

Exemplo: planificação/multiagente

- 1 tarefa que se decompõe em q subtarefas independentes
- n agentes capazes de tratar as tarefas em paralelo
- t_{ij} tempo necessário para o agente j tratar a tarefa i
- Como trabalhar de forma ótima
 - $\text{Arg min}_C t(C) = \max \{t_1(C), t_2(C), \dots, t_n(C)\}$



Problemas Multi-critério

- Elementos característicos
 - Um conjunto de alternativas A (ações, soluções, candidatos, projetos), definido em extensão, ou em intensão
 - n funções-critério $f_i : A \rightarrow \mathfrak{R}$ $x = (x_1, \dots, x_n)$
 - Decisão multi-critério: $x_k =$ performance da solução x segundo o critério k
 - Decisão multi-agente: $x_k =$ utilidade da solução x segundo agente k
 - Decisão sob incerteza: $x_k =$ utilidade do ato x no cenário k
 - Problemáticas
 - Escolha da melhor alternativa
 - Lista por ordem decrescente de preferência (k -melhores)
 - Atribuição a categorias pré-definidas

Agregação Multi-critério: 2 abordagens

- AC: agregar e depois comparar
- CA: comparar e depois agregar

Abordagem AC

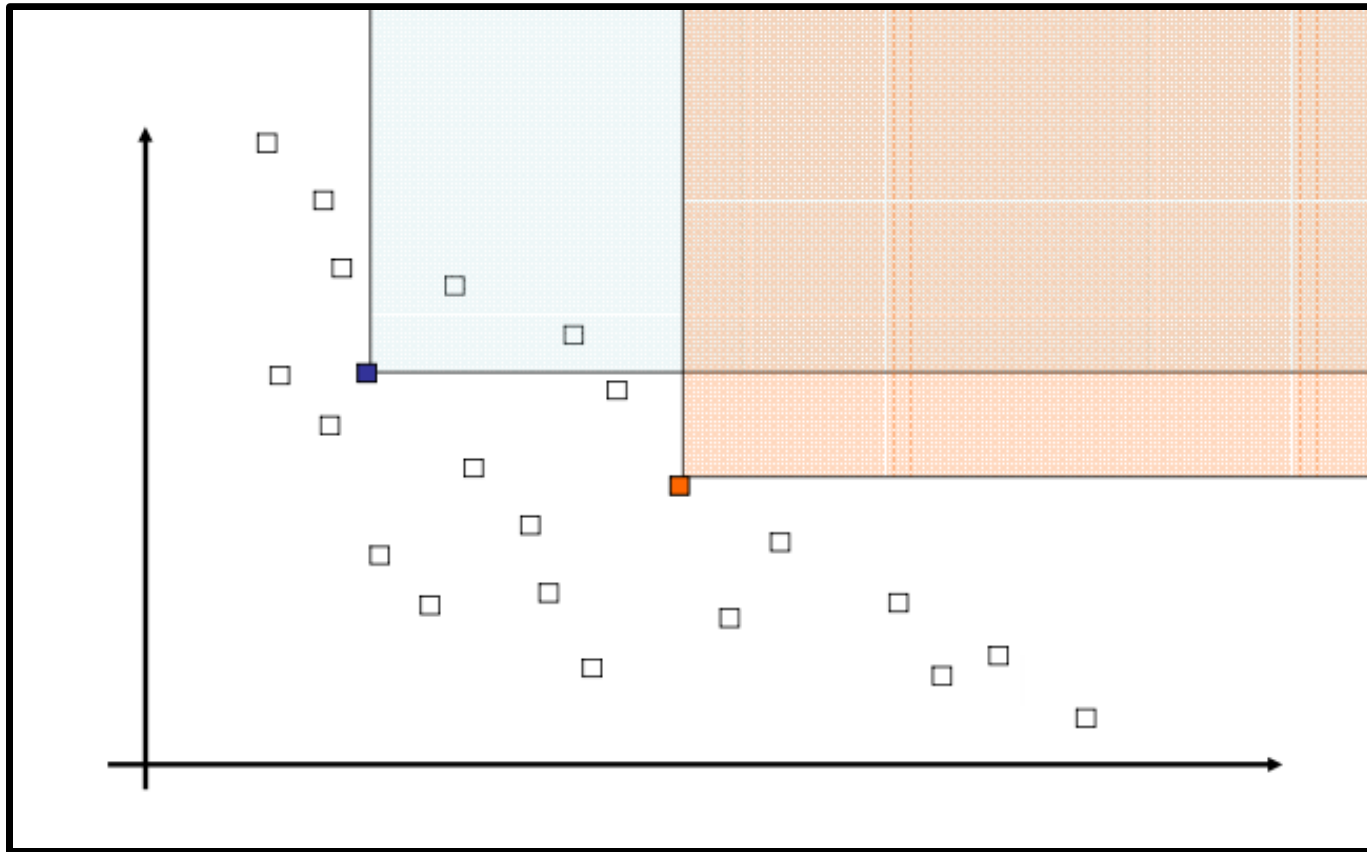
$$\begin{array}{ccc} (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) & \xrightarrow{\psi} & v(a), v(b) \\ \downarrow \phi_j & & \downarrow \phi \\ \phi_1(a_1, b_1), \dots, \phi_n(a_n, b_n) & \xrightarrow{\psi} & \succsim(a, b) \end{array}$$

Abordagem CA

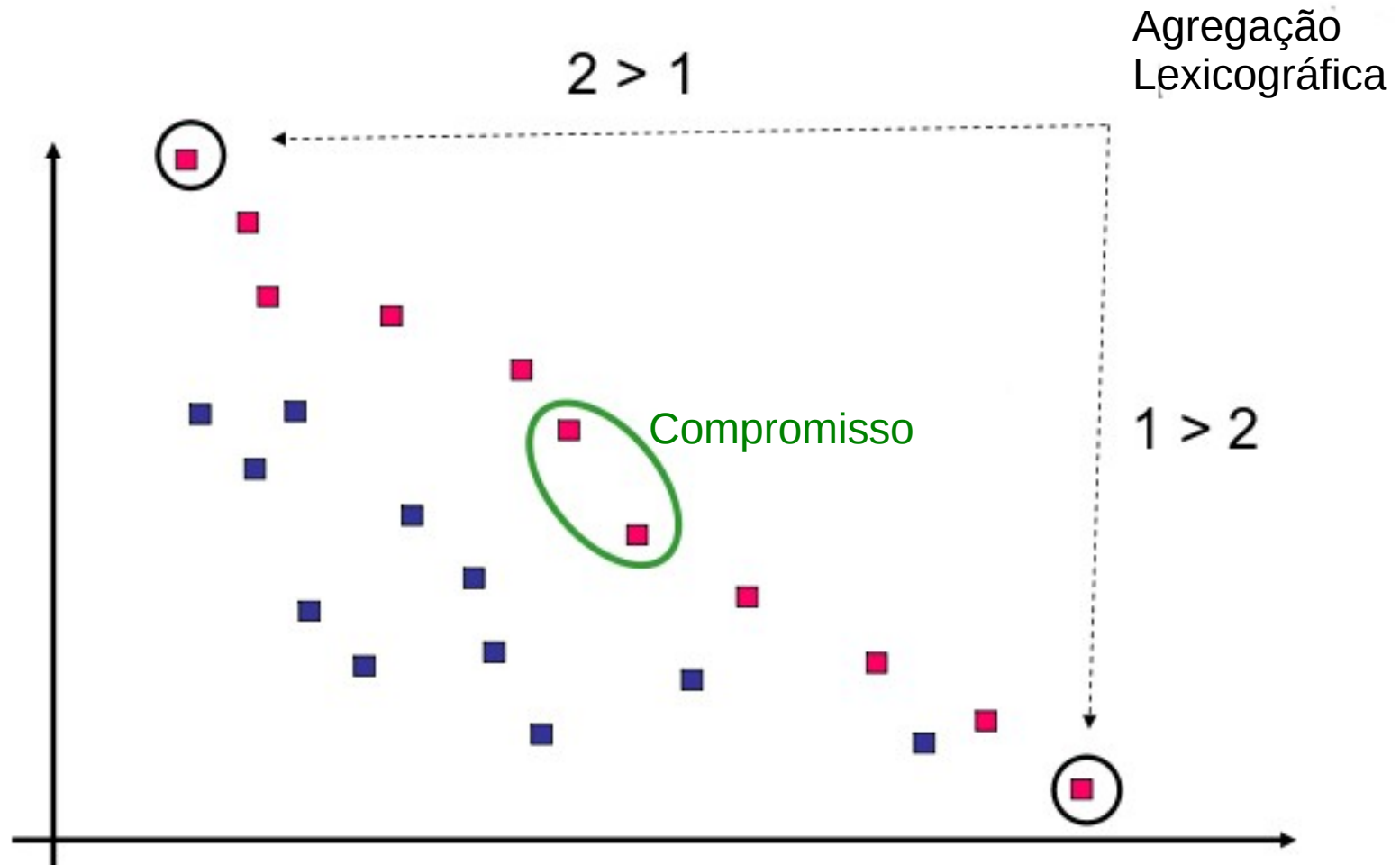
Exemplos de métodos de agregação

- Dominância de Pareto (CA)
 - $x > y$ ssi $[f_i(x) \geq f_i(y)$ para todo i e $f_k(x) > f_k(y)$ para um $k]$
- Agregação lexicográfica (CA)
 - $x > y$ ssi $[f_k(x) > f_k(y)$ para um k e $f_i(x) = f_i(y)$ para um $i \leq k]$
- Soma ponderada (AC)
 - $x > y$ ssi $[\sum_k w_k f_k(x) > \sum_k w_k f_k(y)]$
- Limites desses agregadores...

Dominância de Pareto

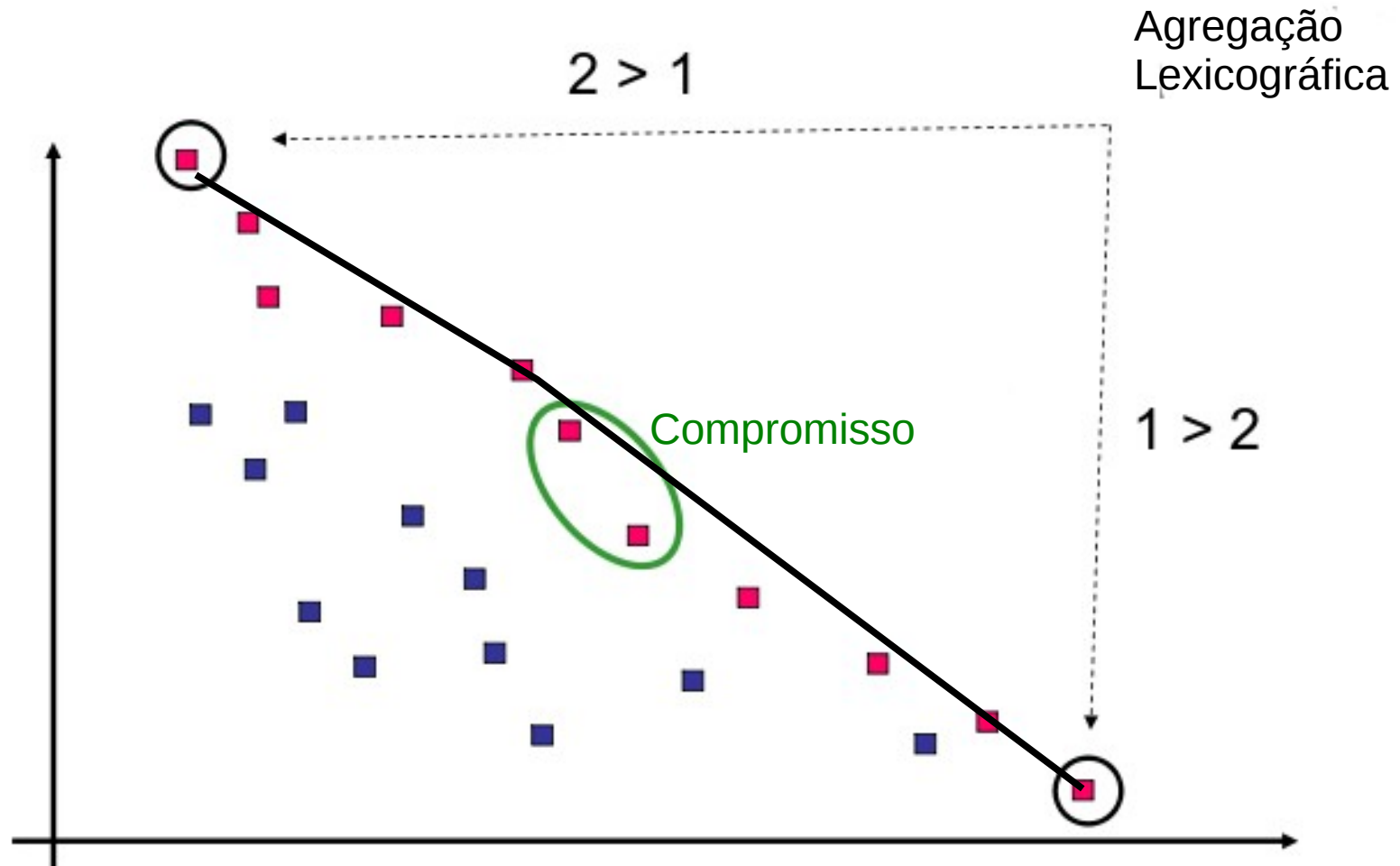


Agregadores



Soma ponderada inadequada para geração de soluções de compromisso!

Agregadores



Soma ponderada inadequada para geração de soluções de compromisso!

SP apenas gera soluções no envelope convexo!

Origens da decisão multi-critério

- Escolha social (Borda, Condorcet, século XVIII)
- Teoria da utilidade (Bernouilli, XVIII)
- Economia (Pareto, século XIX; May, 1950)
- Psicologia (Stevens, 1920; Luce, 1950)
- Pesquisa operacional (Kuhn-Tucker, Charnes-Cooper, 1950)

2. Decisão coletiva e problemas de voto

Teoria da escolha social

- Objetivo
 - Estudar as situações nas quais um grupo deve tomar uma decisão de maneira “democrática”
- Teoria abstrata
 - Natureza da decisão
 - Tamanho do grupo
 - Natureza do grupo
- Muitos resultados
 - 2 prêmios Nobel (economia)
 - K. J. Arrow (1972), A. K. Sen (1998)

Decisão Multicritério e Escolha social

Decisão Multicritério

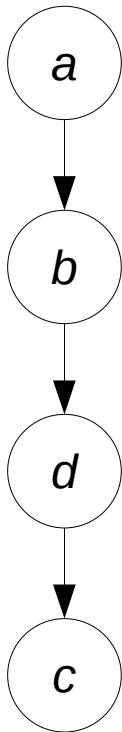
- Alternativas
- Critérios
- Preferências mono-critério
- Preferência global
- Método de agregação

Decisão Coletiva

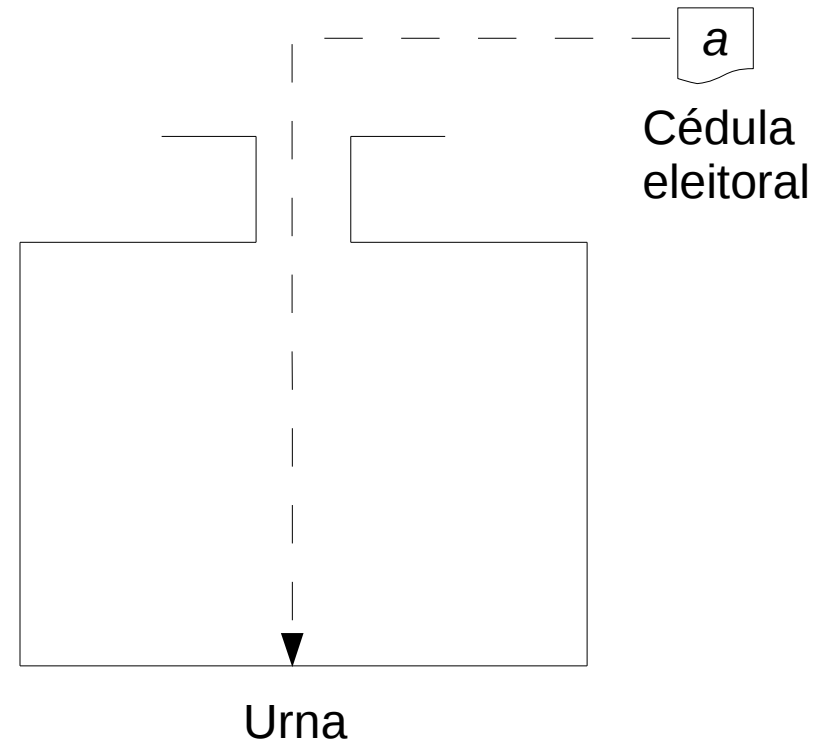
- Candidatos
- Eleitores
- Preferências individuais
- Preferência social
- Método utilizado para definir o vencedor da eleição

Escrutínio uninominal: hipóteses

Classificação dos candidatos



Sinceridade dos eleitores



Método Majoritário – Único turno

- Escrutínio uninominal
- Um único turno
- O candidato que obtém o maior número de votos é eleito
- Ignoraremos o caso de empate
 - Um dos eleitores tem poder especial em caso de empate
 - Um dos candidatos é privilegiado em caso de empate
- Exemplo: prefeito para cidades brasileiras com menos de 200 mil eleitores

Método Majoritário – Único turno

Exemplo

- 3 candidatos: $\{a, b, c\}$
- 21 eleitores (ou 21.000, ou 42.000.000)
- Preferências dos eleitores
 - (10) $a > b > c$
 - (6) $b > c > a$
 - (5) $c > b > a$
- Resultado
 - a (10 votos), b (6 votos), c (5 votos)
 - a eleito.

Método Majoritário – Único turno

Exemplo (2)

- 3 candidatos: $\{a, b, c\}$
- 21 eleitores (ou 21.000.000, ou 42.000.000)
- Preferências dos eleitores
 - (10) $a > b > c$
 - (6) $b > c > a$
 - (5) $c > b > a$
- a eleito: democracia? sinceridade?
 - Notemos que segundo a maioria absoluta: $6 + 5 = 11$ dos 21 eleitores:
 - a é o pior de todos os candidatos (isto é, segundo a maioria, tanto b quanto c são melhores do que ele)

Sistema em dois turnos

- Uninominal
- Primeiro turno
 - O candidato com mais votos é eleito se ele obteve mais de 50% dos votos
 - Se não: segundo turno entre os dois candidatos que receberam mais votos (ignoramos o caso de empate)
- Segundo turno
 - O candidato com mais votos é eleito
- Exemplos no Brasil
 - Presidente, governadores, prefeitos de cidades com > 200 mil eleitores

Sistema em dois turnos

Exemplo anterior

- 3 candidatos: $\{a, b, c\}$
- 21 eleitores
- Preferências dos eleitores
 - (10) $a > b > c$
 - (6) $b > c > a$
 - (5) $c > b > a$
- 1º turno: a (10 votos), b (6 votos), c (5 votos)

Sistema em dois turnos

Exemplo anterior

- 3 candidatos: $\{a, b, c\}$
- 21 eleitores
- Preferências dos eleitores
 - (10) $a > b > c$
 - (6) $b > c > a$
 - (5) $c > b > a$
- 1º turno: a (10 votos), b (6 votos), ~~c (5 votos)~~
- 2º turno: a (10 votos), b (11 votos)
 - b é eleito

Sistema em dois turnos

Exemplo anterior

- 3 candidatos: $\{a, b, c\}$
- 21 eleitores
- Preferências dos eleitores
 - (10) $a > b > c$
 - (6) $b > c > a$
 - (5) $c > b > a$
- 1º turno: a (10 votos), b (6 votos), ~~c (5 votos)~~
- 2º turno: a (10 votos), b (11 votos)
 - b é eleito

Bem melhor, nenhum outro candidato é considerado melhor do que b pela maioria dos eleitores:

- (6 + 5 = 11) $b > a$
- (10 + 6 = 16) $b > c$

Mais um exemplo...

- 4 candidatos: $\{a, b, c, d\}$; 21 eleitores
- Preferências dos eleitores
 - (10) $b > a > c > d$
 - (6) $c > a > d > b$
 - (5) $a > d > b > c$
- 1º turno: a (5 votos), b (10 votos), c (6 votos), d (0 votos)

Mais um exemplo...

- 4 candidatos: $\{a, b, c, d\}$; 21 eleitores
- Preferências dos eleitores
 - (10) $b > a > c > d$
 - (6) $c > a > d > b$
 - (5) $a > d > b > c$
- 1º turno: a ~~(5 votos)~~, b (10 votos), c (6 votos), d ~~(0 votos)~~
- 2º turno: b (15 votos), c (6 votos)
 - b é eleito com uma boa votação (15/21)

Mais um exemplo...

- 4 candidatos: $\{a, b, c, d\}$; 21 eleitores
- Preferências dos eleitores
 - (10) $b > a > c > d$
 - (6) $c > a > d > b$
 - (5) $a > d > b > c$
- 1º turno: ~~a (5 votos)~~, b (10 votos), c (6 votos), ~~d (0 votos)~~
- 2º turno: b (15 votos), c (6 votos)
 - b é eleito com uma boa votação (15/21)
 - Mas a maioria absoluta (11/21) prefere tanto a quanto d a b

Voto útil...

- 4 candidatos: $\{a, b, c, d\}$; 21 eleitores
- Preferências dos eleitores
 - (10) $b > a > c > d$
 - (6) $c > a > d > b$
 - (5) $a > d > b > c$
- Como vimos, b seria eleito
- Os 6 eleitores ($c > a > d > b$) decidem votar como:
 - $a > c > d > b$ **Resultado: a é eleito no 1º turno (11/21)**
- Votar de maneira insincera pode ser vantajoso: **método manipulável**

Voto útil...

- Método manipulável
 - As eleições podem não refletir a opinião dos eleitores
 - Vantagem para os eleitores “espertos” (que sabem manipular)

Outro exemplo...

- 3 candidatos
- 17 eleitores
 - Pesquisa de opinião
 - (6) $a > b > c$
 - (5) $c > a > b$
 - (4) $b > c > a$
 - (2) $b > a > c$
 - 1º turno: a (6 votos), b (6 votos), c (5 votos)
 - 2º turno: a (11 votos), b (6 votos)

Outro exemplo...

- Pesquisa de opinião
 - (6) $a > b > c$
 - (5) $c > a > b$
 - (4) $b > c > a$
 - (2) $b > a > c$
- a resolve fazer uma campanha contra b
 - Que dá resultados!

Outro exemplo...

- Pesquisa de opinião
 - (6) $a > b > c$
 - (5) $c > a > b$
 - (4) $b > c > a$
 - (2) $a > b > c$
- a resolve fazer uma campanha contra b
 - Que dá resultados!

Outro exemplo...

- Pesquisa de opinião
 - (8) $a > b > c$
 - (5) $c > a > b$
 - (4) $b > c > a$
 - ~~(2) $a > b > c$~~
- a resolve fazer uma campanha contra b
 - Que dá resultados!

Outro exemplo...

- Pesquisa de opinião
 - (8) $a > b > c$
 - (5) $c > a > b$
 - (4) $b > c > a$
- 1º turno: a (8 votos), b (4 votos), c (5 votos)

Outro exemplo...

- Pesquisa de opinião
 - (8) $a > b > c$
 - (5) $c > a > b$
 - (4) $b > c > a$
- 1º turno: a (8 votos), ~~b (4 votos)~~, c (5 votos)
- 2º turno: a (8 votos), c (9 votos)

Outro exemplo...

- Pesquisa de opinião
 - (8) $a > b > c$
 - (5) $c > a > b$
 - (4) $b > c > a$
- 1º turno: a (8 votos), ~~b (4 votos)~~, c (5 votos)
- 2º turno: a (8 votos), c (9 votos)

a perdeu! Os bons resultados da campanha contra b lhe foram desfavoráveis!

Método não monotônico!

E quanto à abstenção?

- 11 eleitores
- 3 candidatos: x , y , z
- Preferências
 - (4) $x > y > z$
 - (4) $z > y > x$
 - (3) $y > z > x$
- Eleição em 2 turnos:
 - 1º turno: x (4 votos), z (4 votos), y (3 votos)

E quanto à abstenção?

- 11 eleitores
- 3 candidatos: x , y , z
- Preferências
 - (4) $x > y > z$
 - (4) $z > y > x$
 - (3) $y > z > x$
- Eleição em 2 turnos:
 - 1º turno: x (4 votos), z (4 votos), ~~y (3 votos)~~

E quanto à abstenção?

- 11 eleitores
- 3 candidatos: x , y , z
- Preferências
 - (4) $x > y > z$
 - (4) $z > y > x$
 - (3) $y > z > x$
- Eleição em 2 turnos:
 - 1º turno: x (4 votos), z (4 votos), ~~y (3 votos)~~
 - 2º turno: x (4 votos), z (7 votos)

E quanto à abstenção?

- 11 eleitores
- 3 candidatos: x , y , z
- Preferências
 - (4) $x > y > z$
 - (4) $z > y > x$
 - (3) $y > z > x$
- Eleição em 2 turnos:
 - 1º turno: x (4 votos), z (4 votos), ~~y (3 votos)~~
 - 2º turno: ~~x (4 votos)~~, z (7 votos)

Z é o ganhador!

E quanto à abstenção?

- 11 eleitores; 3 candidatos: x , y , z
- Preferências
 - (4) $x > y > z$
 - (4) $z > y > x$
 - (3) $y > z > x$
- Dois dos eleitores de x viram nas pesquisas que z acabaria ganhando. Preferiram ir pescar ao invés de votar

Paradoxo dos pescadores

(Bouyssou, Perny 97)

- 9 eleitores; 3 candidatos: x , y , z
- Preferências
 - (2) $x > y > z$
 - (4) $z > y > x$
 - (3) $y > z > x$
- Dois dos eleitores de x viram nas pesquisas que z acabaria ganhando. Preferiram ir pescar ao invés de votar
 - 1º turno: x (2 votos), z (4 votos), y (3 votos)

Paradoxo dos pescadores

(Bouyssou, Perny 97)

- 9 eleitores; 3 candidatos: x , y , z
- Preferências
 - (2) $x > y > z$
 - (4) $z > y > x$
 - (3) $y > z > x$
- Dois dos eleitores de x viram nas pesquisas que z acabaria ganhando. Preferiram ir pescar ao invés de votar
 - 1º turno: ~~x (2 votos)~~, z (4 votos), y (3 votos)

Paradoxo dos pescadores

(Bouyssou, Perny 97)

- 9 eleitores; 3 candidatos: x , y , z
- Preferências
 - (2) $x > y > z$
 - (4) $z > y > x$
 - (3) $y > z > x$
- Dois dos eleitores de x viram nas pesquisas que z acabaria ganhando. Preferiram ir pescar ao invés de votar
 - 1º turno: ~~x (2 votos)~~, z (4 votos), y (3 votos)
 - 2º turno: z (4 votos), y (5 votos)

Paradoxo dos pescadores

(Bouyssou, Perny 97)

- 9 eleitores; 3 candidatos: x , y , z
- Preferências
 - (2) $x > y > z$
 - (4) $z > y > x$
 - (3) $y > z > x$
- Dois dos eleitores de x viram nas pesquisas que z acabaria ganhando. Preferiram ir pescar ao invés de votar
 - 1º turno: ~~x (2 votos)~~, z (4 votos), y (3 votos)
 - 2º turno: ~~z (4 votos)~~, y (5 votos)

Y é o ganhador! Método não incentiva a participação!

Separabilidade

- Estado X: 13 eleitores
 - 4: $a > b > c$
 - 3: $b > a > c$
 - 3: $c > a > b$
 - 3: $c > b > a$
- 1º turno
 - a: 4 b: 3 c: 6
- 2º turno
 - a: 7 c: 6
 - a é eleito (7/13)
- Estado Y: 13 eleitores
 - 4: $a > b > c$
 - 3: $c > a > b$
 - 3: $b > c > a$
 - 3: $b > a > c$
- 1º turno
 - a: 4 b: 6 c: 3
- 2º turno
 - a: 7 b: 6
 - a é eleito

Separabilidade

- Estado X: 13 eleitores
 - 4: $a > b > c$
 - 3: $b > a > c$
 - 3: $c > a > b$
 - 3: $c > b > a$
- 1º turno
 - a: 4 b: 3 c: 6
- 2º turno
 - a: 7 c: 6
 - a é eleito (7/13)
- Estado Y: 13 eleitores
 - 4: $a > b > c$
 - 3: $c > a > b$
 - 3: $b > c > a$
 - 3: $b > a > c$
- 1º turno
 - a: 4 b: 6 c: 3
- 2º turno
 - a: 7 b: 6
 - a é eleito (7/13)

a é eleito nos dois estados, seria ele o melhor segundo todo o conjunto de eleitores?

Separabilidade

- 26 eleitores
 - 4: $a > b > c$
 - 3: $b > a > c$
 - 3: $c > a > b$
 - 3: $c > b > a$
 - 4: $a > b > c$
 - 3: $c > a > b$
 - 3: $b > c > a$
 - 3: $b > a > c$
- 1º turno
 - a: 8 b: 9 c: 9
 - a é eliminado no 1º turno!
- 2º turno
 - b: 17 c: 9
 - b é eleito (17/26)
- Método não separável
 - Não é possível decentralizar a “apuração”

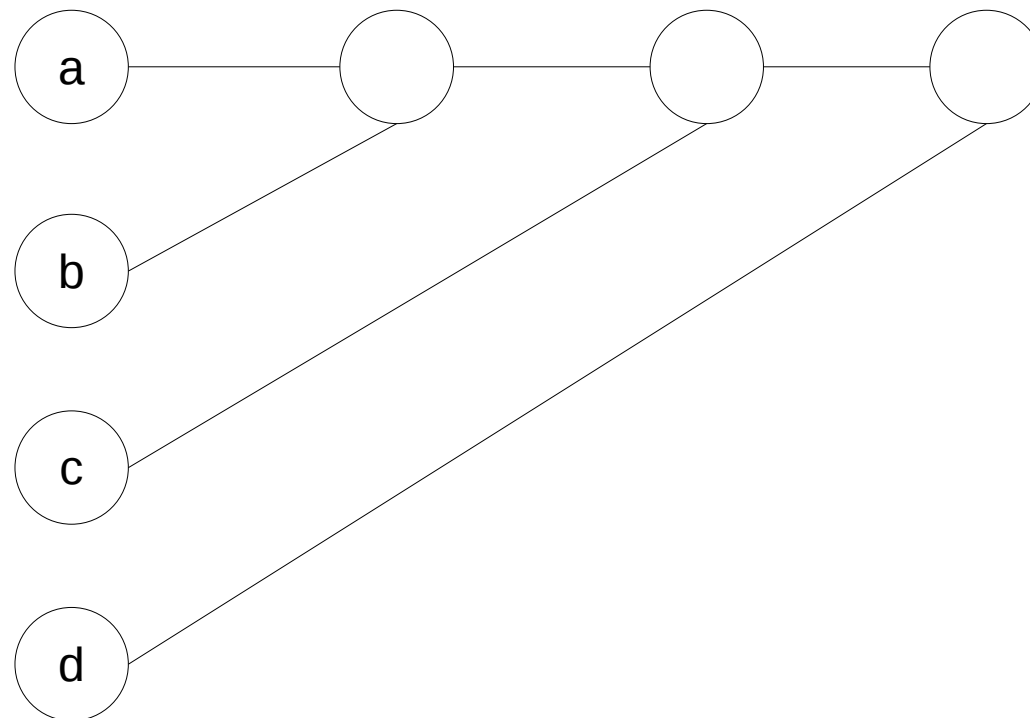
Resumo

- Escrutínio Uninominal
 - Sistema de dois turnos é somente um pouco melhor do que o com um único turno
 - Vários problemas
 - Não monotônico
 - Não incentiva a participação
 - Manipulável
 - Não separável

Outra ideia: decisões sequenciais

4 candidatos: a, b, c, d

pauta do dia: a, b, c, d



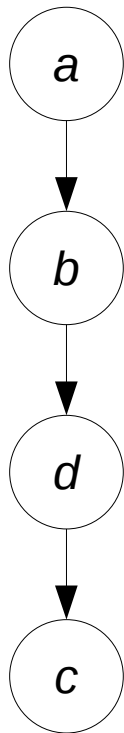
Exemplo: c é um projeto, a e b são emendas, d é o status quo

Exemplo

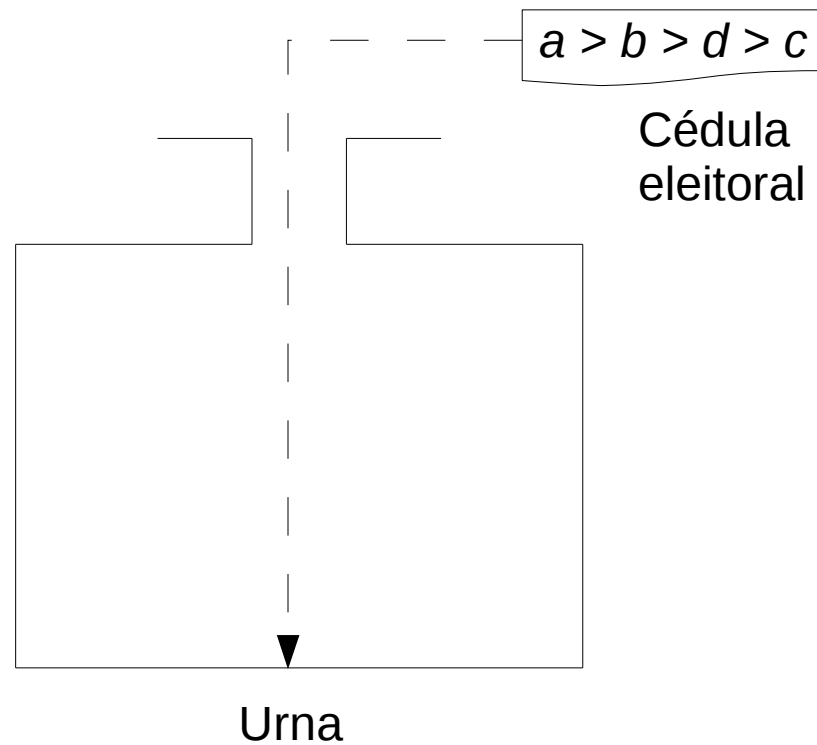
- 3 candidatos: a, b, c
- 3 eleitores
 - 1: $a > b > c$
 - 1: $b > c > a$
 - 1: $c > a > b$
- Pauta
 - a, b, c \Rightarrow ganhador c
 - b, c, a \Rightarrow ganhador a
 - c, a, b \Rightarrow ganhador b
- Resultado depende da escolha da ordem do dia
 - Pode nas mãos do “presidente da sessão”
 - Candidatos não são tratados de forma igual
 - Os votados tardiamente são favorecidos

Escrutínio de listas: hipóteses

Classificação dos candidatos



Sinceridade dos eleitores



Método de Condorcet

- Método de Condorcet ou majoritário: um candidato **a** é preferível a um candidato **b** se o número de eleitores que classificou **a** como melhor que **b** é estritamente superior ao número de eleitores que disseram que **b** é melhor que **a** (no. igual: indiferença)
- Princípio de Condorcet: se existir um candidato que é preferível a todos os outros segundo o método majoritário, devemos elegê-lo.
 - Vencedor de Condorcet
 - Mas: 1: $a > b > c$
1: $b > c > a$
1: $c > a > b$

Ditadura da Maioria

- 26 candidatos: {a, b, ..., z}
- 100 eleitores
 - 51: $a > b > c > \dots > y > z$
 - 49: $z > b > c > \dots > y > a$
- **a** é o vencedor de Condorcet
 - Porém **b** parece ser mais legítimo (menos controverso)
- Todo método uninominal baseado na maioria também elegeria a.

Método de Borda

- Um candidato **a** é preferível a um candidato **b** se a soma dos rankings de a nas listas dos eleitores é estritamente inferior a de b. (atribuímos 1 ao primeiro da lista, 2 ao segundo etc.)
- Exemplo
 - 2: $b > a > c > d$
 - 1: $a > c > d > b$

	1	2	3	4
a	1	2	0	0
b	2	0	0	1
c	0	1	2	0
d	0	0	1	2

$$a = 1 \times 1 + 2 \times 2 = 5$$

$$b = 2 \times 1 + 4 \times 1 = 6$$

$$c = 1 \times 2 + 2 \times 3 = 8$$

$$d = 1 \times 3 + 2 \times 4 = 11$$

a é eleito

Independência de alternativas irrelevantes

- 2: $b > a > c > d$
- 1: $a > c > d > b$
- Se c e d abandonarem?
 - O que acontece com Condorcet?
 - O que acontece com Borda?

Independência de alternativas irrelevantes

- 2: $b > a > c > d$
- 1: $a > c > d > b$
- Se c e d abandonarem?
 - O que acontece com Condorcet?
 - O que acontece com Borda?
- Borda
 - Transitividade sem independência
 - Separável
- Condorcet
 - Independência sem transitividade

Bibliografia

- Bouyssou D., Perny P., ``Aide multicritère à la décision et théorie du choix social", Nouvelles de la Science et des Technologie, vol. 15, 61-72, 1997. Download: <http://allserv.ugent.be/~tmarchan/papers/DBPP.zip>
- M. Grabisch et P. Perny (2003) "Agrégation multicritère". In Logique floue, principes, aide à la décision. B. Bouchon-Meunier, C. Marsala (eds), pp. 81—120.
Download: http://www-desir.lip6.fr/publications/pub_263_1_preliminary_version.pdf