Uma Teoria dos Modelos Mais Curta

(Versão Parcial: 1 de fevereiro de 2005)

Favor não distribuir

Wilfrid Hodges

Traduzido do original em inglês
A Shorter Model Theory

por Ruy J. Guerra B. de Queiroz

Índice

Introdução

Mais curta que o quê?

Mais curta que um outro livro que uma vez escrevi, chamado *Teoria dos modelos* e publicado em 1993 pela Cambridge University Press. Era longo (772 páginas), por isso a Cambridge University Press me pediu uma versão mais curta para ser publicada em capa mole como um livro texto. Esta é a versão mais curta.

E o que é teoria dos modelos?

Teoria dos modelos é sobre a classificação de estruturas matemáticas, funções e conjuntos por meio de fórmulas lógicas. Pode-se classificar estruturas de acordo com quais sentenças lógicas são verdadeiras nelas; na verdade o termo 'modelo' vem do uso 'a estrutura A é um modelo da sentença ϕ', significando que ϕ é verdadeira em A. Teóricos de modelos buscam maneiras de construir modelos de sentenças dadas; e por isso uma grande parte da teoria dos modelos é diretamente sobre construções e apenas indiretamente sobre classificação. Este livro descreve algumas construções muito bonitas, incluindo ultraprodutos, modelos de Ehrenfeucht–Mostowski e modelos existencialmente fechados.

Em 1973 C. C. Chang e Jerry Keisler caracterizaram teoria dos modelos como

álgebra universal mais lógica

Eles queriam dizer que álgebra universal estaria para estruturas assim como lógica estaria para fórmulas lógicas. Isto é bonito, mas pode sugerir que teóricos de modelos e algebristas universais têm interesses bem próximos, o que é discutível. A caracterização também deixa de fora o fato de que quem trabalha em teoria dos modelos estuda os conjuntos definíveis em uma única estrutura por uma fórmula lógica. Neste aspecto teóricos de modelos estão muito mais próximos a geômetras algébricos, que estudam os conjuntos de pontos definíveis por equações sobre um corpo. Um *slogan* mais atualizado poderia ser o que diz que teoria dos modelos é

geometria algébrica menos corpos

De fato alguns dos sucessos mais impressionantes da teoria dos modelos têm sido teoremas sobre a existência de soluções de equações sobre corpos. Exemplos disso são os trabalhos de Ax, Kochen e Ershov sobre a conjectura de Artin em 1965, e a prova da conjectura de Mordell–Lang para corpos de funções por Hrushovski em 1993. Ambos os exemplos estão além do escopo deste livro.

Quais os itens do livro mais longo você mais se arrepende de ter deixado de fora?

Provavelmente a construção de Hrushovski para extrair um grupo de uma configuração de Zil'ber em um conjunto fortemente minimal. A construção é difícil e excitante, mas ainda assim razoavelmente elementar. É também um gostinho das coisas importantes em teoria geométrica da estabilidade. Isto me dá um pretexto para corrigir o descuido mais embaraçoso cometido no livro mais longo (apontado por Byunghan Kim): Lema 4.7.11(c) está claramente errado, mas não há problema em continuar sem o lema.

As três outras omissões são produtos diretos (juntamente com sentenças de Horn e o teorema de Feferman–Vaught); construções de muitos modelos não-isomorfos; e um apêndice que faz um apanhado da teoria dos modelos de módulos, grupos abelianos, grupos, corpos e ordenações lineares.

Você adicionou alguma coisa?

Sim. Existe um novo capítulo demonstrando o teorema de Morley e desenvolvendo o ferramental necessário para a demonstração. Ele substitui um capítulo que dava uma boa quantidade de informação sobre categoricidade (por exemplo uma teoria completa incontavelmente categórica finitamente axiomatizada), mas poucas demonstrações. Esse novo capítulo foi escrito de olho nos cursos de pós-graduação introdutórios em teoria dos modelos.

Também adicionei a cada capítulo um conjunto de leituras sugeridas. Tais leituras variam desde embasamento filosófico ou histórico até exemplos de trabalhos nas fronteiras atuais do assunto. Elas substituem as quase quarenta páginas de referências bibliográficas do livro mais longo; os leitores que desejarem informações detalhadas sobre as fontes dos resultados podem encontrá-las lá mas não aqui.

Havia coisas no livro mais longo que você ficou particularmente satisfeito de ter sido capaz de melhorar aqui?

Felizmente não; há umas poucas mudanças de conteúdo. Mas acolho a oportunidade de agradecer–além das pessoas que agradeci no volume mais longo–vários colegas que generosamente me enviaram correções para o livro mais longo, notavelmente Matthias Clasen, Ed Hamada, Don Monk, Philipp Rothmaler e Gabriel Sabbagh. Uma lista de correções está disponível em:
`ftp.maths.qmul.ac.uk/pub/preprints/hodges/mtcorrig.tex`

Nota sobre notação

Tomo por base a teoria de conjuntos de Zermelo–Fraenkel, ZFC. Em particular sempre tomo como hipótese o axioma da escolha (exceto onde o axioma propriamente dito está sob discussão). Nunca assumo a hipótese do contínuo, existência de inacessíveis incontáveis, etc., sem ser honesto sobre isso.

A notação $x \subseteq y$ significa que x é um subconjunto de y; $x \subset y$ significa que x é um subconjunto próprio de y. Escrevo $\mathrm{dom}(f)$, $\mathrm{im}(f)$ para designar o domínio e a imagem de uma função f. 'Maior que' significa maior que, nunca 'maior ou igual a'. $\wp(x)$ é o conjunto potência de x.

Ordinais são os ordinais de von Neumann, i.e. os predecessores de um ordinal α são exatamente os elementos de α. Uso os símbolos α, β, γ, δ, i, j, etc. para ordinais; δ é usualmente um ordinal limite. Um cardinal κ é o menor ordinal de cardinalidade κ, e os cardinais infinitos são listados como ω_0, ω_1 etc. Uso os símbolos κ, λ, μ, ν para cardinais; eles não são tomados como infinitos por hipótese a menos que o contexto claramente o requeira (embora eu tenha provavelmente me descuidado desse ponto uma ou duas vezes). Números naturais m, n etc. são a mesma coisa que cardinais finitos.

'Contável' significa de cardinalidade ω. Um cardinal infinito λ é um cardinal **regular** se ele não pode ser escrito como a soma de menos que λ cardinais que são todos menores que λ; do contrário ele é **singular**. Todo cardinal sucessor infinito κ^+ é regular. O menor cardinal singular é $\omega_\omega = \sum_{n<\omega} \omega_n$. A **cofinalidade** $\mathrm{cf}(\alpha)$ de um ordinal α é o menor ordinal β tal que α tem um subconjunto cofinal de tipo-ordem β; pode ser mostrado que esse ordinal β é finito ou regular. Se α e β são ordinais, $\alpha\beta$ é o ordinal produto consistindo de β cópias de α ligadas de ponta a ponta. Se κ e λ são cardinais, $\kappa\lambda$ é o cardinal produto. O contexto deve sempre demonstrar quais destes produtos é o pretendido.

Seqüências são bem-ordenadas (exceto as seqüências de indiscerníveis do Capítulo 9, e está explícito lá o que está acontecendo). Uso a notação $\bar{x}$, $\bar{a}$, etc. para seqüências $(x_0, x_1, \ldots)$, $(a_0, a_1, \ldots)$ etc., porém informalmente: o n-ésimo termo de uma seqüência $\bar{x}$ pode ser x_n ou $x(n)$ ou algo diferente, dependendo do contexto, e algumas seqüências começam em x_1. Seqüências de comprimento finito são chamadas de **uplas**. Os termos de uma seqüência são às vezes chamados de **itens**, para evitar a ambigüidade do termo 'termo'. A seqüência é dita **não-repetitiva** se nenhum item ocorre nela duas ou mais vezes. Se $\bar{a}$ é uma seqüência $(a_0, a_1, \ldots)$ e f é uma função, então $f\bar{a}$ é $(fa_0, fa_1, \ldots)$. O comprimento de uma seqüência σ é escrito $\mathrm{lh}(\sigma)$. Se σ é uma seqüência de comprimento m e $n \leq m$, então $\sigma|n$ é o segmento inicial consistindo dos primeiros n termos de σ. O conjunto de seqüências de comprimento γ cujos itens provêm todos do conjunto X é escrito ${}^{\gamma}X$. Logo, ${}^{n}2$ é o conjunto de n-uplas ordenadas de 0's e 1's; ${}^{<\gamma}X$ é $\bigcup_{\alpha<\gamma} {}^{\alpha}X$. Escrevo η, ξ, θ etc. para designar ordenações lineares; η^* é a ordenação η

vista de trás para a frente.

Não distingo sistematicamente entre uplas e cadeias. Se $\bar{a}$ e $\bar{b}$ são cadeias, $\bar{a}^\wedge\bar{b}$ é a cadeia concatenada consistindo de $\bar{a}$ seguido de $\bar{b}$; mas frequentemente, em nome da simplicidade, escrevo $\bar{a}\bar{b}$. Existe um conflito entre a notação usual de teoria dos modelos e a notação usual em teoria dos grupos: em teoria dos modelos xy é a cadeia consistindo de x seguido de y, mas em grupos é x vezes y. É preciso conviver com isto; mas onde há ambigüidade tenho usado $x^\wedge y$ para a cadeia concatenada e $x \cdot y$ para o produto de grupos.

A notação da teoria dos modelos é definida à medida que e quando precisamos. Os itens mais básicos aparecem no Capítulo 1 e nas primeiras cinco seções do Capítulo 2.

'Eu' significa eu, 'nós' significa nós.

Capítulo 1

Nomeando as partes

> Every person had in the beginning one only proper name, except the savages of Mount Atlas in Barbary, which were reported to be both nameless and dreamless.
> *William Camdem*

Neste primeiro capítulo vamos encontrar o principal assunto de estudo da teoria dos modelos: estruturas.

Todo matemático manipula estruturas de algum tipo – seja módulos, grupos, anéis, corpos, reticulados, ordenações parciais, álgebras de Banach, ou qualquer que seja. Este capítulo definirá as noções básicas como 'elemento', 'homomorfismo', 'subestrutura', e as definições não são feitas para trazer qualquer surpresa. A noção de um 'diagrama' (de Robinson) de uma estrutura pode parecer um pouco estranha à primeira vista, mas na verdade nada mais é do que uma generalização da tabela de multiplicação de um grupo.

De qualquer forma existe algo que o leitor pode achar incômodo. Teóricos de modelos estão sempre falando sobre símbolos, nomes e rótulos. Um praticante da teoria dos grupos expressará um grupo abeliano com a mesma satisfação seja multiplicativamente ou aditivamente, qualquer que seja o mais conveniente para o problema em questão. Não é o caso do praticante da teoria dos modelos: para ele ou ela o grupo com '$\cdot$' é uma estrutura e o grupo com '$+$' é uma estrutura diferente. Modifique o nome e você modificará a estrutura.

Isto pode parecer pedante. Teoria dos modelos tem sua origem em lógica matemática, e não posso negar que alguns lógicos destacados têm sido pedantes quando se trata de símbolos. Entretanto existem várias boas razões para que teóricos de modelos assumam a perspectiva que normalmente assumem. Por agora, permita-me mencionar duas delas.

Em primeiro lugar, estaremos frequentemente querendo comparar duas estruturas e estudar homomorfismos de uma para a outra. O que é um homomorfismo? No caso particular de grupos, um homomorfismo de um grupo G para um grupo H é uma função que associa multiplicação em G com multiplicação em H. Existe uma maneira óbvia de generalizar esta noção para estruturas arbitrárias: um homomorfismo de uma estrutura A para uma estrutura B é uma função que associa cada operação de A *à operação com o mesmo nome em* B.

Em segundo lugar, frequentemente vamos querer construir uma estrutura com certas propriedades. Uma das máximas da teoria dos modelos é a seguinte: *primeiro dê nome aos elementos de sua estrutura, e só então decida como eles devem se comportar*. Se os nomes são bem escolhidos, eles servirão tanto como um apoio para a construção, quanto como matéria prima.

Aha – diz o praticante da teoria dos grupos – vejo que você não está realmente falando sobre símbolos *escritos* de forma alguma. Para os objetivos que você descreveu, você precisa apenas de ter rótulos formais para algumas partes da estrutura. Deve ser um tanto irrelevante que tipos de coisas os seus rótulos são; você pode até querer dispor de uma quantidade incontável deles.

Correto. Na realidade vamos seguir o exemplo de A. I. Mal'tsev e não impor quaisquer restrições sobre o que pode servir como um nome. Por exemplo, qualquer ordinal pode ser um nome, e qualquer objeto matemático pode servir como um nome para si próprio. Os itens chamados 'símbolos' nesse livro não precisam ser símbolos escritos. Eles nem sequer precisam ser símbolos sonhados.

1.1 Estruturas

Vamos começar com uma definição de 'estrutura'. Teria sido possível dar a partida no assunto com uma definição mais ágil – digamos deixando fora as cláusulas (1.2) e (1.4) abaixo. Porém um algo mais de generalidade nesse estágio nos economizará infindáveis complicações mais tarde.

Uma **estrutura** A é um objeto com os quatro seguintes ingredientes.

(1.1) Um conjunto chamado de **domínio** de A, escrito dom(A) ou dom A (algumas pessoas o chamam de **universo** ou **portador** de A). Os elementos de dom(A) são chamados de **elementos** da estrutura A. A **cardinalidade** de A, em símbolos $|A|$, é definida como sendo a cardinalidade $|\text{dom}\, A|$ de dom(A).

(1.2) Um conjunto de elementos de A chamados de **elementos constantes**, cada um dos quais é nomeado por uma ou mais **constantes**. Se c é uma constante, escrevemos c^A para designar o elemento constante nomeado por c.

(1.3) Para cada inteiro positivo n, um conjunto de relações n-árias sobre dom(A) (i.e. subconjuntos de $(\text{dom}\ A)^n$), cada uma das quais é nomeada por um ou mais **símbolos de relação** n-ária. Se R é um símbolo de relação, escrevemos R^A para designar a relação nomeada por R.

(1.4) Para cada inteiro positivo n, um conjunto de operações n-árias sobre dom(A) (i.e. funções de $(\text{dom}\, A)^n$ para dom(A)), cada uma das quais é nomeada por um ou mais **símbolos de função** n-ária. Se F é um símbolo de função, escrevemos F^A para designar a função nomeada por F.

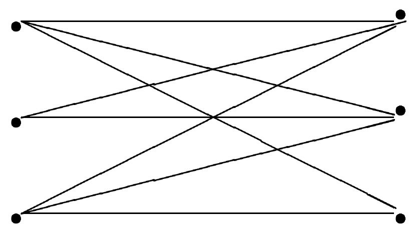
Exceto onde dissermos o contrário, quaisquer dos conjuntos (1.1)–(1.4) podem ser vazios. Como mencionado no capítulo de introdução, os 'símbolos' de constante, relação e função podem ser quaisquer objetos matemáticos, não necessariamente símbolos escritos; mas em nome da paz de espírito normalmente se supõe que, por exemplo, um símbolo de relação 3-ária não aparece também como um símbolo de função 3-ária ou um símbolo de relação 2-ária. Usaremos letras maiúsculas A, B, C, ... para estruturas.

Seqüências de elementos de uma estrutura são escritas $\bar{a}$, $\bar{b}$ etc. Uma **upla em** A (ou **de** A) é uma seqüência finita de elementos de A; é uma n-upla se tem comprimento

n. Usualmente deixamos para o contexto a determinação do comprimento de uma seqüência ou upla.

Isto conclui a definição de 'estrutura'.

Exemplo 1: *Grafos.* Um **grafo** consiste de um conjunto V (o conjunto de **vértices**) e um conjunto E (o conjunto de **arestas**), onde cada aresta é um conjunto de dois vértices distintos. Diz-se que uma aresta (v, w) **liga** os dois vértices v e w. Podemos fazer uma figura representando um grafo finito usando pontos para os vértices e a ligação de dois vértices v, w sendo realizada por uma linha quando (v, w) é uma aresta:



Uma maneira natural de fazer de um grafo G uma estrutura é a seguinte. Os elementos de G são os vértices. Existe uma relação binária R^G; o par ordenado (v, w) pertence à relação R^G se e somente se existe uma aresta ligando v a w.

Exemplo 2: *Ordenações lineares.* Suponha que $\leqslant$ ordena um conjunto X. Então podemos fazer de $(X, \leqslant)$ uma estrutura A como segue. O domínio de A é o conjunto X. Existe um símbolo de relação binária R, e sua interpretação R^A é a ordenação $\leqslant$. (Na prática escreveríamos o símbolo de relação como $\leqslant$ ao invés de R.)

Exemplo 3: *Grupos.* Podemos pensar num grupo como uma estrutura G com uma constante 1 nomeando a identidade 1^G, um símbolo de função $\cdot$ nomeando a operação produto do grupo $\cdot^G$, e um símbolo de função unária $^{-1}$ nomeando a operação de tomar o inverso $^{(-1)^G}$. Um outro grupo H terá os mesmos símbolos 1, $\cdot$, $^{-1}$; então 1^H é o elemento identidade de H, $\cdot^H$ é a operação produto de H, e assim por diante.

Exemplo 4: *Espaços vetoriais.* Existem várias maneiras de fazer de um espaço vetorial uma estrutura, mas aqui vai a mais conveniente. Suponha que V é um espaço vetorial sobre um corpo de escalares K. Tome o domínio de V como sendo o conjunto de vetores de V. Existe um elemento constante 0^V, a origem do espaço vetorial. Existe uma operação binária, $+^V$, que é a adição de vetores. Existe uma operação 1-ária $-^V$ para o inverso aditivo; e para todo escalar k existe uma operação 1-ária k^V para representar a multiplicação de um vetor por k. Dessa forma cada escalar serve como um símbolo de função 1-ária. (Na verdade o símbolo '$-$' é redundante, porque $-^V$ é a mesma operação que $(-1)^V$.)

Quando falarmos de espaços vetoriais mais adiante, assumiremos que eles são estruturas dessa forma (a menos que algo seja dito em contrário). O mesmo vale para módulos, substituindo o corpo K por um anel.

Duas perguntas vêm à mente. Primeiro, esses exemplos não são um pouco arbitrários? Por exemplo, por que atribuímos à estrutura de grupo um símbolo para o inverso multiplicativo $^{-1}$, mas não demos um símbolo para o comutador [,]? Por que introduzimos na estrutura de ordenação linear um símbolo para a ordenação $\leqslant$, mas nenhum para a ordenação estrita correspondente $<$?

A resposta é sim; essas escolhas foram arbitrárias. Mas algumas escolhas são mais sensatas que outras. Voltaremos a este ponto na próxima seção.

Em segundo lugar, o que é *exatamente* uma estrutura? Nossa definição não disse nada sobre a forma pela qual os ingredientes (1.1)–(1.4) são empacotados em uma única entidade.

Verdadeiro novamente. Mas esta foi um descuido deliberado – os arranjos para o empacotamento não terão importância para nós. Alguns autores definem A como sendo um par ordenado $\langle \mathrm{dom}(A), f\rangle$ onde f é uma função associando a cada símbolo S um item S^A correspondente. O importante é saber o que os símbolos e os ingredientes são, e isso pode ser indicado de qualquer forma razoável.

Por exemplo um praticante da teoria dos modelos pode se referir à estrutura

$$\langle \mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1, \leqslant\rangle.$$

Com um pouco de bom senso o leitor pode adivinhar que isso se refere à estrutura cujo domínio é o conjunto dos números reais, com constantes 0 e 1 nomeando os números 0 e 1, um símbolo de relação 2-ária $\leqslant$ nomeando a relação $\leqslant$, símbolos de função 2-ária $+$ e $\cdot$ nomeando adição e multiplicação respectivamente, e um símbolo de função 1-ária nomeando a troca de sinal.

Assinaturas

A **assinatura** de uma estrutura A é especificada fornecendo-se

(1.5) o conjunto de constantes de A, e para cada $n > 0$, o conjunto de símbolos de relação n-ária e o conjunto de símbolos de função n-ária de A.

Assumiremos que a assinatura de uma estrutura pode ser lida de forma única a partir da estrutura.

O símbolo L será usado para representar assinaturas. Mais adiante ele também servirá para linguagens – pense na assinatura de A como uma espécie de linguagem rudimentar para falar sobre A. Se A tem assinatura L, dizemos que A é uma L-**estrutura**.

Uma assinatura L sem símbolos de constante or símbolos de função é chamada de uma **assinatura relacional**, e uma L-estrutura é chamada de **estrutura relacional**. Uma assinatura sem símbolos de relação às vezes é chamada de **assinatura algébrica**.

Exercícios para a seção 1.1

1. Segundo Tomaz de Aquino, Deus é uma estrutura G com três elementos '*pater*', '*filius*' e '*spiritus sanctus*', em uma assinatura consistindo de uma relação binária assimétrica ('*relatio opposita*') R, lida como '*relatio originis*'. Tomaz de Aquino assevera também que os três elementos podem ser identificados univocamente em termos de R^G. Deduza – como o fez Tomaz de Aquino – que se os pares (*pater*, *filius*) e (*pater*, *spiritus sanctus*) estão em R^G, então exatamente um dos pares (*filius*, *spiritus sanctus*) ou (*spiritus sanctus*, *filius*) pertence a R^G.

2. Seja X um conjunto e L uma assinatura; escreva $\kappa(X, L)$ para designar o número de L-estruturas distintas que têm domínio X. Mostre que se X é um conjunto finito então $\kappa(X, L)$ é ou finito ou no mínimo 2^ω.

1.2 Homomorfismos e subestruturas

A seguinte definição tem o propósito de abarcar, de uma só vez, virtualmente todas as coisas que podem ser chamadas de 'homomorfismos' em qualquer ramo de álgebra.

Seja L uma assinatura e sejam A e B L-estruturas. Por um **homomorfismo** f de A para B, em símbolos $f : A \to B$, queremos dizer uma função f de dom(A) para dom(B) com as três seguintes propriedades.

(2.1) Para cada constante c de L, $f(c^A) = c^B$.

(2.2) Para cada $n > 0$ e cada símbolo de relação n-ária R de L e n-upla $\bar{a}$ de A, se $\bar{a} \in R^A$ então $f\bar{a} \in R^B$.

(2.3) Para cada $n > 0$ e cada símbolo de função n-ária F de L e n-upla $\bar{a}$ de A, $f(F^A(\bar{a})) = F^B(f\bar{a})$.

(Se $\bar{a}$ é $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ então $f\bar{a}$ significa $(fa_0, \ldots, fa_{n-1})$; cf. Nota sobre notação.) Por uma **imersão** de A em B queremos dizer um homomorfismo $f : A \to B$ que é injetivo e satisfaz à seguinte versão mais forte de (2.2).

(2.4) Para cada $n > 0$, cada símbolo de relação n-ária R de L e cada n-upla $\bar{a}$ de A, $\bar{a} \in R^A \Leftrightarrow f\bar{a} \in R^B$.

Um **isomorfismo** é uma imersão sobrejetora. Homomorfismos $f : A \to A$ são chamados de **endomorfismos** de A. Isomorfismos $f : A \to A$ são chamados de **automorfismos** de A.

Por exemplo, se G e H são grupos e $f : G \to H$ é um homomorfismo, então (2.1) diz que $f(1^G) = 1^H$, e (2.3) diz que para todos os elementos a, b de G, $f(a \cdot^G b) = f(a) \cdot^H f(b)$ e $f(a^{(-1)^G}) = f(a)^{(-1)^H}$. Isso é exatamente o que diz a definição usual de homomorfismo entre grupos. Cláusula (2.2) não adiciona nada neste caso já que não existem símbolos de relação na assinatura. Pela mesma razão (2.4) é vácua para grupos. Assim um homomorfismo entre grupos é uma imersão se e somente se ele é um homomorfismo injetivo.

Algumas vezes escrevemos 1_A para designar a função identidade sobre dom(A). Claramente trata-se de um homomorfismo de A em A, na realidade um automorfismo de A. Dizemos que A é **isomorfa** a B, em símbolos $A \cong B$, se existe um isomorfismo de A para B.

Os seguintes fatos são quase todos conseqüências imediatas das definições.

Teorema 1.2.1. *Seja L uma assinatura.*

(a) *Se A, B, C são L-estruturas e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são homomorfismos, então a função composta gf é um homomorfismo de A para C. Se, ainda mais, f e g são ambas imersões então gf também o é.*

(b) *Se A e B são L-estruturas e $f : A \to B$ é um homomorfismo então $1_B f = f = f 1_A$.*

(c) *Sejam A, B, C L-estruturas. Então 1_A é um isomorfismo. Se $f : A \to B$ é um isomorfismo então a função inversa $f^{-1} : \mathrm{dom}(B) \to \mathrm{dom}(A)$ existe e é um isomorfismo de B para A. Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são isomorfismos então gf também o é.*

(d) *A relação $\cong$ é uma relação de equivalência sobre a classe de L-estruturas.*

(e) *Se A, B são L-estruturas, $f : A \to B$ é um homomorfismo e existem homomorfismos $g : B \to A$ e $h : B \to A$ tal que $gf = 1_A$ e $fh = 1_B$, então f é um isomorfismo e $g = h = f^{-1}$.*

Demonstração. (e) $g = g1_B = gfh = 1_A h = h$. Já que $gf = 1_A$, f é uma imersão. Dado que $fh = 1_B$, f é sobrejetora. □

Subestruturas

Se A e B são L-estruturas com $\mathrm{dom}(A) \subseteq \mathrm{dom}(B)$ e a função inclusão $i : \mathrm{dom}(A) \to \mathrm{dom}(B)$ for uma imersão, então dizemos que B é uma **extensão** de A, ou que A é uma **subestrutura** de B, em símbolos $A \subseteq B$. Note que se i é a função inclusão de $\mathrm{dom}(A)$ para $\mathrm{dom}(B)$, então a condição (2.1) acima diz que $c^A = c^B$ para cada constante c, condição (2.2) diz que $R^A = R^B \cap (\mathrm{dom}\, A)^n$ para cada símbolo de relação R, e finalmente condição (2.3) diz que $F^A = F^B|(\mathrm{dom}\, A)^n$ (a restrição de F^B a $(\mathrm{dom}\, A)^n$) para cada símbolo de função n-ária F.

Quando é que um conjunto de elementos de uma estrutura formam o domínio de uma subestrutura? O próximo lema nos dá um critério.

Lema 1.2.2. *Seja B uma L-estrutura e X um subconjunto de* $\mathrm{dom}(B)$. *Então as seguintes condições são equivalentes:*

(a) $X = \mathrm{dom}(A)$ *para algum* $A \subseteq B$.

(b) *Para toda constante c de L, $c^B \in X$; e para todo $n > 0$, todo símbolo de função n-ária F de L e toda n-upla $\bar{a}$ de elementos de X, $F^B(\bar{a}) \in X$.*

Se (a) *e* (b) *se verificam, então A é univocamente determinada.*

Demonstração. Suponha que (a) se verifica. Então para toda constante c de L, $c^B = c^A$ pela condição (2.1); mas $c^A \in \mathrm{dom}(A) = X$, logo $c^B \in X$. Igualmente, para cada símbolo de função n-ária F de L e cada n-upla $\bar{a}$ de elementos de X, $\bar{a}$ é uma n-upla em A e por isso $F^B(\bar{a}) = F^A(\bar{a}) \in \mathrm{dom}(A) = X$. Isto demonstra (b).

Reciprocamente, se (b) se verifica, então podemos definir A colocando $\mathrm{dom}(A) = X$, $c^A = c^B$ para cada constante c de L, $F^A = F^B|X^n$ para cada símbolo de função n-ária F de L, e $R^A = R^B \cap X^n$ para cada símbolo de relação n-ária R de L. Então $A \subseteq B$; além do mais esta é a única definição possível de A, dado que $A \subseteq B$ e $\mathrm{dom}(A) = X$. □

Seja B uma L-estrutura e Y um conjunto de elementos de B. Então segue-se facilmente do Lema 1.2.2 que existe uma única subestutura A de B cujo domínio inclui Y; chamamos A de **subestrutura de B gerada por** Y, ou a **envoltória** de Y em B, em símbolos $A = \langle Y \rangle_B$. Chamamos Y de um **conjunto de geradores** para A. Uma estrutura B é dita **finitamente gerada** se B é da forma $\langle Y \rangle_B$ para algum conjunto finito Y de elementos.

Quando o contexto permite, escrevemos simplesmente $\langle Y \rangle$ ao invés de $\langle Y \rangle_B$. Às vezes é conveniente listar os geradores Y como uma seqüência $\bar{a}$; então escrevemos $\langle \bar{a} \rangle_B$ para designar $\langle Y \rangle_B$.

Para muitos propósitos necessitaremos de saber a cardinalidade da estrutura $\langle Y \rangle_B$. Isto pode ser estimado como se segue. Definimos a **cardinalidade** de L, em símbolos $|L|$, como sendo o menor cardinal infinito $\geqslant$ ao número de símbolos em L. (Na verdade veremos no Exercício 2.1.7 abaixo que $|L|$ é igual ao número de fórmulas de primeira ordem de L, a menos de escolha de variáveis; esta é uma razão pela qual $|L|$ é tomada como sendo infinita mesmo quando L contém apenas um número finito de símbolos.

Advertência. Ocasionalmente é importante saber que uma assinatura L contém apenas um número finito de símbolos. Neste caso dizemos que L é **finita**, apesar da definição que acabamos de dar para $|L|$. Veja Exercício 6.

Teorema 1.2.3. *Seja B uma L-estrutura e Y um conjunto de elementos de B. Então $|\langle Y\rangle_B| \leqslant |Y| + |L|$.*

Demonstração. Vamos construir $\langle Y\rangle_B$ explicitamente, portanto demonstrar sua existência e unicidade ao mesmo tempo. Definimos um conjunto $Y_m \subseteq \text{dom}(B)$ para cada $m < \omega$, por indução sobre m:

$$\begin{aligned} Y_0 = \quad & Y \cup \{c^B : c \text{ uma constante de } L\}, \\ Y_{m+1} = \quad & Y_m \cup \{F^B(\bar{a}) :\ \text{para algum } n > 0,\ F \text{ é um símbolo de} \\ & \text{função } n\text{-ária } L \text{ e } \bar{a} \text{ é uma } n\text{-upla de elementos de } Y_m\}. \end{aligned}$$

Finalmente definimos $X = \bigcup_{m<\omega} Y_m$. Claramente X satisfaz a condição (b) do Lema 1.2.2, logo pelo mesmo lema existe uma única subestrutura A de B com $X = \text{dom}(A)$. Se A' é uma subestrutura qualquer de B com $Y \subseteq \text{dom}(A')$, então por indução sobre m vemos que cada Y_m está incluído em $\text{dom}(A')$ (pela implicação (a)⇒(b) no Lema 1.2.2), e por isso $X \subseteq \text{dom}(A')$. Por conseguinte A é a menor (e única) subestrutura de B cujo domínio inclui Y, abreviadamente $A = \langle Y\rangle_B$.

Agora vamos estimar a cardinalidade de A. Faça $\kappa = |Y| + |L|$. Claramente $|Y_0| \leqslant \kappa$. Para cada n fixo, se Z é um subconjunto de $\text{dom}(B)$ de cardinalidade $\leqslant \kappa$, então o conjunto

$$\{F^B(\bar{a}) :\ F \text{ é um símbolo de função } n\text{-ária } L \text{ e } \bar{a} \in Z^n\}$$

tem cardinalidade no máximo $\kappa \cdot \kappa^n = \kappa$, já que κ é infinito. Por conseguinte se $|Y_m| \leqslant \kappa$, então $|Y_{m+1}| \leqslant \kappa + \kappa = \kappa$. Logo por indução sobre m, cada $|Y_m| \leqslant \kappa$, e portanto $|X| \leqslant \omega \cdot \kappa = \kappa$. Como $|\langle Y\rangle_B| = |X|$ por definição, isto prova o teorema. □

Escolha de assinatura

Como dissemos anteriormente, um mesmo objeto matemático pode ser interpretado como uma estrutura de diversas maneiras. A mesma função ou relação pode ser nomeada por diferentes símbolos: por exemplo o elemento identidade em um grupo pode ser chamado e ou 1. Nós também temos alguma escolha até mesmo sobre quais elementos, funções ou relações devem ser nomeados. Um grupo certamente deveria ter um nome como $\cdot$ para a operação de produto; dever-se-ia também ter nomes como $^{-1}$ e 1 para o inverso e a identidade? Que tal [,] para o comutador, $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$?

Um princípio geral saudável é aquele que diz que, quando as coisas são iguais, *assinaturas devem ser escolhidas de tal forma que as noções de homomorfismo e subestrutura concordem com as noções usuais para os ramos relevantes da matemática.*

Por exemplo no caso de grupos, se a única operação nomeada é o produto $\cdot$, então as subestruturas de um grupo serão seus subsemigrupos, fechados sob $\cdot$ mas não necessariamente contendo inversos ou identidade. Se nomeamos $\cdot$ e a identidade 1, então as subestruturas serão os submonóides. Para assegurar que subestrutura coincide com subgrupo, precisamos também de introduzir um símbolo para $^{-1}$. Dado que os símbolos para $\cdot$ e $^{-1}$ são incluídos, obteríamos exatamente as mesmas subestruturas e homomorfismos se também incluíssemos um símbolo para o comutador; a maior parte dos teóricos de modelos usam a lâmina de Ockham e o deixam de fora.

Portanto para algumas classes de objetos existe uma escolha natural de assinatura. Para grupos a escolha natural é nomear $\cdot$, 1 (ou e) e $^{-1}$; chamamos esta de **assinatura de grupos**. Sempre assumiremos (a menos que algo seja dito em contrário) que anéis têm um 1. Portanto a escolha natural de assinatura para anéis é nomear $+$, $-$, $\cdot$, 0 e 1; chamamos esta de **assinatura de anéis**. A **assinatura de ordenações parciais** tem apenas o símbolo $\leqslant$. A **assinatura de reticulados** tem apenas $\wedge$ e $\vee$.

E se quiséssemos adicionar novos símbolos, por exemplo nomear um determinado elemento? As próximas definições tratam dessa situação.

Redução e expansão

Suponha que L^- e L^+ são assinaturas, e L^- é um subconjunto de L^+. Então se A é uma L^+-estrutura, podemos tornar A uma L^--estrutura simplesmente esquecendo os símbolos de L^+ que não estão em L^-. (Não removemos qualquer elemento de A, embora alguns elementos constantes em A podem deixar de ser elementos constantes na nova estrutura.) A L^--estrutura resultante é chamada de L^--**reduto** de A ou o **reduto de** A **para** L^-, em símbolos $A|L^-$. Se $f : A \to B$ é um homomorfismo de L^+-estruturas, então a mesma função f é também um homomorfismo $f : A|L^- \to B|L^-$ de L^--estruturas.

Quando A é uma L^+-estrutura e C é o seu L^--reduto, dizemos que A é uma **expansão** de C para L^+. Em geral C pode ter muitas expansões distintas para L^+ diferentes. Há uma notação útil embora imprecisa para expansões. Suponha que os símbolos que estão em L^+ mas não estão em L^- sejam as constantes c, d e um símbolo de função F; então c^A, d^A são respectivamente elementos a, b de A, e F^A é alguma operação f sobre dom(A). Escrevemos:

$$A = (C, a, b, f) \tag{2.5}$$

para expressar que A é uma expansão de C obtida pela adição de símbolos para nomear a, b e f. A notação é imprecisa porque ela não diz quais símbolos são usados para nomear a, b e f respectivamente; mas frequentemente a escolha de símbolos é irrelevante ou óbvia a partir do contexto.

Exercícios para a seção 1.2

1. Verifique todas as partes do Teorema 1.2.1.

2. Seja L uma assinatura e **K** uma classe de L-estruturas. Suponha que A e B estão em **K**, e que para toda estrutura C em **K** existem homomorfismos únicos $f : A \to C$ e $g : B \to C$. Mostre que existe um único isomorfismo de A para B.

3. Sejam A, B L-estruturas, X um subconjunto de dom(A) e $f : \langle X\rangle_A \to B$ e $g : \langle X\rangle_A \to B$ homomorfismos. Mostre que se $f|X = g|X$ então $f = g$.

4. Demonstre a seguinte afirmação, na qual todas as estruturas são supostas L-estruturas para alguma assinatura fixa L.

(a) Todo homomorfismo $f : A \to C$ pode ser fatorado como $f = hg$ para algum homomorfismo sobrejetor $g : A \to B$ e extensão $h : B \to C$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & C \arrow[dl, "h"] \\ & B & \end{tikzcd} \tag{2.6}$$

A única estrutura B é chamada de **imagem** *de g,* $\mathrm{im}\, g$ *para abreviar. Generalizando, dizemos que uma L-estrutura B é uma* **imagem homomórfica** *de A se existe um homomorfismo sobrejetor $g : A \to B$.*

(b) Toda imersão $f : A \to C$ pode ser fatorada como $f = hg$ onde g é uma extensão e h é um isomorfismo. *Trata-se de uma pequena parte da teoria de conjuntos que frequentemente é varrida para baixo do tapete. Ela diz que quando tivermos uma imersão de A em C, podemos assumir que A é uma subestrutura de C. A imersão dos racionais nos reais é um exemplo familiar.*

5. Sejam A e B L-estruturas com A uma subestrutura de B. Uma **retração** de B para A é um homomorfismo $f : B \to A$ tal que $f(a) = a$ para todo elemento a de A. Mostre que (a) se $f : B \to A$ é uma retração, então $f^2 = f$, (b) se B é uma L-estrutura qualquer e f é um endomorfismo de B tal que $f^2 = f$, então f é uma retração de B para uma subestrutura A de B.

6. Seja L uma assinatura finita sem símbolos de função. (a) Mostre que toda L-estrutura finitamente gerada é finita. (b) Mostre que para cada $n < \omega$ existem, a menos de isomorfismo, apenas um número finito de L-assinaturas de cardinalidade n.

7. Mostre que podemos definir a assinatura de corpos de tal forma que subestrutura = subcorpo, e homomorfismo = imersão de corpos, desde que façamos $0^{-1} = 0$. *A maioria dos matemáticos parecem resistir a isso, daí o costume normal é dar a corpos a mesma assinatura que se dá a anéis.*

8. Muitos teóricos de modelos requerem que o domínio de qualquer estrutura seja não-vazio. Como isso afetaria o Lema 1.2.2 e a definição de $\langle Y \rangle_B$?

9. Dê um exemplo de uma estrutura de cardinalidade ω_2 que tenha uma subestrutura de cardinalidade ω mas nenhuma subestrutura de cardinalidade ω_1.

1.3 Termos e fórmulas atômicas

No Capítulo 2 vamos introduzir um número de linguagens formais para falar de L-estruturas. Todas essas linguagens serão construídas a partir de fórmulas atômicas de L, que agora devemos definir.

Cada fórmula atômica será uma cadeia de símbolos incluindo os símbolos de L. Como os símbolos em L podem ser quaisquer tipos de objeto e não necessariamente expressões escritas, a idéia de uma 'cadeia de símbolos' tem que ser tomada com uma pitada de codificação em teoria dos conjuntos.

Termos

Toda linguagem tem um estoque de **variáveis**. São símbolos escritos v, x, y, z, t, x_0, x_1, etc., e um dos seus propósitos é servir como rótulos temporários para elementos de uma estrutura. Qualquer símbolo pode ser usado como uma variável, desde que ele ainda não tenha sido usado para algo diferente. A escolha de variáveis nunca é importante, e para os propósitos teóricos muitos teóricos de modelos as restringem às expressões do tipo v_0, v_1, v_2, ... com números naturais ou ordinais como índices.

Os **termos** da assinatura L são cadeias de símbolos definidos como se segue (onde assume-se que os símbolos '(', ')' e ',' não ocorrem em qualquer outra parte de L – daqui por diante observações como esta não serão mais levantadas).

(3.1) Toda variável é um termo de L.

(3.2) Toda constante de L é um termo de L.

(3.3) Se $n > 0$, F é um símbolo de função n-ária de L e $t_1, \ldots, t_n$ são termos de L então a expressão $F(t_1, \ldots, t_n)$ é um termo de L.

(3.4) Nada mais é um termo de L.

Um termo é dito **fechado** (cientistas da computação dizem **básico**) se nenhuma variável ocorre nele. A **complexidade** de um termo é o número de símbolos ocorrendo nele, contando cada ocorrência separadamente. (O que é importante é que se t ocorre como parte de s então s tem complexidade maior que a de t.)

Se introduzimos um termo t como $t(\bar{x})$, isto sempre significará que $\bar{x}$ é uma seqüência $(x_0, x_1, \ldots)$, possivelmente infinita, de variáveis distintas, e toda variável que ocorre em t está entre as variáveis em $\bar{x}$. Mais adiante no mesmo contexto poderemos escrever $t(\bar{s})$, onde $\bar{s}$ é uma seqüência de termos $(s_0, s_1, \ldots)$; então $t(\bar{s})$ denota o termo obtido a partir de t colocando-se s_0 no lugar de x_0, s_1 no lugar de x_1, etc., ao longo do termo t. (Por exemplo, se $t(x, y)$ é o termo $y + x$, então $t(0, 2y)$ é o termo $2y + 0$ e $(t(t(x, y), y)$ é o termo $y + (y + x)$.)

Para fazer com que variáveis e termos representem elementos de uma estrutura, usamos a seguinte convenção. Seja $t(\bar{x})$ um termo de L, onde $\bar{x} = (x_0, x_1, \ldots)$. Seja A uma L-estrutura e $\bar{a} = (a_0, a_1, \ldots)$ uma seqüência de elementos de A; assumimos que $\bar{a}$ é pelo menos tão longa quanto $\bar{x}$. Então $t^A(\bar{a})$ (ou $t^A[\bar{a}]$ quando precisarmos de uma notação mais diferenciada) é definido como sendo o elemento de A que é nomeado por t quando x_0 é interpretado como um nome de a_0, e x_1 como um nome de a_1, e assim por diante. Mais precisamente, usando indução sobre a complexidade de t,

(3.5) se t é a variável x_i, então $t^A[\bar{a}]$ é a_i,

(3.6) se t é uma constante c então $t^A[\bar{a}]$ é o elemento c^A,

(3.7) se t é da forma $F(s_1, \ldots, s_n)$ onde cada s_i é um termo $s_i(\bar{x})$, então $t^A[\bar{a}]$ é o elemento $F^A[{s_1}^A[\bar{a}], \ldots, {s_n}^A[\bar{a}])$.

(Cf. (1.2), (1.4) acima.) Se t é um termo fechado então $\bar{a}$ não tem qualquer efeito, e aí escrevemos simplesmente t^A para designar $t^A[\bar{a}]$.

Fórmulas atômicas

As **fórmulas atômicas** de L são as cadeias de símbolos dadas por (3.8) e (3.9) abaixo.

(3.8) Se s e t são termos de L, então a cadeia $s = t$ é uma fórmula atômica de L.

(3.9) Se $n > 0$, R é um símbolo de relação n-ária de L e $t_1, \ldots, t_n$ são termos de L então a expressão $R(t_1, \ldots, t_n)$ é uma fórmula atômica de L.

(Note que o símbolo '$=$' não é suposto ser um símbolo de relação na assinatura.) Uma **sentença atômica** de L é uma fórmula atômica na qual não ocorrem variáveis.

Tal qual no caso dos termos, se introduzimos uma fórmula atômica ϕ como $\phi(\bar{x})$, então $\phi(\bar{s})$ denota a fórmula atômica obtida a partir de ϕ colocando-se termos da seqüência $\bar{s}$ no lugar de todas as ocorrências das variáveis correspondentes de $\bar{x}$.

Se as variáveis $\bar{x}$ em uma fórmula atômica $\phi(\bar{x})$ são interpretadas como nomes de elementos $\bar{a}$ em uma estrutura A, então ϕ faz um enunciado sobre A. O enunciado pode ser verdadeiro ou falso. Se for verdadeiro, dizemos que ϕ é **verdadeiro de $\bar{a}$ em** A, ou que $\bar{a}$ **satisfaz ϕ em** A, em símbolos

$$A \vDash \phi[\bar{a}] \qquad \text{ou equivalentemente} \qquad A \vDash \phi(\bar{a}).$$

Podemos dar uma definição formal a esta relação $\vDash$. Seja $\phi(\bar{x})$ uma fórmula atômica de L com $\bar{x} = (x_0, x_1, \ldots)$. Seja A uma L-estrutura e $\bar{a}$ uma seqüência $(a_0, a_1, \ldots)$ de elementos de A; vamos assumir que $\bar{a}$ é pelo menos tão longa quanto $\bar{x}$. Então

(3.10) se ϕ é a fórmula $s = t$ onde $s(\bar{x})$, $t(\bar{x})$ são termos, então $A \vDash \phi[\bar{a}]$ sse $s^A[\bar{a}] = t^A[\bar{a}]$,

(3.11) se ϕ é a fórmula $R(s_1, \ldots, s_n)$ onde $s_1(\bar{x})$, ..., $s_n(\bar{x})$ são termos, então $A \vDash \phi[\bar{a}]$ sse a n-upla ordenada $({s_1}^A[\bar{a}], \ldots, {s_n}^A[\bar{a}])$ pertence a R^A.

(Cf. (1.3) acima.) Quando ϕ é uma sentença atômica, podemos omitir a seqüência $\bar{a}$ e escrever simplesmente $A \vDash \phi$ no lugar de $A \vDash \phi[\bar{a}]$.

Dizemos que A é um **modelo** de ϕ, ou que ϕ é **verdadeiro em** A, se $A \vDash \phi$. Quando T é um conjunto de sentenças atômicas, dizemos que A é um **modelo** de T (em símbolos, $A \vDash T$) is A é um modelo de toda sentença atômica em T.

Teorema 1.3.1. *Sejam A e B L-estruturas e f uma função de* $\mathrm{dom}(A)$ *para* $\mathrm{dom}(B)$.

(a) *Se f é um homomorfismo então, para todo termo $t(\bar{x})$ de L e upla $\bar{a}$ de A, $f(t^A[\bar{a}]) = t^B[f\bar{a}]$.*

(b) *f é um homomorfismo se e somente se, para toda fórmula atômica $\phi(\bar{x})$ de L e upla $\bar{a}$ de A,*

(3.12) $$A \vDash \phi[\bar{a}] \;\Rightarrow\; B \vDash \phi[f\bar{a}].$$

(c) *f é uma imersão se e somente se, para toda fórmula atômica $\phi(\bar{x})$ de L e upla $\bar{a}$ de A,*

(3.13) $$A \vDash \phi[\bar{a}] \;\Leftrightarrow\; B \vDash \phi[f\bar{a}].$$

Demonstração. (a) pode ser facilmente demonstrado por indução sobre a complexidade de t, usando (3.5)–(3.7).

(b) Suponha inicialmente que f é um homomorfismo. Como um exemplo típico, suponha que $\phi(\bar{x})$ é $R(s, t)$, onde $s(\bar{x})$ e $t(\bar{x})$ são termos. Assuma $A \vDash \phi[\bar{a}]$. Então por (3.11) nós temos

(3.14) $$(s^A[\bar{a}], t^A[\bar{a}]) \in R^A.$$

Então pela parte (a) e pelo fato de que f é um homomorfismo (ver (2.2) acima),

(3.15) $$(s^B[f\bar{a}], t^B[f\bar{a}]) = (f(s^A[\bar{a}]), f(t^A[\bar{a}])) \in R^B.$$

Logo $B \vDash \phi[f\bar{a}]$ por (3.11) novamente. Essencialmente a mesma demonstração funciona para toda fórmula atômica ϕ.

Para a recíproca, novamente tomamos um exemplo típico. Assuma que (3.12) se verifica para toda sentença atômica ϕ e seqüências $\bar{a}$. Suponha que $(a_0, a_1) \in R^A$. Então escrevendo $\bar{a}$ no lugar de (a_0, a_1), nós temos $A \models R(x_0, x_1)[\bar{a}]$. Então (3.12) implica que $B \models R(x_0, x_1)[f\bar{a}]$, que devido a (3.11) implica que $(fa_0, fa_1) \in R^B$ como requerido. Por conseguinte f é um homomorfismo.

(c) é demonstrado como (b), mas usando (2.4) no lugar de (2.2). □

Uma variante do Teorema 1.3.1(c) é frequentemente útil. Por uma **fórmula atômica negada** de L queremos dizer uma cadeia $\neg\phi$ onde ϕ é uma fórmula atômica de L. Lemos o símbolo $\neg$ como 'não' e definimos

(3.16) '$A \models \neg\phi[\bar{a}]$' se verifica sse '$A \models \phi[\bar{a}]$' não se verifica.

onde A é uma L-estrutura qualquer, ϕ é uma fórmula atômica e $\bar{a}$ é uma seqüência de A. Um **literal** é uma fórmula atômica ou uma fórmula atômica negada; ele é um **literal fechado** se não contém variáveis.

Corolário 1.3.2. *Sejam A e B L-estruturas e f uma função de* dom(A) *para* dom(B). *Então f é uma imersão se e somente se, para todo literal $\phi(\bar{x})$ de L, e seqüência $\bar{a}$ de A,*

(3.17) $$A \models \phi[\bar{a}] \Rightarrow B \models \phi[f\bar{a}].$$

Demonstração. Imediata de (c) do teorema e (3.16). □

A álgebra de termos

O oráculo délfico dizia 'Conhece-te a ti mesmo'. Termos podem fazer isso – eles podem descrever a si próprios. Seja L uma assinatura qualquer e X um conjunto de variáveis. Definimos a **álgebra de termos de L com base X** como sendo a seguinte L-estrutura A. O domínio de A é o conjunto de todos os termos de L cujas variáveis estão em X. Colocamos

(3.18) $c^A = c$ para cada constante c de L,

(3.19) $F^A(\bar{t}) = F(\bar{t})$ para cada símbolo de função n-ária F de L e n-upla $\bar{t}$ de elementos de dom(A),

(3.20) R^A é vazio para cada símbolo de relação R de L.

A álgebra de termos de L com base X é também conhecida como a **L-estrutura absolutamente livre com base X**.

Exercícios para a seção 1.3

1. Seja B uma L-estrutura e Y um conjunto de elementos de B. Mostre que $\langle Y\rangle_B$ consiste daqueles elementos de B que têm a forma $t^B[\bar{b}]$ para algum termo $t(\bar{x})$ de L e alguma upla $\bar{b}$ de elementos de Y. [Use a construção de $\langle Y\rangle_B$ definida na demonstração do Teorema 1.2.3.]

2. (a) Se $t(x, y, z)$ é $F(G(x, z), x)$, que são $t(z, y, x)$, $t(x, z, z)$, $t(F(x, x), G(x, x), x)$, $t(t(a, b, c), b, c)$?
(b) Seja A a estrutura $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle$ onde $\mathbb{N}$ é o conjunto de números naturais $0, 1, \ldots$. Seja $\phi(x, y, z, u)$ a fórmula atômica $x + z = y \cdot u$ e seja $t(x, y)$ o termo $y \cdot y$. Quais das seguintes relações se verificam? $A \models \phi(0, 1, 2, 3)$; $A \models \phi[1, 5, t^A[4, 2], 1]$; $A \models \phi[9, 1, 16, 25]$; $A \models$

$\phi[56, t^A[9, t^A[0, 3]], t^A[5, 7], 1]$. [Respostas: $F(G(z, x), z)$, $F(G(x, z), x)$, $F(G(F(x, x), x), F(x, x))$, $F(G(F(G(a, c), a), c)$, $F(G(a, c), a))$; não, sim, sim, não.]

3. Seja A uma L-estrutura, $\bar{a} = (a_0, a_1, \ldots)$ uma seqüência de elementos de A e $\bar{s} = (s_0, s_1, \ldots)$ uma seqüência de termos fechados de L tal que, para cada i, $s_i^A = a_i$. Mostre que (a) para cada termo $t(\bar{x})$ de L, $t(\bar{s})^A = t^A[\bar{a}]$, (b) para cada fórmula atômica $\phi(\bar{x})$ de L, $A \vDash \phi(\bar{s}) \Leftrightarrow A \vDash \phi[\bar{a}]$.

4. Sejam A e B L-estruturas, $\bar{a}$ uma seqüência de elementos que geram A e f uma função de dom(A) para dom(B). Mostre que f é um homomorfismo se e somente se para toda fórmula atômica $\phi(\bar{x})$ de L, $A \vDash \phi[\bar{a}]$ implica $B \vDash \phi[f\bar{a}]$.

5. (Lema da leitura única). Seja L uma assinatura e t um termo de L. Mostre que t pode ser construído de uma única forma. [Em outras palavras, (a) se t é uma constante então t também não é da forma $F(\bar{s})$, (b) se t é $F(s_0, \ldots, s_{m-1})$ e $G(r_0, \ldots, r_{n-1})$ então $F = G$, $m = n$ e para cada $i < n$, $s_i = r_i$. Para cada ocorrência σ de um símbolo em t, defina ${}^{\#}(\sigma)$ como sendo o número de ocorrências de '(' à esquerda de σ, menos o número de ocorrências de ')' à esquerda de σ; use ${}^{\#}(\sigma)$ para identificar as vírgulas relacionadas com F em t.]

6. Seja A a álgebra de termos de L com base X. Mostre que para cada termo $t(\bar{x})$ de L e cada upla $\bar{s}$ de elementos de dom(A), $t^A[\bar{s}] = t(\bar{s})$.

7. Sejam A a álgebra de termos de assinatura L com base X, e B uma L-estrutura qualquer. Mostre que para cada função $f : X \to$ dom(B) existe um único homomorfismo $g : A \to B$ que concorda com f em X. Mostre também que se $t(\bar{x})$ é um termo qualquer em dom(A) então $t^B[f\bar{x}] = g(t)$.

1.4 Parâmetros e diagramas

As convenções para interpretar variáveis são algumas das mais partes mais aborrecidas da teoria dos modelos. Podemos evitá-las, a um certo preço. Ao invés de interpretar uma variável como um nome de um elemento b, podemos adicionar uma nova constante para b à assinatura. O preço que pagamos é que a linguagem muda toda vez que um outro elemento é nomeado. Quando constantes são adicionadas à assinatura, as novas constantes e os elementos que elas nomeiam são chamados de **parâmetros**.

Suponha por exemplo que A é uma L-estrutura, $\bar{a}$ é uma seqüência de elementos de A, e desejamos nomear os elementos em $\bar{a}$. Então escolhemos uma seqüência $\bar{c}$ de novos símbolos de constante distintos, do mesmo comprimento que $\bar{a}$, e formamos a assinatura $L(\bar{c})$ pela adição das constantes $\bar{c}$ a L. Na notação de (2.5), $(A, \bar{a})$ é uma $L(\bar{c})$-estrutura, e cada elemento a_i é $c_i^{(A,\bar{a})}$.

Igualmente se B é uma outra L-estrutura e $\bar{b}$ é uma seqüência de elementos de B de mesmo comprimento que $\bar{c}$, então existe uma $L(\bar{c})$-estrutura $(B, \bar{b})$ na qual estas mesmas constantes c_i nomeiam os elementos de $\bar{b}$. O próximo lema é sobre esta situação. Vem direto das definições, é frequentemente utilizado de forma silenciosa.

Lema 1.4.1. *Sejam A, B L-estruturas e suponha que $(A, \bar{a})$, $(B, \bar{b})$ são $L(\bar{c})$-estruturas. Então um homomorfismo $f : (A, \bar{a}) \to (B, \bar{b})$ é a mesma coisa que um homomorfismo $f : A \to B$ tal que $f\bar{a} = \bar{b}$. Igualmente uma imersão $f : (A, \bar{a}) \to (B, \bar{b})$ é a mesma coisa que uma imersão $f : A \to B$ tal que $f\bar{a} = \bar{b}$.*

□

Na situação acima, se $t(\bar{x})$ é um termo de L então $t^A[\bar{a}]$ e $t(\bar{c})^{(A,\bar{a})}$ são o mesmo elemento; e se $\phi(\bar{x})$ é uma fórmula atômica então $A \vDash \phi[\bar{a}] \Leftrightarrow (A, \bar{a}) \vDash \phi(\bar{c})$. Estas duas notações – o colchete e a notação de parâmetro – servem o mesmo propósito, e é um peso sobre a paciência de qualquer um manter as duas separadas. O seguinte meio-termo funciona bem na prática. Usamos elementos a_i como *constantes nomeando a si próprias*. A assinatura expandida é então $L(\bar{a})$, e escrevemos $t^A(\bar{a})$ e $A \vDash \phi(\bar{a})$ com a consciência leve. Deve-se tomar cuidado quando $\bar{a}$ contém repetições, ou quando duas $L(\bar{c})$-estruturas separadas estão sob discussão. Por segurança retenho a notação com os colchetes durante as próximas seções.

Seja $\bar{a}$ a seqüência de elementos de A. Dizemos que $\bar{a}$ **gera** A, em símbolos $A = \langle \bar{a} \rangle_A$, se A é gerada pelo conjunto de todos os elementos em $\bar{a}$. Suponha que A é uma L-estrutura, $(A, \bar{a})$ é uma $L(\bar{c})$-estrutura e $\bar{a}$ gera A. Então (cf. Exercício 1 adiante) todo elemento de A é da forma $t^{(A,\bar{a})}$ para algum termo fechado t de $L(\bar{c})$; logo todo elemento de A tem um nome em $L(\bar{c})$. O conjunto de todos os literais fechados de $L(\bar{c})$ que são verdadeiros em $(A, \bar{a})$ é chamado de **diagrama** (de Robinson) de A, em símbolos diag(A). O conjunto de todas as sentenças atômicas de $L(\bar{c})$ que são verdadeiras em $(A, \bar{a})$ é chamado de **diagrama positivo** de A, em símbolos diag$^+(A)$.

Note que diag(A) e diag$^+(A)$ não são univocamente determinados, porque em geral existem muitas maneiras de escolher $\bar{a}$ e $\bar{c}$ tal que $\bar{a}$ gera A. Mas isso nunca tem grande importância. Existe sempre ao menos uma escolha possível de $\bar{a}$ e $\bar{c}$: simplesmente liste todos os elementos de A sem repetição.

Diagramas e diagramas positivos devem ser pensados como uma generalização das tabelas de multiplicação de grupos. Se conhecemos diag(A) ou diag$^+(A)$, conhecemos A a menos de isomorfismo. O nome 'diagrama' é devido a Abraham Robinson, que foi o primeiro praticante da teoria dos modelos a usar diagramas sistematicamente. É um nome um pouco infeliz, porque nos convida a fazer uma confusão com diagramas no sentido de figuras com flechas, como em teoria das categorias. Na verdade o próximo resultado, que deveremos usar várias vezes, é sobre diagramas em ambos os sentidos.

Lema 1.4.2 *(Lema do diagrama).* *Sejam A e B L-estruturas, $\bar{c}$ uma seqüência de constantes, e $(A, \bar{a})$ e $(B, \bar{b})$ $L(\bar{c})$-estruturas. Então* (a) *e* (b) *são equivalentes.*
(a) *Para toda sentença atômica ϕ de $L(\bar{c})$, se $(A, \bar{a}) \vDash \phi$ então $(B, \bar{b}) \vDash \phi$.*
(b) *Existe um homomorfismo $f : \langle \bar{a} \rangle_A \to B$ tal que $f\bar{a} = \bar{b}$.*
O homomorfismo f em (b) *é único se ele existe; é uma imersão se e somente se*
(c) *para toda sentença atômica ϕ de $L(\bar{c})$, $(A, \bar{a}) \vDash \phi \Leftrightarrow (B, \bar{b}) \vDash \phi$.*

Demonstração. Assuma (a). Dado que a função inclusão imerge $\langle \bar{a} \rangle_A$ em A, o teorema 1.3.1(c) diz que em (a) podemos substituir A por $\langle \bar{a} \rangle_A$. Logo, sem perda de generalidade, podemos supor que $A = \langle \bar{a} \rangle_A$. Pelo Lema 1.4.1, para demonstrar (b) basta encontrar um homomorfismo $f : (A, \bar{a}) \to (B, \bar{b})$. Definimos f como se segue. Como $\bar{a}$ gera A, cada elemento de A é da forma $t^{(A,\bar{a})}$ para algum termo fechado t de $L(\bar{c})$. Faça

$$f(t^{(A,\bar{a})}) = t^{(B,\bar{b})}. \tag{4.1}$$

A definição é segura, já que $s^{(A,\bar{a})} = t^{(A,\bar{a})}$ implica que $(A, \bar{a}) \vDash s = t$, logo $(B, \bar{b}) \vDash s = t$ por (a) e por isso $s^{(B,\bar{b})} = t^{(B,\bar{b})}$. Então f é um homomorfismo por (a) e pelo Teorema 1.3.1(b), o que demonstra (b). Já que qualquer homomorfismo f de $(A, \bar{a})$ para $(B, \bar{b})$ deve satisfazer (4.1), f é único em (b). A recíproca (b)⇒(a) segue imediatamente do Teorema 1.3.1(b).

O argumento para imersões e (c) é semelhante, usando Teorema 1.3.1(c). □

O Lema 1.4.2 não menciona diagramas de Robinson diretamente, por isso deixe-me tornar a conexão explícita. Suponha que $\bar{a}$ gera A. Então a implicação (a)⇒(b) no lema diz que A pode ser mapeado homomorficamente para um reduto de B sempre que $B \models \text{diag}^+(A)$. Da mesma forma a última parte do lema diz que se $B \models \text{diag}(A)$ então A pode ser imerso em um reduto de B.

Exercícios para a seção 1.4

1. Seja B uma L-estrutura. Se $\bar{b}$ é uma seqüência de elementos de B e $\bar{c}$ são parâmetros tais que $(B, \bar{b})$ é uma $L(\bar{c})$-estrutura, demonstre que $\langle \bar{b} \rangle_B$ consiste daqueles elementos de B que têm a forma $t^{(B,\bar{b})}$ para algum termo fechado t de $L(\bar{c})$.

2. Sejam A, B L-estruturas e $\bar{a}$ uma seqüência de elementos de A. Seja g uma função dos elementos de $\bar{a}$ para dom(B) tal que para toda sentença atômica ϕ de $L(\bar{a})$, $(A, \bar{a}) \models \phi$ implica $(B, g\bar{a}) \models \phi$. Mostre que g tem uma única extensão para um homomorfismo $g' : \langle \bar{a} \rangle_A \to B$. (Na prática toma-se frequentemente g e g' como idênticos.)

3. Sejam $(A, \bar{a})$ e $(B, \bar{b})$ $L(\bar{c})$-estruturas que satisfazem exatamente às mesmas sentenças atômicas de $L(\bar{c})$. Suponha também que as L-estruturas A e B são geradas por $\bar{a}$, $\bar{b}$ respectivamente. Mostre que existe um homomorfismo $f : A \to B$ tal que $f\bar{a} = \bar{b}$.

1.5 Modelos canônicos

Na seção anterior vimos como se pode traduzir qualquer estrutura em um conjunto de sentenças atômicas. Acontece que existe um bom caminho de volta: podemos converter qualquer conjunto de sentenças atômicas em uma estrutura.

Seja L uma assinatura, A uma L-estrutura e T o conjunto de todas as sentenças atômicas de L que são verdadeiras em A. Então T tem as duas seguintes propriedades:

(5.1) Para todo termo fechado t de L, a sentença atômica $t = t$ pertence a T.

(5.2) Se $\phi(x)$ é uma fórmula atômica de L e a equação $s = t$ pertence a T, então $\phi(s) \in T$ se e somente se $\phi(t) \in T$.

Qualquer conjunto T de sentenças atômicas que satisfaça (5.1) e (5.2) será chamado de $=$-**fechado** (em L).

Lema 1.5.1. *Seja T um conjunto $=$-fechado de sentenças atômicas de L. Então existe uma L-estrutura A tal que*
(a) *T é o conjunto de todas as sentenças atômicas de L que são verdadeiras em A,*
(b) *todo elemento de A é da forma t^A para algum termo fechado t de L.*

Demonstração. Seja X o conjunto de todas os termos fechados de L. Definimos a relação $\sim$ sobre X da seguinte forma

(5.3) $$s \sim t \quad \text{sse} \quad s = t \in T.$$

Afirmamos que $\sim$ é uma relação de equivalência. (i) Por (5.1), $\sim$ é reflexiva. (ii) Suponha que $s \sim t$; então $s = t \in T$. Mas se $\phi(x)$ é a fórmula $x = s$, então $\phi(s)$ é

$s = s$ que pertence a T por (5.1); logo por (5.2), T também contém $\phi(t)$, que é $t = s$. Por conseguinte $t \sim s$. (iii) Suponha que $s \sim t$ e $t \sim r$. Então seja $\phi(x)$ a fórmula $s = x$. Por hipótese ambas $\phi(t)$ e $t = r$ estão em T, logo por (5.2) T também contém $\phi(r)$, que é $s = r$. Por conseguinte $s \sim r$. Isto prova a afirmação.

Para cada termo fechado t seja $t^\sim$ a classe de equivalência de t sob $\sim$, e seja Y o conjunto de todas as classes de equivalência $t^\sim$ com $t \in X$. Definiremos uma L-estrutura A com $\mathrm{dom}(A) = Y$.

Primeiramente, para cada constante c de L colocamos $c^A = c^\sim$. Depois, se $0 < n < \omega$ e F é um símbolo de função n-ária de L, definimos F^A por

(5.4) $$F^A({s_0}^\sim, \dots, {s_{n-1}}^\sim) = (F(s_0, \dots, s_{n-1}))^\sim.$$

É preciso verificar se (5.4) é uma definição segura. Suponha que $s_i \sim t_i$ para cada $i < n$. Então através de n aplicações de (5.2) à sentença $F(s_0, \dots, s_{n-1}) = F(s_0, \dots, s_{n-1})$, que pertence a T por (5.1), chegamos à conclusão que a equação $F(s_0, \dots, s_{n-1}) = F(t_0, \dots, t_{n-1})$ pertence a T. Por conseguinte $F(s_0, \dots, s_{n-1})^\sim = F(t_0, \dots, t_{n-1})^\sim$. Isto demonstra que a definição (5.4) é segura.

Finalmente definimos a relação R^A, onde R é um símbolo de relação n-ária qualquer de L, por

(5.5) $$({s_0}^\sim, \dots, {s_{n-1}}^\sim) \in R^A \quad \text{sse} \quad R(s_0, \dots, s_{n-1}) \in T.$$

(5.5) é justificada da mesma maneira que (5.4), e ela completa a descrição da L-estrutura A.

Agora é fácil provar por indução sobre a complexidade de t, usando (3.6) e (3.7) da seção 1.3, que para todo termo fechado t de L,

(5.6) $$t^A = t^\sim.$$

Logo inferimos que se s e t são termos fechados quaisquer de L então

(5.7) $$A \models s = t \quad \Leftrightarrow \quad s^A = t^A \quad \Leftrightarrow \quad s^\sim = t^\sim \quad \Leftrightarrow \quad s = t \in T.$$

Juntamente com um argumento semelhante para sentenças atômicas da forma $R(t_0, \dots, t_{n-1})$, usando (3.11) da seção 1.3, isto demonstra que T é o conjunto de todas as sentenças atômicas de L que são verdadeiras em A. Também por (5.6) todo elemento de A é da forma t^A para algum termo fechado t de L. □

Agora se T é um conjunto qualquer de sentenças atômicas de L, existe pelo menos um conjunto U de sentenças atômicas de L que contém T e é $=$-fechado em L. Chamamos U de **$=$-fecho** de T em L. Qualquer L-estrutura que é um modelo de U tem que ser também um modelo de T já que $T \subseteq U$.

Teorema 1.5.2. *Para qualquer assinatura L, se T é um conjunto de sentenças atômicas de L então existe uma L-estrutura A tal que*
(a) $A \models T$,
(b) *todo elemento de A é da forma t^A para algum termo fechado t de L,*
(c) *se B é uma L-estrutura e $B \models T$ então existe um único homomorfismo $f : A \to B$.*

Demonstração. Aplique o lema ao $=$-fecho U de T para obter a L-estrutura A. Então (a) e (b) são óbvios. Agora $A = \langle \varnothing \rangle_A$ por (b). Logo (c) seguirá do lema do diagrama (Lema 1.4.2) se pudermos mostrar que toda sentença atômica que é verdadeira em A é verdeira em todos os modelos B de T. Pela escolha de A, toda sentença verdadeira em A pertence a U. O conjunto de todas as sentenças atômicas que são verdadeiras em um modelo B de T é um conjunto $=$-fechado contendo T, logo ele deve conter o $=$-fecho de T, que é U. □

Pela cláusula (c), o modelo A de T no Teorema 1.5.2 é único a menos de isomorfismo. (Veja Exercício 1.2.2) Chamamos esse modelo de **modelo canônico** de T. Note que ele será a L-estrutura vazia se e somente se L não tem símbolos de constante.

Algumas vezes – por exemplo em programação em lógica – não se inclui equações como fórmulas atômicas. Nessa situação o modelo canônico é ainda mais fácil de construir, porque não existe a necessidade de fatorar uma relação de equivalência. Por isso obtemos o que ficou conhecido como o **universo de Herbrand** de um conjunto de sentenças atômicas.

Aqui vai um exemplo no extremo oposto, onde todas as sentenças atômicas são equações.

Exemplo 1: ***Adicionando raízes de polinômios a um corpo.*** Seja F um corpo e $p(X)$ um polinômio irredutível sobre F no indeterminado X. Podemos considerar $F[X]$ como uma estrutura na assinatura de anéis com constantes adicionadas para X e todos os elementos de F. Seja T o conjunto de todas as equações que são verdadeiras em $F[X]$. (Por exemplo se a é $b \cdot (c + d)$ em $F[X]$, então T contém a equação '$a = b \cdot (c + d)$'. Além disso anéis satisfazem a lei $1 \cdot x = x$, logo T contém a equação $1 \cdot t = t$ para todo termo fechado t.) Então T é um conjunto de sentenças atômicas, e a equação '$p(X) = 0$' é uma outra sentença atômica. Seja C o modelo canônico do conjunto $T \cup \{p(X) = 0\}$. Então C é uma imagem homomórfica de $F[X]$, porque ele é um modelo de T e todo elemento é nomeado por um termo fechado. Em particular C é um anel; além do mais '$p(X) = 0$' se verifica em C, e por isso todo elemento do ideal I em $F[X]$ gerado por $p(X)$ vai a 0 em C. Seja θ uma raiz qualquer de p; então a extensão de corpo $F[\theta]$ é um modelo de $T \cup \{p(X) = 0\}$ também, com X lido como sendo um nome para θ. Pelo Teorema 1.5.2(c), $F[\theta]$ é uma imagem homomórfica de C. Como $F[\theta] = F[X]/I$, segue-se que C é isomorfa a $F[\theta]$.

Exercícios para a seção 1.5

1. Mostre que a propriedade de ser $=$-fechado não é alterada se modificarmos 'se e somente se' em (5.2) por 'se . . . então'.

2. Seja T um conjunto de literais fechados de uma assinatura L. Mostre que (a) é equivalente a (b).
(a) Alguma L-estrutura é um modelo de T.
(b) Se $\neg\phi$ é uma sentença atômica negada em T, então ϕ não pertence ao $=$-fecho do conjunto de sentenças atômicas em T.

3. Seja T um conjunto finito de literais fechados de uma assinatura L. Mostre que o item (a) do Exercício 2 é equivalente a (c) Alguma L-estrutura finita é um modelo de T.
[Suponha que $A \models T$. Seja X o conjunto de todos os termos fechados que ocorrem como partes das sentenças em T, incluindo aqueles que ocorrem dentro de outros termos. Escolha um $a_0 \in \text{dom}(A)$. Defina uma estrutura A' com domínio $\{t^A : t \in X\} \cup \{a_0\}$ tal que $A' \models T$.]

Leitura adicional

Leitores que sentirem necessidade de uma base mais sólida em lógica elementar se darão conta de que existem diversos textos excelentes disponíveis. Para nomear dois:

Cori, R. e Lascar, D., *Logique Mathématique, cours et exercices*. Paris Masson 1994 (dois volumes).

Ebbinghaus, H. D., Flum, J. & Thomas, W. *Mathematical logic*. New York: Springer-Verlag, 1984.

Dois artigos interessantes sobre a base histórica e filosófica de teoria dos modelos são os seguintes:

Demopoulos, W. Frege, Hilbert, and the conceptual structure of model theory. *History and Philosophy of Logic*, **15** (1994), 211–225.

Hintikka, J. On the development of the model-theoretical tradition in logical theory. *Synthese*, **77** (1988), 1–16.

Capítulo 2

Classificando estruturas

> I must get into this stone world now.
> Ratchel, striae, relationships of tesserae,
> Inumerable shades of grey ...
> I try them with the old Norn words – hraun
> Duss, rønis, queedaruns, kollyarum ...
>
> *Hugh MacDiarmid, On a raised beach*

Agora que temos estruturas bem à nossa frente, a necessidade maior é começar a classificá-las e classificar suas características. Classificar é uma espécie de definir. A maior parte das classificações matemáticas é feita por axiomas ou pela definição de equações – em breve, por fórmulas. Este capítulo poderia ter sido intitulado 'A teoria elementar da classificação matemática por fórmulas'.

Observe três maneiras das quais os matemáticos usam fórmulas. Primeiro, um matemático escreve a equação '$y = 4x^2$'. Ao escrever esta equação nomeia-se um conjunto de pontos no plano, i.e. um conjunto de pares ordenados de números reais. Como diria um praticante da teoria dos modelos, a equação *define uma relação* 2*-ária sobre os reais*. Estudamos este tipo de definição na seção 2.1.

Ou, em segundo lugar, um matemático escreve as leis

(*) Para todo x, y e z, $x \leqslant y$ e $y \leqslant z$ implica $x \leqslant z$;
para todo x e y, exatamente um destes se verifica: $x \leqslant y$, ou $y \leqslant x$, ou $x = y$.

Ao fazer isto *nomeia-se uma classe de relações*, a saber aquelas relações $\leqslant$ para as quais (*) é verdadeira. A seção 2.2 lista mais alguns exemplos deste tipo de nomeação. Tais exemplos cobrem a maioria dos ramos de álgebra.

Terceiro, um matemático define um **homomorfismo** de um grupo G para um grupo H como sendo uma função de G para H tal que $x = y \cdot z$ implica $f(x) = f(y) \cdot f(z)$. Aqui a equação $x = y \cdot z$ *define uma classe de funções*. Veja seção 2.5 para mais exemplos.

Muitos dos fundadores da teoria dos modelos quiseram entender como a linguagem funciona em matemática, e como ela deveria fazê-lo. (Pode-se mencionar Frege, Padoa, Russell, Gödel e Tarski entre outros.) Mas um ramo bem sucedido da matemática necessita mais que apenas um desejo de corrigir e catalogar as coisas. É necessário um programa de problemas que sejam interessantes e não tão difíceis de resolver. O primeiro programa sistemático da teoria dos modelos ficou conhecido como 'eliminação de quantificadores'. Seu propósito era encontrar, em qualquer situação matemática concreta, o conjunto mais simples de fórmulas que daria todas as classificações de que se precisa. Thoralf Skolem pôs esse programa em andamento em 1919. Um subproduto recente do programa é o estudo de unificação em ciência da computação.

2.1 Subconjuntos definíveis

Começamos com uma única estrutura A. Quais são os conjuntos interessantes de elementos de A? Generalizando, quais são as relações interessantes sobre os elementos de A?

Exemplo 1: ***Curvas algébricas.*** Considere o corpo $\mathbb{R}$ dos reais como uma estrutura. Uma curva algébrica no plano real é um conjunto de pares ordenados de elementos de $\mathbb{R}$ dado pela equação $p(x, y) = 0$, onde p é um polinômio com coeficientes em $\mathbb{R}$. A parábola $y = x^2$ é talvez o exemplo mais citado; esta equação pode ser escrita sem nomear qualquer elemento de $\mathbb{R}$ como parâmetro.

Exemplo 2: ***Conjuntos recursivos de números naturais.*** Para isto usamos a estrutura $\mathbb{N} = (\omega, 0, 1, +, \cdot, <)$ de números naturais. Qualquer subconjunto recursivo X de ω pode ser definido, por exemplo, por um algoritmo para verificar se um dado número pertence a X. Mas, diferentemente do Exemplo 1, a definição geralmente será muito mais complicada para ser escrita como uma fórmula atômica. Não há necessidade de usar parâmetros neste caso, já que todo elemento de $\mathbb{N}$ é nomeado por um termo fechado da assinatura de $\mathbb{N}$.

Exemplo 3: ***Componentes conexos de grafos.*** Seja G um grafo como no Exemplo 1 da seção 1.1, e g um elemento de G. O **componente conexo** de g em G é o menor conjunto Y de vértices de G tal que (1) $g \in Y$ e (2) se $a \in Y$ e a está ligado a b por uma aresta, então $b \in Y$. Esta descrição define Y, usando g como um parâmetro. Porém novamente não existe, em geral, qualquer esperança de expressar a definição como uma fórmula atômica. Também será provavelmente irremediável tentar definir Y sem mencionar qualquer elemento como um parâmetro.

Descreveremos algumas relações simples sobre uma estrutura, e então descreveremos como gerar relações mais complicadas a partir delas. Cada relação definível será definida por uma fórmula, e a fórmula mostrará como a relação é construída a partir de relações mais simples.

Tal abordagem paga dividendos de várias formas. Primeiro, as fórmulas dão uma forma de descrever as relações. Segundo, podemos demonstrar teoremas sobre todos os conjuntos definíveis usando a indução sobre a complexidade das fórmulas que os definem. Terceiro, podemos demonstrar teoremas sobre aquelas relações que são definidas por fórmulas de determinados tipos (tal como por exemplo na seção 2.4 adiante).

Para o nosso ponto de partida, tomamos as relações expressas por fórmulas atômicas. Um pouco de notação será útil aqui. Dada uma L-estrutura A e uma fórmula atômica $\phi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ de L, escrevemos $\phi(A^n)$ para designar o conjunto de n-uplas $\{\bar{a} :$

$A \vDash \phi(\bar{a})\}$. Por exemplo se R é um símbolo de relação da assinatura L, então a relação R^A é da forma $\phi(A^n)$: tome $\phi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ como sendo a fórmula $R(x_0, \ldots, x_{n-1})$.

Permitimos parâmetros também. Seja $\psi(x_0, \ldots, x_{n-1}, \bar{y})$ uma fórmula atômica de L e $\bar{b}$ uma upla de A. Então $\psi(A^n, \bar{b})$ representa o conjunto $\{\bar{a}; A \vDash \psi(\bar{a}, \bar{b})\}$. Por exemplo se A consiste dos números reais e $\psi(x, y)$ é a fórmula $x > y$, então $\psi(A, 0)$ é o conjunto de todos os reais positivos.

Para construir relações mais complicadas, introduzimos uma linguagem formal $L_{\infty\omega}$ baseada na assinatura L, como se segue. (Continue lendo por mais umas duas páginas para ver o que os índices $_\infty$ e $_\omega$ significam.)

Construindo uma linguagem

Seja L uma assinatura. A linguagem $L_{\infty\omega}$ será infinitária, o que significa que algumas de suas fórmulas serão infinitamente longas. Trata-se de uma linguagem no sentido formal ou no sentido da teoria dos conjuntos. Os símbolos de $L_{\infty\omega}$ são aqueles de L juntamente com alguns símbolos lógicos, variáveis e sinais de pontuação. Os símbolos lógicos são os seguintes:

(1.1)	$=$	'igual',
	$\neg$	'não',
	$\bigwedge$	'e',
	$\bigvee$	'ou',
	$\forall$	'para todo elemento ...',
	$\exists$	'existe um elemento ...'.

Definimos os **termos**, as **fórmulas atômicas** e os **literais** de $L_{\infty\omega}$ como sendo os mesmos de L. A classe de **fórmulas** de $L_{\infty\omega}$ é definida como sendo a menor classe X tal que

(1.2) todas as fórmulas atômicas de L estão em X,

(1.3) se ϕ pertence a X então a expressão $\neg\phi$ pertence a X,
e se $\Phi \subseteq X$ então as expressões $\bigwedge \Phi$ e $\bigvee \Phi$ estão ambas em X,

(1.4) se ϕ pertence a X e y é uma variável então $\forall y \phi$ e $\exists y \phi$ estão
ambas em X.

As fórmulas que fazem parte da construção de uma fórmula ϕ são chamadas de **subfórmulas** de ϕ. A fórmula ϕ é considerada uma subfórmula de si própria; suas **subfórmulas próprias** são todas as suas subfórmulas exceto ela própria.

Os quantificadores $\forall y$ ('para todo y') e $\exists y$ ('existe y') ligam variáveis tal qual em lógica elementar. Assim como em lógica elementar, podemos distinguir entre ocorrências livres e ocorrências ligadas de variáveis. As **variáveis livres** de uma fórmula ϕ são aquelas que têm ocorrências livres em ϕ. Algumas vezes vamos introduzir uma fórmula ϕ como $\phi(\bar{x})$, para uma seqüência de variáveis $\bar{x}$; isto significa que as variáveis em $\bar{x}$ são todas distintas, e as variáveis livres de ϕ todas pertencem a $\bar{x}$. Então $\phi(\bar{s})$ representa a fórmula que obtemos a partir de ϕ colocando os termos s_i no lugar das ocorrências livres das variáveis correspondentes x_i. Isto extende a notação que introduzimos na seção 1.3 para fórmulas atômicas.

Igualmente, para uma L-estrutura qualquer A e uma seqüência $\bar{a}$ de elementos de A, extendemos a notação '$A \vDash \phi[\bar{a}]$' ou '$A \vDash \phi(\bar{a})$' ('$\bar{a}$ satisfaz ϕ em A') a todas as fórmulas $\phi(\bar{x})$ de $L_{\infty\omega}$ como se segue, por indução sobre a construção de ϕ. Estas definições têm o propósito de adequar os significados intuitivos dos símbolos dados em (1.1) acima.

(1.5) Se ϕ é atômica, então '$A \models \phi[\bar{a}]$' se verifica ou não tal qual em (3.10) e (3.11) da seção 1.3

(1.6) $A \models \neg\phi[\bar{a}]$ sse não é verdade que $A \models \phi[\bar{a}]$.

(1.7) $A \models \bigwedge \Phi[\bar{a}]$ sse para toda fórmula $\psi(\bar{x}) \in \Phi$, $A \models \psi[\bar{a}]$.

(1.8) $A \models \bigvee \Phi[\bar{a}]$ sse para ao menos uma fórmula $\psi(\bar{x}) \in \Phi$, $A \models \psi[\bar{a}]$.

(1.9) Suponha que ϕ é $\forall y\psi$, onde ψ é $\psi(y, \bar{x})$. Então $A \models \phi[\bar{a}]$ sse para todo elemento b de A, $A \models \psi[b, \bar{a}]$.

(1.10) Suponha que ϕ é $\exists y\psi$, onde ψ é $\psi(y, \bar{x})$. Então $A \models \phi[\bar{a}]$ sse para ao menos um elemento b de A, $A \models \psi[b, \bar{a}]$.

Se $\bar{x}$ é uma n-upla de variáveis, $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ é uma fórmula de $L_{\infty\omega}$ e $\bar{b}$ é uma seqüência de elementos de A cujo comprimento casa com o de $\bar{y}$, escrevemos $\phi(A^n, \bar{b})$ para designar o conjunto $\{\bar{a} : A \models \phi(\bar{a}, \bar{b})\}$. Então $\phi(A^n, \bar{b})$ é a **relação definida em** A pela fórmula $\phi(\bar{x}, \bar{y})$.

Exemplo 3 *continuação*. x_0 pertence ao mesmo componente de g se x_0 é g ou x_0 é ligado por alguma aresta a g (em símbolos $R(x_0, g)$), ou existe x_1 tal que $R(x_0, x_1)$ e $R(x_1, g)$, ou existem x_1 e x_2 tais que $R(x_0, x_1)$, $R(x_1, x_2)$ e $R(x_2, g)$, ou . . . . Em outras palavras, o componente conexo de g é definido pela fórmula

(1.11) $\bigvee(\{x_0 = g\} \cup \{\exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge(\{R(x_i, x_{i+1}) : i < n\} \cup \{R(x_n, g)\}) : n < \omega\})$

com parâmetro g. A fórmula (1.11) não é fácil de ler, mas é bem precisa.

Níveis de linguagem

Podemos definir a **complexidade** de uma fórmula ϕ, comp(ϕ), de tal forma que ela seja maior que a complexidade de qualquer subfórmula própria de ϕ. Usando ordinais, uma possível definição é

(1.12) $\text{comp}(\phi) = \sup\{\text{comp}(\psi) + 1\colon \psi$ é uma subfórmula própria de $\phi\}$.

Mas a noção exata de complexidade nunca tem grande importância. O que importa mesmo é que agora seremos capazes de demonstrar teoremas sobre as relações definíveis em $L_{\infty\omega}$, usando indução sobre a complexidade das fórmulas que as definem.

Na verdade a complexidade nem sempre é a medida mais útil. Os índices $_{\infty\omega}$ sugerem uma outra classificação. O segundo índice, $_{\omega}$, significa que podemos por apenas um número finito de quantificadores em cascata. Seguindo o mesmo raciocínio, $L_{\infty 0}$ é a linguagem que consiste daquelas fórmulas de $L_{\infty\omega}$ nas quais não aparece qualquer quantificador; chamamos tais fórmulas de **livre-de-quantificador**. Toda fórmula atômica é livre-de-quantificador. (Logo as curvas do Exemplo 1 acima foram definidas por fórmulas livres-de-quantificador.)

O primeiro índice $_{\infty}$ significa que podemos juntar um número arbitrário de fórmulas através de $\bigwedge$ ou $\bigvee$. A **linguagem de primeira ordem** de L, em símbolos $L_{\omega\omega}$, consiste das fórmulas nas quais $\bigwedge$ e $\bigvee$ são usadas apenas para juntar um número finito de fórmulas a cada vez, de tal forma que a fórmula inteira é finita. Generalizando, se κ é um cardinal regular qualquer (tal como o primeiro cardinal incontável ω_1), então $L_{\kappa\omega}$ é o mesmo que $L_{\infty\omega}$ exceto que $\bigwedge$ e $\bigvee$ são usados apenas para juntar menos que κ fórmulas a cada vez. Por exemplo a fórmula (1.11) pertence a $L_{\omega_1\omega}$, já que $\bigvee$ é tomado sobre um conjunto contável e $\bigwedge$ é tomado sobre conjuntos finitos.

Desta maneira podemos escolher várias linguagens menores dentro de $L_{\infty\omega}$, selecionando subclasses da classe de fórmulas de $L_{\infty\omega}$. Na verdade $L_{\infty\omega}$ propriamente dita é grande demais para o uso no dia-a-dia; a maior parte deste livro diz respeito ao nível de primeira ordem $L_{\omega\omega}$, fazendo incursões ocasionais em $L_{\omega_1\omega}$.

Usaremos L como um símbolo para linguagens assim como para assinaturas. Como uma linguagem determina sua assinatura, não há ambigüidade se falarmos sobre L-estruturas para uma linguagem L. Além disso se L é uma linguagem de primeira ordem, está claro o que se quer dizer por $L_{\infty\omega}$, $L_{\kappa\omega}$ etc.; estas são as linguagens infinitárias que extendem L. Se um conjunto X de parâmetros é adicionado a L, formando uma nova linguagem $L(X)$, vamos nos referir às fórmulas de $L(X)$ como **as fórmulas de L com parâmetros de X**.

Seja L uma linguagem de primeira ordem e A uma L-estrutura. Se $\phi(\bar{x})$ é uma fórmula de primeira ordem, então um conjunto de relações da forma $\phi(A^n)$ é dito **definível em primeira ordem sem parâmetros**, ou mais abreviadamente **$\varnothing$-definível** (pronuncia-se 'zero-definível'). Um conjunto ou relação da forma $\psi(A^n, \bar{b})$, onde $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ é uma fórmula de primeira ordem e $\bar{b}$ é uma upla de algum conjunto X de elementos de A, é dito **X-definível** e **definível em primeira ordem com parâmetros**. (Quando as pessoas dizem simplesmente 'definível em primeira ordem', é preciso verificar se se permite parâmetros. Alguns permitem, outros não.)

As seguintes abreviações são padrão:

(1.13)	$x \neq y$	para $\neg x = y$
	$(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n)$	para $\bigwedge\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ (conjunção finita),
	$(\phi_1 \vee \ldots \vee \phi_n)$	para $\bigvee\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ (disjunção finita),
	$\bigwedge_{i\in I} \phi_i$	para $\bigwedge\{\phi_i : i \in I\}$,
	$\bigvee_{i\in I} \phi_i$	para $\bigvee\{\phi_i : i \in I\}$,
	$(\phi \to \psi)$	para $(\neg\phi) \vee \psi$ ('se ϕ então ψ'),
	$(\phi \leftrightarrow \psi)$	$(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$ ('ϕ sse ψ'),
	$\forall x_1 \ldots x_n$ ou $\forall \bar{x}$	para $\forall x_1 \ldots \forall x_n$,
	$\exists x_1 \ldots x_n$ ou $\exists \bar{x}$	para $\exists x_1 \ldots \exists x_n$,
	$\bot$	para $\bigvee \varnothing$ (disjunção vazia, falso sempre).

Convenções normais para ignorar parênteses estão valendo: os parênteses mais externos em $(\phi \wedge \psi)$ e $(\phi \vee \psi)$ podem ser omitidos quando $\to$ ou $\leftrightarrow$ aparece imediatamente fora destes parênteses. Dessa maneira $\phi \wedge \psi \to \chi$ sempre significa $(\phi \wedge \psi) \to \chi$, e não $\phi \wedge (\psi \to \chi)$.

Com estas convenções, a fórmula (1.11) seria normalmente escrita

$$x_0 = g \;\vee\; \bigvee_{n<\omega} \exists x_1 \ldots x_n \left(\left(\bigwedge_{i<n} R(x_i, x_{i+1}) \right) \wedge R(x_n, g) \right), \tag{1.14}$$

que é um pouco mais fácil de ler.

A família de linguagens que diferem entre si apenas pela assinatura é chamada de uma **lógica**. Dessa maneira a **lógica de primeira ordem** consiste de todas as linguagens $L_{\omega\omega}$ onde L varia sobre todas as assinaturas.

Observações sobre variáveis

Estaremos principalmente interessados em fórmulas $\phi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ com apenas um número finito de variáveis. Toda fórmula de primeira ordem tem um número finito de variáveis, dado que tem comprimento apenas finito.

Dizemos que duas fórmulas $\phi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ e $\psi(y_0, \ldots, y_{n-1})$ são **equivalentes** na L-estrutura A se $\phi(A^n) = \psi(A^n)$, ou equivalentemente, se $A \vDash \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$. Dessa maneira duas fórmulas são equivalentes em A se e somente se elas definem a mesma relação em A. Igualmente conjuntos de fórmulas $\Phi(\bar{x})$ e $\Psi(\bar{y})$ são **equivalentes em** A se $\bigwedge \Phi(A^n) = \bigwedge \Psi(A^n)$.

É claro que tais definições dependem da listagem das variáveis. Por exemplo se $\phi(x, y)$ e $\psi(y, x)$ são ambas $x < y$, então não devemos esperar que $\phi(x, y)$ seja equivalente a $\psi(y, x)$, pois $\psi(A^2)$ será $\phi(A^2)$ de trás para frente.

A fórmula $\phi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ e a fórmula $\phi(y_0, \ldots, y_{n-1})$ são equivalentes em qualquer estrutura. Igualmente $\forall y R(x, y)$ é equivalente a $\forall z R(x, z)$. Dessa maneira temos um número demasiado grande de fórmulas tentando fazer o mesmo trabalho. Para eliminar o excesso, diremos que uma fórmula é uma **variante** de uma outra fórmula se as duas fórmulas diferem apenas na escolha de variáveis, i.e. se cada uma pode ser obtida a partir da outra por uma substituição consistente de variáveis.

A relação 'variante de' é uma relação de equivalência sobre a classe das fórmulas. Tomaremos sempre a **cardinalidade** de uma linguagem de primeira ordem L, $|L|$, como sendo o número de classes de equivalência de fórmulas de L sob a relação 'variante de'. Isto está de acordo com a definição de $|L|$ para uma assinatura L dada na seção 1.2; veja o Exercício 7 adiante.

Tais problemas maçantes de sintaxe têm de fato uma conseqüência importante. Numa dada estrutura A, duas fórmulas de primeira ordem podem definir a mesma relação; portanto a família de relações definíveis em primeira ordem sobre A pode ser muito menos rica que a linguagem usada para defini-las. Como poderemos dizer exatamente quais são as relações definíveis em primeira ordem sobre A? Não há ferramental uniforme para responder a esta questão; frequentemente se leva meses de pesquisa e inspiração. Fecho a seção com dois tipos bem diferentes de exemplo.

Poucos subconjuntos definíveis: minimalidade

Lema 2.1.1. *Seja L uma assinatura, A uma L-estrutura, X um conjunto de elementos de A e Y uma relação sobre* dom(A). *Suponha que Y é definível por alguma fórmula de assinatura L com parâmetros de X. Então para todo automorfismo f de A, se f fixa X ponto-a-ponto (i.e. $f(a) = a$ para todo a em X), então f fixa Y conjunto-a-conjunto (i.e. para todo elemento a de A, $a \in Y \Leftrightarrow fa \in Y$).*

Demonstração. Para fórmulas de $L_{\infty\omega}$ isto pode ser demonstrado por indução sobre sua complexidade; veja o Exercício 8. Porém apelo ao leitor que veja o lema como uma idéia luminosa sobre estrutura matemática, que deve se aplicar igualmente bem a fórmulas de outras lógicas fora do âmbito de $L_{\infty\omega}$. □

Por exemplo, temos o seguinte.

Teorema 2.1.2. *Seja L a assinatura vazia e A uma L-estrutura tal que A é simplesmente um conjunto. Seja X um subconjunto qualquer de A, e seja Y um subconjunto de* dom(A) *que é definível em A por uma fórmula de alguma lógica de assinatura L,* *usando parâmetros de X. Então Y é um subconjunto de X ou o complemento em* dom(A) *de um subconjunto de X.*

Demonstração. Imediata a partir do lema. □

Note que nesse teorema, todos os subconjuntos finitos de X e seus complementos em A podem ser definidos por fórmulas de primeira ordem com parâmetros em X. O conjunto $\{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$ é definido pela fórmula $x = a_0 \lor \ldots \lor x = a_{n-1}$ (que é $\bot$ se o conjunto é vazio); negue essa fórmula para obter a definição do complemento.

A situação no Teorema 2.1.2 é mais comum do que se pode esperar. Dizemos que uma estrutura A é **minimal** se A é infinita mas os únicos subconjuntos de dom(A) que são definíveis em primeira ordem com parâmetros são finitos ou cofinitos (i.e. complementos de conjuntos finitos). Generalizando, um conjunto $X \subseteq$ dom(A) que é definível em primeira ordem com parâmetros é dito **minimal** se X é infinito, e para todo conjunto Z que é definível em primeira ordem em A com parâmetros, ou $X \cap Z$ é finito, ou $X \setminus Z$ é finito. Veja seção 9.2 adiante.

Muitos subconjuntos definíveis: aritmética

Os subconjuntos definíveis dos números naturais têm sido analisados bem de perto, devido a sua importância para a teoria da recursão.

Tomamos $\mathbb{N}$ como no Exemplo 2; seja L sua assinatura. Escrevemos $(\forall x < y)\phi$, $(\exists x < y)\phi$ como abreviações para $\forall x(x < y \to \phi)$ e $\exists x(x < y \land \phi)$ respectivamente. Os quantificadores $(\forall x < y)$ e $(\exists x < y)$ são ditos **cotados**. Definimos a hierarquia de fórmulas de primeira ordem de L, como se segue.

(1.15) Uma fórmula de primeira ordem de L é considerada uma fórmula Π^0_0, ou equivalentemente uma fórmula Σ^0_0, se todos os quantificadores são cotados.

(1.16) Uma fórmula é considerada uma fórmula Π^0_{k+1} se ela é da forma $\forall \bar{x}\psi$ para alguma fórmula Σ^0_k ψ. (A upla $\bar{x}$ pode ser vazia.)

(1.17) Uma fórmula é considerada uma fórmula Σ^0_{k+1} se ela é da forma $\exists \bar{x}\psi$ para alguma fórmula Π^0_k ψ. (A upla $\bar{x}$ pode ser vazia.)

Logo por exemplo uma fórmula Σ^0_3 consiste de três blocos de quantificadores, $\exists\bar{x}\forall\bar{y}\exists\bar{z}$, seguidos de uma fórmula com apenas quantificadores cotados. Pelo fato de se permitir que os blocos sejam vazios, toda fórmula Π^0_k também é uma fórmula Σ^0_{k+1} e uma fórmula Π^0_{k+1}; as classes mais altas reúnem as classes mais baixas.

Seja $\bar{x}$ a seqüência $(x_0, \ldots, x_{n-1})$. Um conjunto R de n-uplas de números naturais é chamado de relação Π^0_k (respectivamente, uma relação Σ^0_k) se ele é da forma $\phi(\mathbb{N}^n)$ para alguma fórmula Π^0_k (respectivamente, alguma fórmula Σ^0_k) $\phi(\bar{x})$. Dizemos que R é uma relação Δ^0_k se R é tanto uma relação Π^0_k quanto uma relação Σ^0_k. Uma relação é dita **aritmética** se ela é Σ^0_k para algum k (daí as relações aritméticas serem exatamente as definíveis em primeira ordem).

Intuitivamente a hierarquia mede quantas vezes temos que percorrer todo o conjunto dos números naturais se quisermos verificar através de (1.5)–(1.10) se uma upla particular pertence à relação R. Um teorema importante de Kleene diz que as relações Δ^0_1 são exatamente as relações recursivas, e as relações Σ^0_1 são exatamente as relações recursivamente enumeráveis. Um outro teorema de Kleene diz que para cada $k < \omega$ existe uma relação R que é Σ^0_{k+1} mas que não é Σ^0_k, nem é Π^0_k. Dessa forma a hierarquia continua crescendo.

Exercícios para a seção 2.1

1. Exibindo fórmulas apropriadas, demonstre que o conjunto de números pares é um conjunto Σ^0_0 em $\mathbb{N}$. Mostre o mesmo para o conjunto de números primos.

2. Seja A a ordem parcial (em uma assinatura com $\leqslant$) cujos elementos são os inteiros positivos, com $m \leqslant^A n$ sse m divide n. (a) Mostre que o conjunto $\{1\}$ e o conjunto dos números primos são ambos $\varnothing$-definíveis em A. (b) Um número n é **livre-de-quadrado** se não existe número primo p tal que p^2 divide n. Mostre que o conjunto de números livres-de-quadrado é $\varnothing$-definível em A.

3. Seja A o grafo cujos vértices são todos os conjuntos $\{m, n\}$ de exatamente dois números naturais, com a ligado a b sse $a \cap b \neq \varnothing \wedge a \neq b$. Mostre que A não é minimal, mas tem um número infinito de subconjuntos minimais.

Uma L-estrutura é dita **O-minimal** *(leia 'Oh-minimal' – o O é para Ordenação) se L contém um símbolo $\leqslant$ que ordena linearmente* $\mathrm{dom}(A)$ *de tal forma que todo subconjunto de* $\mathrm{dom}(A)$ *que é definível em primeira ordem com parâmetros é uma união de um número finito de intervalos das formas (a, b), $\{a\}$, $(-\infty, b)$, (a, ∞) onde a, b são elementos de A. Uma teoria é* **O-minimal** *se todos os seus modelos o são.*

4. Seja A uma ordenação linear com o tipo-ordem dos racionais (veja Exemplo 2 da seção 1.1 para a assinatura). Mostre que A é O-minimal. [Use Lema 2.1.1; Exemplo 3 na seção 3.2 pode ajudar.]

5. Seja A um espaço vetorial de dimensão infinita sobre um corpo finito. Mostre que A é minimal, e que os únicos conjuntos $\varnothing$-definíveis em A são $\varnothing$, $\{0\}$ e $\mathrm{dom}(A)$. *No Exercício 2.7.9 vamos remover a condição de que o corpo de escalares é finito.*

6. (Compartilhamento de tempo com fórmulas). Sejam $\bar{x}$ uma k-upla de variáveis e $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ $(i < n)$ fórmulas de uma linguagem de primeira ordem L. Mostre que existe uma fórmula $\psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{w})$ de L tal que para toda L-estrutura A com pelo menos dois elementos, e toda upla $\bar{a}$ em A, o conjunto de todas as relações da forma $\psi(A^k, \bar{a}, \bar{b})$ com $\bar{b}$ em A é exatamente o conjunto de todas as relações da forma $\phi_i(A^k, \bar{a})$ com $i < n$. [Seja $\bar{w}$ a seqüência $(w_0, \ldots, w_n)$ e faça com que $\psi(A^k, \bar{a}, c_0, \ldots, c_n)$ seja $\phi_i(A^k, \bar{a})$ quando $c_n = c_i$ e $c_n \neq c_j$ $(i \neq j)$.]

7. Mostre que se L é uma linguagem de primeira ordem então $|L|$ é igual a ω + (o número de símbolos na assinatura de L).

8. Demonstre o Lema 2.1.1 para fórmulas de $L_{\infty\omega}$ com um número finito de variáveis, por indução sobre a complexidade das fórmulas.

9. Seja L a assinatura de grupos abelianos e p um número primo. Seja A a soma direta de um número infinito de cópias de $\mathbb{Z}(p^2)$, o grupo cíclico de ordem p^2. Mostre que (a) o subgrupo de elementos de ordem $\leqslant p$ é $\varnothing$-definível e minimal, (b) o conjunto de elementos de ordem p^2 é $\varnothing$-definível mas não é minimal.

10. Seja G um grupo, e chamemos um subgrupo H de **definível** se H é definível em primeira ordem em G com parâmetros. Suponha que G satisfaz a condição de cadeia descendente sobre grupos definíveis de índice finito em G. Mostre que existe um único subconjunto minimal definível de índice finito em G. Mostre que esse subgrupo é na verdade $\varnothing$-definível, e deduza

que ele é um subgrupo característico de G. *Esse subgrupo é conhecido como G°, por analogia com o componente conexo G° em um grupo algébrico – que é na verdade um caso especial.*

2.2 Classes definíveis de estruturas

Até meados dos anos 1920, linguagens formais eram na sua maior parte usadas de uma forma puramente sintática, ou para falar sobre conjuntos e relações definíveis em uma única estrutura. A principal exceção era a geometria, onde Hilbert e outros tinham usado axiomas formais para classificar estruturas geométricas. Hoje em dia sabe-se muito bem que podemos classificar estruturas perguntando que axiomas formais são verdadeiros nelas – e portanto podemos falar em *classes definíveis* (*ou axiomatizáveis*) *de estruturas*. Teoria dos modelos estuda tais classes.

Começamos com algumas definições. Uma **sentença** é uma fórmula sem qualquer variável livre. Uma **teoria** é um conjunto de sentenças. (Estritamente dever-se-ia dizer 'classe', já que uma teoria em $L_{\infty\omega}$ poderia ser uma classe própria. Porém normalmente teorias são conjuntos.)

Se ϕ é uma sentença de $L_{\infty\omega}$ e A é uma L-estrutura, então as cláusulas (1.5)–(1.10) na seção anterior definem uma relação '$A \vDash \phi[\,]$', i.e. 'a seqüência vazia satisfaz ϕ em A', tomando $\bar{a}$ como sendo a seqüência vazia. Omitimos $[\,]$ e escrevemos simplesmente '$A \vDash \phi$'. Dizemos que A é um **modelo** de ϕ, ou que ϕ é **verdadeira em** A quando '$A \vDash \phi$' se verifica. Dada uma teoria T em $L_{\infty\omega}$, dizemos que A é um **modelo de** T, em símbolos $A \vDash T$, se A é um modelo de todas as sentenças de T.

Seja T uma teoria em $L_{\infty\omega}$ e $\mathbf{K}$ uma classe de L-estruturas. Dizemos que T **axiomatiza** $\mathbf{K}$, ou que T **é um conjunto de axiomas** para $\mathbf{K}$, se $\mathbf{K}$ é a classe de todas as L-estruturas que são modelos de T. Obviamente isto determina $\mathbf{K}$ univocamente, e dessa forma podemos escrever $\mathbf{K} = \mathrm{Mod}(T)$ para indicar que T axiomatiza $\mathbf{K}$. Note que T também é uma teoria em $L^+_{\infty\omega}$ onde L^+ é qualquer assinatura contendo L, e que $\mathrm{Mod}(T)$ em L^+ é uma classe diferente de $\mathrm{Mod}(T)$ em L. Logo a noção de 'modelo de T' depende da assinatura. Mas podemos deixar que o contexto determine a assinatura; se nenhuma assinatura for mencionada, escolha a menor L tal que T pertença a $L_{\infty\omega}$.

Igualmente se T é uma teoria, dizemos que uma teoria U **axiomatiza** T (ou é **equivalente a** T) se $\mathrm{Mod}(U) = \mathrm{Mod}(T)$. Em particular se A é uma L-estrutura e T é uma teoria de primeira ordem, dizemos que T **axiomatiza** A se as sentenças de primeira ordem verdadeiras em A são exatamente aquelas que são verdadeiras em todo modelo de T. (A próxima seção examinará essa noção mais de perto.)

Seja L uma linguagem e $\mathbf{K}$ uma classe de L-estruturas. Definimos a L-**teoria** de $\mathbf{K}$, $\mathrm{Th}_L(\mathbf{K})$, como sendo o conjunto (ou classe) de todas as sentenças ϕ de L tal que $A \vDash \phi$ para toda estrutura A em $\mathbf{K}$. Omitimos o índice $_L$ quando L é de primeira ordem: a **teoria** de $\mathbf{K}$, $\mathrm{Th}(\mathbf{K})$, é o conjunto de todas as sentenças de *primeira ordem* que são verdadeiras em toda estrutura em $\mathbf{K}$.

Dizemos que $\mathbf{K}$ é L-**definível** se $\mathbf{K}$ é a classe de todos os modelos de alguma sentença em L. Dizemos que $\mathbf{K}$ é L-**axiomatizável**, ou L-**definível generalizado**, se $\mathbf{K}$ é a classe de modelos de alguma teoria em L. Por exemplo $\mathbf{K}$ é **definível em primeira ordem** se $\mathbf{K}$ é a classe de modelos de alguma sentença de primeira ordem, ou equivalentemente, de algum conjunto finito de sentenças de primeira ordem. Note que $\mathbf{K}$ é definível em primeira ordem generalizado se e somente se $\mathbf{K}$ é a classe de todas as L-estruturas que são modelos de $\mathrm{Th}(\mathbf{K})$.

Classes definíveis em primeira ordem e axiomatizáveis em primeira ordem são também conhecidas como classes EC e EC_Δ respectivamente. O E é para Elementar e o delta para Interseção (cf. Exercício 2 adiante – a palavra em alemão para interseção é Durchschnitt).

Quando se escreve teorias, não há prejuízo em usar abreviações matemáticas, desde que elas possam ser vistas como abreviações de termos genuínos ou fórmulas. Por exemplo escrevemos

(2.1)

$x + y + z$	para	$(x + y) + z$,	
$x - y$	para	$x + (-y)$,	
n	para	$1 + \ldots + 1$ (n vezes),	onde n é um inteiro positivo,
nx	para	$\begin{cases} x + \ldots + x (n \text{ vezes}) & \text{onde } n \text{ é um inteiro positivo,} \\ 0 & \text{onde } n \text{ é } 0, \\ -(-n)x & \text{onde } n \text{ é um inteiro negativo,} \end{cases}$	
xy	para	$x \cdot y$,	
x^n	para	$x \ldots x$ (n vezes),	onde n é um inteiro positivo,
$x \leqslant y$	para	$x < y \ \vee \ x = y$,	
$x \geqslant y$	para	$y \leqslant x$.	

A seguinte notação é útil; ela nos permite dizer 'Existem exatamente n elementos x tais que ...', para $n < \omega$. Seja $\phi(x, \bar{z})$ uma fórmula. Então defina $\exists_{\geqslant n} x\phi$ ('Pelo menos n elementos x satisfazem ϕ') como se segue, por indução sobre n.

(2.2)

$\exists_{\geqslant 0} x\phi$	é	$\forall x\, x = x$.
$\exists_{\geqslant 1} x\phi$	é	$\exists x\phi$.
$\exists_{\geqslant n+1} x\phi$	é	$\exists x(\phi(x, \bar{z}) \wedge \exists_{\geqslant n} y(\phi(y, \bar{z}) \wedge y \neq x))$ (para $n \geqslant 1$).

Então colocamos $\exists_{\leqslant n} x\phi$ para $\neg\exists_{\geqslant n+1} x\phi$, e finalmente $\exists_{=n} x\phi$ é $\exists_{\geqslant n} x\phi \wedge \exists_{\leqslant n} x\phi$. Logo por exemplo a sentença de primeira ordem $\exists_{=n} x\, x = x$ expressa que existem exatamente n elementos.

Axiomas para estruturas particulares

Até mesmo em geometria, axiomas foram primeiramente usados para descrever uma estrutura particular, e não para definir uma classe de estruturas. Quando uma teoria T é escrita de forma a descrever uma estrutura particular A, dizemos que A é o **modelo pretendido** de T. Frequentemente acontece – como aconteceu com a geometria – que as pessoas decidem se interessar também pelos modelos não-pretendidos.

Exemplo 1: ***A álgebra de termos.*** Seja L uma assinatura algébrica, X um conjunto de variáveis e A a álgebra de termos de L com base X (veja seção 1.3). Então podemos descrever A através do conjunto de todas as sentenças das seguintes formas.

(2.3)	$c \neq d$	onde c, d são constantes distintas.
(2.4)	$\forall\bar{x} F(\bar{x}) \neq c$	onde F é um símbolo de função e c uma constante.
(2.5)	$\forall\bar{x}\bar{y} F(\bar{x}) \neq G(\bar{y})$	onde F, G são símbolos de função distintos.

(2.6) $\forall x_0 \ldots x_{n-1} y_0 \ldots y_{n-1} F(x_0 \ldots x_{n-1}) = F(y_0 \ldots y_{n-1}) \to \bigwedge_{i<n} x_i = y_i).$

(2.7) $\forall x_0 \dots x_{n-1} t(x_0 \dots x_{n-1}) \neq x_i$ onde $i < n$ e t é um termo qualquer contendo x_i mas distinto de x_i.

(2.8) [Use este axioma apenas quando L é finita.] Escreva Var(x) para a fórmula $\bigwedge\{x \neq c : c$ é uma constante de $L\} \wedge \bigwedge\{\forall \bar{y} x \neq F(\bar{y}) :$ F um símbolo de função de $L\}$. Então se X tem cardinalidade n, adicionamos o axioma $\exists_{\geqslant n} x\,Var(x)$.
Se X é infinito, adicionamos um número infinito de axiomas
$\exists_{\geqslant n} x\,Var(x)$ $(n \geqslant \omega)$.

Esses axiomas são todos de primeira ordem. Cada um deles diz algo que é obviamente verdadeiro de A.

Pode-se demonstrar que esses axiomas (2.3)–(2.8) axiomatizam A. (Isto de forma alguma é óbvio. Veja seção 2.7 adiante). Infelizmente eles não bastam para caracterizar a estrutura A propriamente dita, sequer a menos de isomorfismo. Por exemplo seja L a assinatura que consiste de um símbolo de função 1-ária F e uma constante c, e seja X o conjunto vazio. Então (2.3)–(2.8) reduzem ao seguinte.

(2.9) $\forall x F(x) \neq c. \quad \forall xy(F(x) = F(y) \to x = y).$
$\forall x F(F(F(\dots(F(x)\dots) \neq x$ (para qualquer número positivo de Fs).
$\forall x(x = c \vee \exists y x = F(y)).$

Podemos obter um modelo B de (2.9) tomando o modelo pretendido A e adicionando todos os inteiros como novos elementos, colocando $F^B(n) = n+1$ para cada inteiro n:

(2.10)
$$\overset{c}{\circ} \xrightarrow{F} \circ \xrightarrow{F} \circ \longrightarrow -$$
$$-- \xrightarrow{F} \circ \xrightarrow{F} \circ \xrightarrow{F} \circ \xrightarrow{F} \circ \longrightarrow --$$

Esse modelo B claramente não é isomorfo a A. Pode-se pensar em novos elementos de B como termos que podem ser analisados em termos menores indefinidamente.

Exemplo 2: ***Os axiomas de Peano de primeira ordem.*** Este é um outro exemplo de uma teoria de primeira ordem com um modelo pretendido. Gödel estudou uma variante muito próxima dele. Para ele trata-se de um conjunto de sentenças que eram verdadeiras da estrutura dos números naturais $\mathbb{N}$ (cf. Exemplo 2 na seção 2.1); seu Teorema da Incompletude diz que a teoria falha em axiomatizar $\mathbb{N}$.

(2.11) $\forall x\, x + 1 \neq 0.$
(2.12) $\forall xy(x + 1 = y + 1 \to x = y).$
(2.13) $\forall \bar{z}(\phi(0, \bar{z}) \wedge \forall x(\phi(x, \bar{z}) \to \phi(x + 1, \bar{z})) \to \forall x \phi(x, \bar{z}))$
para cada fórmula de primeira ordem $\phi(x, \bar{z})$.
(2.14) $\forall x\, x + 0 = x; \quad \forall xy\, x + (y + 1) = (x + y) + 1.$
(2.15) $\forall x\, x \cdot 0 = 0; \quad \forall xy\, x \cdot (y + 1) = x \cdot y + x.$
(2.16) $\forall x \neg(x < 0); \quad \forall xy(x < (y + 1) \leftrightarrow x < y \vee x = y).$

A cláusula (2.13) é um exemplo de um **esquema de axioma**, i.e. um conjunto de axiomas consistindo de todas as sentenças de um certo padrão. Este esquema expressa que se X é um conjunto que é definível em primeira ordem com parâmetros, e (1) $0 \in X$ e (2) se $n \in X$ então $n + 1 \in X$, então todo número pertence a X. Este é o **esquema de indução de primeira ordem**. Os axiomas (2.14)–(2.16) são as **definições recursivas** de $+$, $\cdot$ e $<$; dados os significados de 0 e 1 e a função $x \mapsto x + 1$, existe uma única maneira de definir $+$, $\cdot$ e $<$ em $\mathbb{N}$ de tal forma a fazer com que estes axiomas sejam verdadeiros.

Os axiomas (2.11)–(2.16) são conhecidos como **aritmética de Peano de primeira ordem**, ou, abreviando, P. É natural perguntar se P tem algum modelo além do pretendido. No Capítulo 6 veremos que o teorema da compacidade (Teorema 5.1.1) dá a resposta Sim imediatamente. Modelos de P que não são isomorfos ao pretendido são conhecidos como **modelos não-padrão**. Tais como plantas venenosas descobertas aleatoriamente, eles acabam tendo aplicações importantes e inteiramente benignas sobre as quais ninguém pensou antes. Infelizmente não há espaço nesse livro para discutir 'métodos não-padrão'; mas veja as referências no final deste capítulo.

Uma lista de classes axiomatizáveis

Segue uma lista de algumas classes que são definíveis ou axiomatizáveis. A lista é para referência, não para uma leitura leve.

Na maioria dos casos as sentenças dadas na lista são apenas as definições usuais da classe, atiradas em símbolos formais. Vamos nos referir a essas sentenças como a **teoria da** classe: logo os axiomas (2.21) formam a **teoria dos R-módulos à esquerda**. Além de fornecer exemplos, a lista mostra quais assinaturas são comumente usadas para várias classes. Por exemplo anéis normalmente têm assinatura $+$, $\cdot$, $-$ (1-ário), 0 e 1. (Um anel tem 1 a menos que se diga o contrário.)

(2.17) **Grupos (multiplicativos)**:
$\forall xyz\,(xy)z = x(yz),\ \forall x\, x \cdot 1 = x,\ \forall x\, x \cdot x^{-1} = 1.$

(2.18) **Grupos de expoente n (n um inteiro positivo fixo)**:
(2.17) juntamente com $\forall x\, x^n = 1$.

(2.19) **Grupos abelianos (aditivos)**:
$\forall xyz\,(x+y)+z = x+(y+z),\ \forall x\, x+0 = x,\ \forall x\, x-x = 0,$
$\forall xy\, x+y = y+x.$

(2.20) **Grupos abelianos sem torsão**:
(2.19) juntamente com $\forall x\,(nx = 0 \to x = 0)$ para cada inteiro positivo n.

(2.21) **R-módulos à esquerda onde R é um anel**:
Como no caso de espaços vetoriais (Exemplo 4 da seção 1.1) os elementos do módulo são os elementos das estruturas. Cada elemento r do anel é usado como um símbolo de função n-ária, de tal forma que $r(x)$ representa rx. Os axiomas são (2.19) juntamente com
$\forall xy\, r(x+y) = r(x)+r(y)$ para todo $r \in R$,
$\forall x\,(r+s)(x) = r(x)+s(x)$ para todo $r, s \in R$,
$\forall x\,(rs)(x) = r(s(x))$ para todo $r, s \in R$,
$\forall x\, 1(x) = x.$

(2.22) **Anéis**:
(2.19) juntamente com
$\forall xyz\,(xy)z = x(yz),$
$\forall x\, x1 = x,$
$\forall x\, 1x = x,$
$\forall xyz\, x(y+z) = xy+xz,$
$\forall xyz\,(x+y)z = xz+yz,$

(2.23) **Anéis regulares de Von Neumann**:
(2.22) juntamente com $\forall x \exists y\, xyx = x$.

(2.24) **Corpos**:
(2.22) juntamente com $\forall xy\, xy = yx$, $0 \neq 1$,
$\forall x(x \neq 0 \to \exists y\, xy = 1)$.

(2.25) **Corpos de característica p (p primo)**:
(2.24) juntamente com $p = 0$.

(2.26) **Corpos algebricamente fechados**:
(2.24) juntamente com
$\forall x_1 \ldots x_n \exists y\, y^n + x_1 y^{n-1} + \ldots + x_{n-1} y + x_n = 0$,
para cada inteiro positivo n.

(2.27) **Corpos real-fechados**:
(2.24) juntamente com
$\forall x_1 \ldots x_n\, x_1^2 + \ldots + x_n^2 \neq -1$ (para cada inteiro positivo n),
$\forall x \exists y\, (x = y^2 \vee -x = y^2)$,
$\forall x_1 \ldots x_n \exists y\, y^n + x_1 y^{n-1} + \ldots + x_{n-1} y + x_n = 0$ (para todo n ímpar).

(2.28) **Reticulados**:
$\forall x\, x \wedge x = x,\ \forall xy\, x \wedge y = y \wedge x,$
$\forall xy\, (x \wedge y) \vee y = y, \forall xyz\, (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z),$
$\forall x\, x \vee x = x, \forall xy\, x \vee y = y \vee x,$
$\forall xy\, (x \vee y) \wedge y = y\ \forall xyz\, (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z).$
(Em reticulados escrevemos $x \leqslant y$ como uma abreviação de $x \wedge y = x$. Note que em sentenças sobre reticulados, os símbolos $\wedge$ e $\vee$ têm dois significados: o significado de reticulado e o significado lógico. Parênteses podem ajudar a mantê-los distintos.)

(2.29) **Álgebras booleanas**:
(2.28) juntamente com
$\forall xyz\, x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$
$\forall xyz\, x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z),$
$\forall x\, x \vee x^* = 1, \forall x\, x \wedge x^* = 0, 0 \neq 1.$

(2.30) **Álgebras booleanas sem átomos**:
(2.29) juntamente com $\forall x \exists y (x \neq 0 \to 0 < y \wedge y < x)$.
($y < x$ é uma forma abreviada de $y \leqslant x \wedge y \neq x$.)

(2.31) **Ordenações lineares**:
$\forall x\, x \not< x, \forall xy(x = y \vee x < y \vee y < x),$
$\forall xyz(x < y \wedge y < z \to x < z).$

(2.32) **Ordenações lineares densas sem extremos**:
(2.31) juntamente com $\forall xy(x < y \to \exists z(x < z \wedge z < y)),$
$\forall x \exists z\, z < x, \forall x \exists z\, x < z.$

Todas as classes acima são definíveis em primeira ordem generalizado. Aqui está uma classe com uma definição infinitária:

(2.33) **Grupos localmente finitos**:
(2.17) juntamente com
$$\forall x_1 \ldots x_n \bigvee_{m<\omega} (\exists y_1 \ldots y_m \bigwedge_{t(\bar{x}) \text{ um termo}} (t(\bar{x}) = y_1 \vee \ldots t(\bar{x}) = y_m)).$$

Exercícios para a seção 2.2

1. Seja L uma linguagem de primeira ordem e T uma teoria em L. Mostre que: (a) se T e U são teorias em L então $T \subseteq U$ implica $\text{Mod}(U) \subseteq \text{Mod}(T)$, (b) se $\mathbf{J}$ e $\mathbf{K}$ são classes de L-estruturas então $\mathbf{J} \subseteq \mathbf{K}$ implica $\text{Th}(\mathbf{K}) \subseteq \text{Th}(\mathbf{J})$, (c) $T \subseteq \text{Th}(\text{Mod}(T))$ e $\mathbf{K} \subseteq \text{Mod}(\text{Th}(\mathbf{K}))$, (d) $\text{Th}(\text{Mod}(T)) = T$ se e somente se T é da forma $\text{Th}(\mathbf{K})$, e igualmente $\text{Mod}(\text{Th}(\mathbf{K})) = \mathbf{K}$ se e somente se $\mathbf{K}$ é da forma $\text{Mod}(T)$.

2. Seja L uma linguagem de primeira ordem e para cada $i \in I$ seja $\mathbf{K}_i$ uma classe de L-estruturas. Mostre que $\text{Th}(\bigcup_{i\in I} \mathbf{K}_i) = \bigcap_{i\in I} \text{Th}(\mathbf{K}_i)$.

3. Seja L uma linguagem de primeira ordem e para cada $i \in I$ seja T_i uma teoria em L. (a) Mostre que $\text{Mod}(\bigcup_{i\in I} T_i) = \bigcap_{i\in I} \text{Mod}(T_i)$. Em particular se T é uma teoria qualquer em L, $\text{Mod}(T) = \bigcap_{\phi\in T} \text{Mod}(\phi)$. (b) Mostre que o enunciado $\text{Mod}(\bigcap_{i\in I} T_i) = \bigcup_{i\in I} \text{Mod}(T_i)$ se verifica quando I é finito e cada T_i é da forma $\text{Th}(\mathbf{K}_i)$ para alguma classe $\mathbf{K}_i$. *Pode falhar se um dessas condições for omitida.*

4. Seja L uma assinatura qualquer contendo um símbolo de relação 1-ária P e um símbolo de relação k-ária R. (a) Escreva uma sentença de $L_{\omega_1\omega}$ expressando que no máximo um número finito de elementos x têm a propriedade $P(x)$. (b) Quando $n < \omega$, escreva uma sentença de $L_{\omega\omega}$ expressando que no mínimo n k-uplas $\bar{x}$ de elementos têm a propriedade $R(\bar{x})$. *Abrevia-se essa sentença assim:* $\exists_{\geqslant n}\bar{x}R(\bar{x})$.

5. Seja L uma linguagem de primeira ordem e A uma L-estrutura finita. Mostre que todo modelo de $\text{Th}(A)$ é isomorfo a A. [Atenção: L pode ter um número infinito de símbolos.]

6. Para cada uma das seguintes classes, demonstre que ela pode ser definida por uma única sentença de primeira ordem. (a) Grupos nilpotentes de classe k ($k \geqslant 1$). (b) Anéis comutativos com identidade. (c) Domínios integrais. (d) Anéis locais comutativos (i.e. anéis comutativos com um único ideal maximal). (e) Corpos ordenados. (f) Reticulados distributivos.

7. Para cada uma das seguintes classes, demonstre que ela pode ser definida por um conjunto de sentenças de primeira ordem. (a) Grupos abelianos divisíveis. (b) Corpos de característica 0. (c) Corpos formalmente reais. (d) Corpos separavelmente fechados.

8. Mostre que a classe dos grupos simples é definível por uma sentença de $L_{\omega_1\omega}$.

9. Seja L uma assinatura com um símbolo $<$, e T uma teoria em L que expressa que $<$ é uma ordem linear. (a) Defina, por indução sobre o ordinal α, uma fórmula $\theta_\alpha(x)$ de $L_{\infty\omega}$ que expressa (em qualquer modelo de T) 'O tipo-ordem do conjunto de predecessores de x é α'. [A idéia de (2.2) pode ajudar.] (b) Escreva um conjunto de axiomas em $L_{\infty\omega}$ para a classe das ordenações de tipo-ordem α. Verifique que se α é infinito e de cardinalidade κ, seus axiomas podem ser escritos como uma única sentença de $L_{\kappa^+\omega}$.

2.3 Algumas noções provenientes de lógica

O trabalho das duas seções anteriores nos permite definir diversas noções importantes de lógica. Qualquer texto geral de lógica (veja as referências no final do Capítulo 1) dará informações básicas sobre tais noções. Começamos com algumas definições que estarão em vigor por todo o livro, e encerramos a seção com um importante lema sobre construção de modelos. Vale a pena ler as definições porém não vale a pena memorizá-las – lembre-se que este livro tem um índice remissivo.

Verdade e conseqüências

Seja L uma assinatura, T uma teoria em $L_{\infty\omega}$ e ϕ uma sentença de $L_{\infty\omega}$. Dizemos que ϕ é uma **conseqüência** de T, ou que T **acarreta** em ϕ, em símbolos $T \vdash \phi$, se todo modelo de T é um modelo de ϕ. (Em particular se T não tem modelo então T acarreta em ϕ.)

Advertência: não exigimos que se $T \vdash \phi$ então existe uma prova de ϕ a partir de T. Em todo o caso, com linguagens infinitárias não está sempre claro o que constitui uma prova. Alguns autores usam '$T \vdash \phi$' para dizer que ϕ é dedutível a partir de T em algum cálculo formal de provas, e escrevem '$T \vDash \phi$' para expressar nossa noção de acarretamento (uma notação que está em conflito com nossa '$A \vDash \phi$'). Para a lógica de primeira ordem os dois tipos de acarretamento coincidem pelo teorema da completude para o cálculo de provas em questão.)

Dizemos que ϕ é **válida**, ou que é um **teorema lógico**, em símbolos $\vdash \phi$, se ϕ é verdadeira em toda L-estrutura. Dizemos que ϕ é **consistente** se ϕ é verdadeira em alguma L-estrutura. Igualmente dizemos que uma teoria T é **consistente** se ela tem um modelo.

Dizemos que duas teorias S e T em $L_{\infty\omega}$ são **equivalentes** se elas têm os mesmos modelos, i.e. $\mathrm{Mod}(S) = \mathrm{Mod}(T)$. Temos também uma noção relativizada de equivalência: quando T é uma teoria em $L_{\infty\omega}$ e $\phi(\bar{x})$, $\psi(\bar{x})$ são fórmulas de $L_{\infty\omega}$, dizemos que ϕ é **equivalente a ψ módulo T** se para todo modelo A de T e toda seqüência $\bar{a}$ de A, $A \vDash \phi(\bar{a}) \Leftrightarrow A \vDash \psi(\bar{a})$. Logo $\phi(\bar{x})$ é equivalente a $\psi(\bar{x})$ módulo T se e somente se $T \vdash \forall\bar{x}(\phi \leftrightarrow \psi)$. (Essa sentença não pertence a $L_{\infty\omega}$ se ϕ e ψ têm um número infinito de variáveis livres, mas o sentido está claro.) Há um metateorema dizendo que se ϕ é equivalente a ψ módulo T, e χ' resulta de χ colocando-se ψ no lugar de ϕ em alguma lugar dentro de χ, então χ' é equivalente a χ módulo T. Resultados como esse são demonstrados para a lógica de primeira ordem em textos elementares, e as demonstrações para outras linguagens não são diferentes. Podemos generalizar a equivalência relativa e falar de dois conjuntos de fórmulas $\Phi(\bar{x})$ e $\Psi(\bar{x})$ sendo **equivalentes módulo** T, querendo dizer que $\bigwedge \Phi$ é equivalente a $\bigwedge \Psi$ módulo T.

Um caso especial é quando T é vazia: $\phi(\bar{x})$ e $\psi(\bar{x})$ são ditas **logicamente equivalentes** se elas são equivalentes módulo a teoria vazia. Na terminologia da seção 2.1, isso é o mesmo que dizer que elas são equivalentes em toda L-estrutura. O leitor conhecerá alguns exemplos: $\neg\forall x\phi$ é logicamente equivalente a $\exists x\neg\phi$, e $\exists x \bigvee_{i\in I} \psi_i$ é logicamente equivalente a $\bigvee_{i\in I} \exists x\psi_i$.

Outro exemplo, uma fórmula ϕ é dita ser uma **combinação booleana** de fórmulas em um conjunto Φ se ϕ pertence ao menor conjunto X tal que (1) $\Phi \cup \{\bot\} \subseteq X$ e (2) X é fechado sob $\wedge$, $\vee$ e $\neg$. Dizemos que ϕ está na **forma normal disjuntiva sobre** Φ se ϕ é uma disjunção finita de conjunções finitas de fórmulas em Y, onde Y é Φ juntamente com as negações de todas as fórmulas em Φ. Por convenção a disjunção vazia $\bot$ e a conjunção vazia $\neg\bot$ contam como fórmulas na forma normal disjuntiva. *Toda combinação booleana $\phi(\bar{x})$ de fórmulas em um conjunto Φ é logicamente equivalente a uma fórmula $\psi(\bar{x})$ na forma normal disjuntiva sobre* Φ. (O mesmo é verdadeiro se substituirmos $\wedge$ e $\vee$ por $\bigwedge$ e $\bigvee$ respectivamente, omitindo a palavra 'finita'; nesse caso falamos de **combinações booleanas infinitas** e **forma normal disjuntiva infinitária**.)

Uma fórmula é **prenex** se ela consiste de uma cadeia de quantificadores (possivelmente vazia) seguida de uma fórmula livre-de-quantificador. *Toda fórmula de primeira* *ordem é logicamente equivalente a uma fórmula prenex de primeira ordem.* (O resultado falha se se permite que assinaturas contenham símbolos de relação 0-ária; veja Exercício 7 adiante. Essa é uma das duas conseqüências embaraçosas do fato de que permitimos que estruturas tenham domínios vazios. Um outro embaraço é que $\vdash \exists x\, x = x$ se verifica se e somente se a assinatura contém uma constante. Na prática esses pontos nunca importam.)

Lema 2.3.1. *Seja T uma teoria em uma linguagem de primeira ordem L, e Φ um conjunto de fórmulas de L. Suponha que*

(a) *toda fórmula atômica de L pertence a Φ,*
(b) *Φ é fechado sob combinações booleanas, e*
(c) *para toda fórmula $\psi(\bar{x}, y)$ em Φ, $\exists y\, \psi$ é equivalente módulo T a uma fórmula $\phi(\bar{x})$ em Φ.*

Então toda fórmula $\chi(\bar{x})$ de L é equivalente módulo T a uma fórmula $\phi(\bar{x})$ em Φ. (*Se* (c) *for enfraquecido pela exigência de que $\bar{x}$ seja não-vazia, então a mesma conclusão se verifica desde que $\bar{x}$ em $\chi(\bar{x})$ seja também não-vazia.*)

Demonstração. Por indução sobre a complexidade de χ, usando o fato de que $\forall y \phi$ é equivalente a $\neg\exists x \neg\phi$. □

Um n-**tipo** de uma teoria T é um conjunto $\Phi(\bar{x})$ de fórmulas, com $\bar{x} = (x_0, \ldots, x_{n-1})$, tal que para algum modelo A de T e alguma n-upla $\bar{a}$ de elementos de A, $A \models \phi(\bar{a})$ para todo ϕ em Φ. Dizemos que A **realiza** o n-tipo Φ, e que $\bar{a}$ **realiza** Φ em A. Dizemos que A **omite** Φ se nenhuma upla em A realiza Φ. Um conjunto Φ é um **tipo** se ele é um n-tipo para algum $n < \omega$. (Essas noções são centrais para teoria dos modelos. Veja seção 5.2 adiante para discussão e exemplos.)

Usualmente trabalhamos numa linguagem L que é menor que $L_{\infty\omega}$, por exemplo uma linguagem de primeira ordem. Então toda fórmula em um tipo será automaticamente suposta vir de L.

Seja L uma linguagem e A, B duas L-estruturas. Dizemos que A é L-**equivalente** a B, em símbolos $A \equiv_L B$, se para toda sentença ϕ de L, $A \models \phi \Leftrightarrow B \models \phi$. Isso significa que A e B são indistinguíveis por meio de L. Duas estruturas A e B são ditas **elementarmente equivalentes**, $A \equiv B$, se elas são equivalentes em primeira ordem. Escrevemos $\equiv_{\infty\omega}$, $\equiv_{\kappa\omega}$ para designar equivalência em $L_{\infty\omega}$, $L_{\kappa\omega}$ respectivamente.

Se L é uma linguagem e A é uma L-estrutura, a L-**teoria** de A, $\mathrm{Th}_L(A)$, é a classe de todas as sentenças de L que são verdadeiras em A. Logo $A \equiv_L B$ se e somente se $\mathrm{Th}_L(A) = \mathrm{Th}_L(B)$. A **teoria completa** de A, $\mathrm{Th}(A)$ sem uma linguagem especificada, sempre significa a teoria completa de primeira ordem de A.

Existe um outro uso da palavra 'completa'. Seja L uma linguagem de primeira ordem e T uma teoria em L. Dizemos que T é **completa** se T tem modelos e quaisquer dois de seus modelos são elementarmente equivalentes. Isso é equivalente a dizer que para toda sentença ϕ de L, exatamente uma das duas sentenças ϕ e $\neg\phi$ é uma conseqüência de T. É claro que se A é uma L-estrutura qualquer então $\mathrm{Th}(A)$ é completa nesse sentido; o teorema da compacidade implica que qualquer teoria completa em L é equivalente a uma teoria da forma $\mathrm{Th}(A)$ para alguma L-estrutura A.

Dizemos que uma teoria T é **categórica** se T é consistente e todos os modelos de T são isomorfos. Ficará aparente na seção 5.1 que as únicas teorias categóricas de primeira ordem são as teorias completas de estruturas finitas, por isso a noção não é tão útil. Ao invés disso faremos as seguintes definições. Seja λ um cardinal. Dizemos que uma classe **K** de L-estruturas é λ-**categórica** se existe, a menos de isomorfismo, exatamente uma estrutura em **K** que tem cardinalidade λ. Igualmente uma teoria T é λ-**categórica** se a classe de todos os seus modelos é λ-categórica.

Refraseando de maneira frouxa mas bastante conveniente, dizemos que uma única estrutura A é λ-**categórica** se $\text{Th}(A)$ é λ-categórica. Trata-se de uma mudança bem recente de terminologia, e reflete um deslocamento de interesse de teorias para estruturas individuais.

Na seção 1.4 observamos que se $(A, \bar{a})$ é uma $L(\bar{c})$-estrutura com A uma L-estrutura, então para toda fórmula atômica $\phi(\bar{x})$ de L, $A \vDash \phi[\bar{a}]$ se e somente se $(A, \bar{a}) \vDash \phi(\bar{c})$. Isso permanece verdadeiro para todas as fórmulas $\phi(\bar{x})$ de $L_{\infty\omega}$, e nos justifica ao usar a notação meio-termo $A \vDash \phi(\bar{a})$ para representar qualquer das outras duas. (Logo $\bar{a}$ são elementos de A satisfazendo $\phi(\bar{x})$, ou constantes adicionadas nomeando a si próprias na sentença verdadeira $\phi(\bar{a})$.)

Lema 2.3.2 ***(Lema das constantes).*** *Seja L uma assinatura, T uma teoria em $L_{\infty\omega}$ e $\phi(\bar{x})$ uma fórmula em $L_{\infty\omega}$. Seja $\bar{c}$ uma seqüência de constantes distintas que não estão em L. Então $T \vdash \phi(\bar{c})$ se e somente se $T \vdash \forall\bar{x}\phi$.*

Demonstração. Exercício. □

Por último, suponha que a assinatura L tenha apenas um número finito de símbolos. Então podemos identificar cada um desses símbolos com um número natural, e cada termo e cada fórmula de primeira ordem de L com um número natural. Se isto for feito de uma forma razoável, então as operações sintáticas tais como formar a conjunção de duas fórmulas, ou substituir uma variável livre por um termo em alguma fórmula, vêm a ser funções recursivas. Nesta situação dizemos que nós temos uma **linguagem recursiva**. Então faz sentido falar de **conjuntos recursivos de termos** e de **conjuntos recursivos de fórmulas**; essas noções não dependem da escolha da codificação. Uma teoria T de L é dita **decidível** se o conjunto de suas conseqüências é recursivo. Com um pouco mais de cuidado, essas definições também fazem sentido quando a assinatura de L é um conjunto recursivo infinito.

Conjuntos de Hintikka

Cada estrutura A tem uma teoria de primeira ordem $\text{Th}(A)$. Será que cada teoria de primeira ordem tem um modelo? Claramente não. Na verdade um teorema de Church implica que não existe algoritmo para determinar se uma dada teoria de primeira ordem tem ou não um modelo.

Todavia descobrimos na seção 1.5 que um conjunto de sentenças atômicas sempre tem um modelo. Aquele fato pode ser generalizado, como mostraremos agora. Os resultados abaixo são importantes para a construção de modelos; usá-los-emos no Capítulo 5 e 6 adiante.

Considere uma L-estrutura A que é gerada por seus elementos constantes. Seja T a classe de todas as sentenças de $L_{\infty\omega}$ que são verdadeiras em A. Então T tem as seguintes propriedades.

(3.1) Para toda sentença atômica ϕ de L, se $\phi \in T$ então $\neg\phi \notin T$.

(3.2) Para todo termo fechado t de L, a sentença $t = t$ pertence a T.

(3.3) Se $\phi(x)$ é uma fórmula atômica de L, s e t são termos fechados de L e $s = t \in T$, então $\phi(s) \in T$ se e somente se $\phi(t) \in T$.

(3.4) Se $\neg\neg\phi \in T$ então $\phi \in T$.

(3.5) Se $\bigwedge \Phi \in T$ então $\Phi \subseteq T$; se $\neg \bigwedge \Phi \in T$ então existe $\psi \in \Phi$ tal que $\neg\psi \in T$.

(3.6) Se $\bigvee \Phi \in T$ então existe $\psi \in \Phi$ tal que $\psi \in T$. (Em particular $\perp \notin T$.) Se $\neg \bigvee \Phi \in T$ então $\neg\psi \in T$ para todo $\psi \in \Phi$.

(3.7) Seja ϕ da forma $\phi(x)$. Se $\forall x\, \phi \in T$ então $\phi(t) \in T$ para todo termo fechado t de L; se $\neg\forall x\, \phi \in T$ então $\neg\phi(t) \in T$ para algum termo fechado t de L.

(3.8) Seja ϕ da forma $\phi(x)$. Se $\exists x\, \phi \in T$ então $\phi(t) \in T$ para algum termo fechado t de L; se $\neg\exists x\, \phi \in T$ então para todo termo fechado t de L, $\neg\phi(t) \in T$.

Uma teoria T com as propriedades (3.1)–(3.8) é chamada de **conjunto de Hintikka** para L.

Teorema 2.3.3. *Seja L uma assinatura e T um conjunto de Hintikka para L. Então T tem um modelo no qual todo elemento é da forma t^A para algum termo fechado t de L. Na verdade o modelo canônico do conjunto de sentenças atômicas em T é um modelo de T.*

Demonstração. Escreva U para designar o conjunto de sentenças atômicas em T, e seja A o modelo canônico de U. Asseveramos que para toda sentença ϕ de $L_{\infty\omega}$,

(3.9) se $\phi \in T$ então $A \models \phi$, e se $\neg\phi \in T$ então $A \models \neg\phi$.

(3.9) é demonstrada como se segue, por indução sobre a construção de ϕ, usando a definição de $\models$ nas cláusulas (1.5)–(1.10) da seção 2.1.

Por (3.2) e (3.3), U é $=$-fechado em L (veja seção 1.5). Logo se ϕ é atômica, (3.9) é imediato por (3.1) e pela definição de A.

Se ϕ é da forma $\neg\psi$ para alguma sentença ψ, então por hipótese da indução (3.9) se verifica para ψ. Isso imediatamente nos dá a primeira metade de (3.9) para ϕ. Para a segunda metade, suponha que $\neg\phi \in T$; então $\psi \in T$ por (3.4) e portanto $A \models \psi$ por (3.9) para ψ. Mas então $A \models \neg\phi$.

Suponha agora que ϕ é da forma $\forall x\, \psi$. Se $\phi \in T$ então por (3.7), $\psi(t) \in T$ para todo termo fechado t de L, por isso $A \models \psi(t)$ pela hipótese da indução. Já que todo elemento do modelo canônico é nomeado por um termo fechado, isso implica que $A \models \forall x\, \psi$. Se $\neg\phi \in T$ então por (3.7) novamente, $\neg\psi(t) \in T$ para algum termo fechado t, e por isso $A \models \neg\psi(t)$. Por conseguinte $A \models \neg\forall x\, \psi$.

Deve estar claro que os casos remanescentes funcionam. De (3.9) segue que A é um modelo de T. □

O Teorema 2.3.3 reduz o problema de se encontrar um modelo ao problema de se encontrar um tipo particular de teoria. O próximo resultado mostra onde poderíamos procurar por teorias do tipo certo.

Teorema 2.3.4. *Seja L uma linguagem de primeira ordem. Seja T uma teoria em L tal que*
(a) todo subconjunto finito de T tem um modelo,
(b) para toda sentença ϕ de L, ou ϕ ou $\neg\phi$ pertence a T,
(c) para toda sentença $\exists x\, \psi(x)$ em T existe um termo fechado t de L tal que $\psi(t)$ pertence a T.
Então T é um conjunto de Hintikka para L.

Demonstração. Primeiramente afirmamos que

(3.10) se U é um subconjunto finito de T e ϕ é uma sentença de L tal que $U \vdash \phi$, então $\phi \in T$.

Sejam U e ϕ contraexemplos. Então $\phi \notin T$, logo por (b), $\neg\phi \in T$. Segue por (a) que existe um modelo de $U \cup \{\neg\phi\}$, contradizendo a suposição que $U \vdash \phi$. Isso prova a afirmação, usando apenas (a) e (b).

Agora de (a) deduzimos (3.1), e da afirmação (3.10) deduzimos (3.2), (3.3), (3.4), as primeiras metades de (3.5) e (3.7) e as segundas metades de (3.6) e (3.8).

Suponha que Φ é um conjunto finito $\{\psi_0, \ldots, \psi_{n-1}\}$, e $\bigvee \Phi \in T$ mas $\psi_i \notin T$ para todo $i < n$. Então por (b), $\neg\psi_i \in T$ para todo $i < n$, logo por (a) o conjunto $\{\bigvee \Phi, \neg\psi_0, \ldots, \psi_{n-1}\}$ tem um modelo; o que é um absurdo. Logo (3.6) se verifica. Argumentos análogos demonstram a segunda metade de (3.5).

Finalmente (c) implica a segunda metade de (3.8), e por (3.10) isso implica a segunda metade de (3.7). □

Exercícios para a seção 2.3

1. Mostre que uma teoria T em uma linguagem de primeira ordem L é fechada sob a operação de tomar as conseqüências se e somente se $T = \mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(T))$.

2. Seja T a teoria dos espaços vetoriais sobre um corpo K. (Tome T como sendo (2.21) da seção anterior, com $R = K$.) Mostre que T é λ-categórica sempre que λ é um cardinal infinito $> |K|$.

3. Seja $\mathbb{N}$ a estrutura dos números naturais $(\omega, 0, 1, +, \cdot, <)$; seja L sua assinatura. Escreva uma sentença de $L_{\omega_1\omega}$ cujos modelos são precisamente as estruturas isomorfas a $\mathbb{N}$. (*Logo existem sentenças categóricas de $L_{\omega_1\omega}$ com modelos infinitos.*)

4. Demonstre o lema das constantes (Lema 2.3.2)

5. Mostre que se L é uma linguagem de primeira ordem com um número finito de símbolos de relação, símbolos de função e símbolos de constante, então existe um algoritmo para determinar, para qualquer conjunto finito T de sentenças livres-de-quantificador de L, se T tem ou não um modelo. [Use Exercício 1.5.2 e 1.5.3.]

6. Para cada $n < \omega$ seja L_n uma assinatura e Φ_n um conjunto de Hintikka para L_n. Suponha que para todo $m < n < \omega$, $L_m \subseteq L_n$ e $\Phi_m \subseteq \Phi_n$. Mostre que $\bigcup_{n<\omega} \Phi_n$ é um conjunto de Hintikka para a assinatura $\bigcup_{n<\omega} L_n$.

7. Seja L uma linguagem de primeira ordem. (a) Mostre que se existe uma L-estrutura vazia A e uma sentença prenex ϕ que é verdadeira em A, então ϕ começa com um quantificador universal. (b) Mostre (sem assumir que toda estrutura é não-vazia) que toda fórmula $\phi(\bar{x})$ de L é logicamente equivalente a uma fórmula prenex $\psi(\bar{x})$ de L. [Você necessita de um novo argumento apenas quando $\bar{x}$ é vazia.] (c) Às vezes é conveniente permitir que L contenha símbolos de relação 0-ária (i.e. letras para sentenças) p; interpretamos tais letras de tal forma que para cada L-estrutura A, p^A é a verdade ou a falsidade, e na definição de $\models$ colocamos $A \models p \Leftrightarrow p^A =$ verdade. Demonstre que numa linguagem tal qual L pode haver uma sentença que não é logicamente equivalente a uma sentença prenex.

8. Seja L uma linguagem de primeira ordem. Uma L-estrutura A é dita **localmente finita** se toda subestrutura finitamente gerada de A é finita. (a) Mostre que existe um conjunto Ω de tipos livres-de-quantificador (i.e. tipos consistindo de fórmulas livres-de-quantificador) tal que para toda L-estrutura A, A é localmente finita se e somente se A omite todo tipo em Ω. (b) Mostre que se L tem assinatura finita, então podemos escolher o conjunto Ω em (a) de forma a consistir de um único tipo.

2.4 Funções e as fórmulas que elas preservam

Seja $f : A \to B$ um homomorfismo de L-estruturas e $\phi(\bar{x})$ uma fórmula de $L_{\infty\omega}$. Dizemos que f **preserva** ϕ se para toda seqüência $\bar{a}$ de A,

$$A \models \phi(\bar{a}) \;\Rightarrow\; B \models \phi(f\bar{a}). \tag{4.1}$$

Nessa terminologia, Teorema 1.3.1 e seu corolário dizem que homomorfismos preservam fórmulas atômicas, e que um homomorfismo é uma imersão se e somente se ele preserva literais. (Teóricos de conjuntos falam de uma fórmula como sendo **absoluta** sob f se (4.1) se verifica com $\Rightarrow$ substituído por $\Leftrightarrow$; por conseguinte fórmulas atômicas são absolutas sob imersões.)

A noção de preservação pode ser usada nas duas direções. Nesta seção classificamos fórmulas em termos das funções que as preservam. A próxima seção classificará funções em termos das fórmulas que eles preservam.

Classificando fórmulas por meio de funções

Nossos principais resultados dirão que certos tipos de função preservam todas as fórmulas com certas características sintáticas. Mais tarde (veja seções 5.4 e 8.3) teremos condições de mostrar que num sentido amplo esses resultados são os melhores possíveis para fórmulas de primeira ordem.

Uma fórmula ϕ é chamada de fórmula $\forall_1$ (pronuncia-se 'fórmula A1'), ou **universal**, se ela é construída a partir de fórmulas livres-de-quantificador por meio de $\bigwedge$, $\bigvee$ e quantificação universal (no máximo). Ela é chamada de fórmula $\exists_1$ (pronuncia-se 'fórmula E1'), ou **existencial**, se ela é construída a partir de fórmulas livres-de-quantificador por meio de $\bigwedge$, $\bigvee$ e quantificação existencial (no máximo).

Essa definição é o extremo inferior da hierarquia. Quase não precisaremos dos extremos mais altos da hierarquia, mas aqui vai para deixar registrado.

(4.2) Fórmulas são consideradas $\forall_0$, e $\exists_0$, se elas são livres-de-quantificador.

(4.3) Uma fórmula é $\forall_{n+1}$ se ela pertence à menor classe de fórmulas que contém as fórmulas $\exists_n$ e é fechada sob $\bigwedge$, $\bigvee$ e adicionando-se quantificadores universais na frente das fórmulas.

(4.4) Uma fórmula é $\exists_{n+1}$ se ela pertence à menor classe de fórmulas que contém as fórmulas $\forall_n$ e é fechada sob $\bigwedge$, $\bigvee$ e adicionando-se quantificadores existenciais na frente das fórmulas.

Fórmulas $\forall_2$ às vezes são conhecidas como fórmulas $\forall\exists$. Note que tal qual a hierarquia aritmética na seção 2.1, as classes de fórmulas crescem à medida que subimos na hierarquia: toda fórmula livre-de-quantificador é $\forall_1$ e $\exists_1$, e todas as fórmulas que são $\forall_1$ ou $\exists_1$ são também $\forall_2$. (Alguns autores usam essa classificação apenas para fórmulas prenex.)

Se uma fórmula é formada a partir de outras fórmulas por meio de apenas $\wedge$ e $\vee$ dizemos que ela é uma **combinação booleana positiva** dessas outras fórmulas. Se apenas $\bigwedge$ e $\bigvee$ são usados, falamos de **combinações booleanas positivas infinitas**. Note que a classe de fórmulas $\forall_n$ e a classe de fórmulas $\exists_n$ de $L_{\infty\omega}$, para qualquer $n < \omega$, são ambas fechadas sob combinações booleanas positivas infinitas.

Teorema 2.4.1. *Seja $\phi(\bar{x})$ uma fórmula $\exists_1$ de assinatura L e $f : A \to B$ uma imersão de L-estruturas. Então f preserva ϕ.*

Demonstração. Primeiro demonstramos que se $\phi(\bar{x})$ é uma fórmula de L livre-de-quantificador e $\bar{a}$ é uma seqüência de elementos de A, então

(4.5) $$A \vDash \phi(\bar{a}) \;\Leftrightarrow\; B \vDash \phi(f\bar{a}).$$

Isso é demonstrado por indução sobre a complexidade de ϕ. Se ϕ é atômica, o Teorema 1.3.1(c) já nos garante (4.5). Se ϕ é $\neg\psi$, $\bigwedge\Phi$ ou $\bigvee\Phi$, então o resultado segue da hipótese da indução e de (1.6)–(1.8) da seção 2.1.

Demonstramos o teorema ao mostrar que para toda fórmula $\exists_1$ $\phi(\bar{x})$ e toda seqüência $\bar{a}$ de elementos de A,

(4.6) $$A \vDash \phi(\bar{a}) \;\Rightarrow\; B \vDash \phi(f\bar{a}).$$

Para ϕ livre-de-quantificador isto segue de (4.5), e $\bigwedge$ e $\bigvee$ não despertam quaisquer questões novas. Resta o caso em que $\phi(\bar{x})$ é $\exists y\, \psi(y, \bar{x})$; cf. (1.10) da seção 2.1. Se $A \vDash \phi(\bar{a})$ então para algum elemento c de A, $A \vDash \psi(c, \bar{a})$. Logo, pela hipótese da indução, $B \vDash \psi(fc, f\bar{a})$ e por isso $B \vDash \phi(f\bar{a})$ como queríamos demonstrar. □

Dizemos que uma fórmula $\phi(\bar{x})$ é **preservada em subestruturas** se sempre que A e B são L-estruturas, A é uma subestrutura de B e $\bar{a}$ é uma seqüência de elementos de A tal que $B \vDash \phi(\bar{a})$, então $A \vDash \phi(\bar{a})$ também. Dizemos que uma teoria T é uma teoria $\forall_1$ se todas as sentenças em T são fórmulas $\forall_1$.

Corolário 2.4.2. (a) *Fórmulas $\forall_1$ são preservadas em subestruturas.*

(b) *Se T é uma teoria $\forall_1$ então a classe de modelos de T é fechada sob a operação de se tomar subestruturas.*

Demonstração. (a) Toda fórmula $\forall_1$ é logicamente equivalente à negação de uma fórmula $\exists_1$. (b) segue imediatamente. $\square$

Parte (b) do corolário pode ser confrontada com as teorias listadas na seção 2.2. Depende da escolha de linguagem, é claro. Na assinatura com apenas o símbolo $\cdot$, uma subestrutura de um grupo não precisa ser um grupo; portanto não existe axiomatização $\forall_1$ da classe de grupos nessa assinatura, e torna-se necessário se contentar com axiomas $\forall_2$. (Cf. Exercício 4 para exemplos similares.)

Uma fórmula de $L_{\infty\omega}$ é dita **positiva** se $\neg$ nunca ocorre nela (e consequentemente $\to$ e $\leftrightarrow$ tampouco ocorrem – mas ela pode conter $\perp$). Chamamos uma fórmula de $\exists_1^+$ ou **existencial positiva** se ela é positiva e existencial. A demonstração do próximo teorema não usa qualquer idéia nova.

Teorema 2.4.3. *Seja $\phi(\bar{x})$ uma fórmula de assinatura L e $f : A \to B$ um homomorfismo de L-estruturas.*
(a) *Se ϕ é uma fórmula $\exists_1^+$ então f preserva ϕ.*
(b) *Se ϕ é positiva e f é sobrejetora, então f preserva ϕ.*
(c) *Se f é um isomorfismo então f preserva ϕ.* $\square$

Existem inúmeros resultados similares para outros tipos de homomorfismo. Veja por exemplo os Exercícios 5, 6, 9, 10.

Cadeias

Seja L uma assinatura e $(A_i : i < \gamma)$ uma seqüência de L-estruturas. Chamamos $(A_i : i < \gamma)$ de uma **cadeia** se para todo $i < j < \gamma$, $A_i \subseteq A_j$. Se $(A_i : i < \gamma)$ é uma cadeia, então podemos definir uma outra L-estrutura B como se segue. O domínio de B é $\bigcup_{i<\gamma} \mathrm{dom}(A_i)$. Para cada constante c, c^{A_i} é independente da escolha de i, logo podemos colocar $c^B = c^{A_i}$ para qualquer $i < \gamma$. Igualmente se F é um símbolo de função n-ária de L e $\bar{a}$ é uma n-upla de elementos de B, então $\bar{a}$ pertence a $\mathrm{dom}(A_i)$ para algum $i < \gamma$, e sem ambigüidade podemos definir $F^B(\bar{a})$ como sendo $F^{A_i}(\bar{a})$. Finalmente se R é um símbolo de relação n-ária R de L, fazemos $\bar{a} \in R^B$ se $\bar{a} \in R^{A_i}$ para alguma (ou toda) A_i contendo $\bar{a}$. Por construção, $A_i \subseteq B$ para todo $i < \gamma$. Chamamos B de **união** da cadeia $(A_i : i < \gamma)$, em símbolos $B = \bigcup_{i<\gamma} A_i$.

Dizemos que uma fórmula $\phi(\bar{x})$ de L é **preservada em uniões de cadeias** se sempre que $(A_i : i < \gamma)$ é uma cadeia de L-estruturas, $\bar{a}$ é uma seqüência de elementos de A_0 e $A_i \vDash \phi(\bar{a})$ para todo $i < \gamma$, então $\bigcup_{i<\gamma} A_i \vDash \phi(\bar{a})$.

Teorema 2.4.4. *Seja $\psi(\bar{y}, \bar{x})$ uma fórmula $\exists_1$ de assinatura L com $\bar{y}$ finita. Então $\forall \bar{y}\, \psi$ é preservada em uniões de cadeias de L-estruturas.*

Demonstração. Seja $(A_i : i < \gamma)$ uma cadeia de L-estruturas e $\bar{a}$ uma seqüência de elementos de A_0 tal que $A_i \vDash \forall \bar{y}\, \psi(\bar{y}, \bar{a})$ para todo $i < \gamma$. Faça $B = \bigcup_{i<\gamma} A_i$. Para mostrar que $B \vDash \forall \bar{y}\, \psi(\bar{y}, \bar{a})$, seja $\bar{b}$ uma upla qualquer de elementos de B. Como $\bar{b}$ é finita, então existe algum $i < \gamma$ tal que $\bar{b}$ pertence a A_i. Por hipótese, $A_i \vDash \psi(\bar{b}, \bar{a})$. Como $A_i \subseteq B$, segue do Teorema 2.4.1 que $B \vDash \psi(\bar{b}, \bar{a})$. $\square$

Qualquer fórmula $\forall_2$ de primeira ordem pode ser trazida para a forma $\forall \bar{y}\, \psi$ com ψ existencial. Logo, o Teorema 2.4.4 diz em particular que toda fórmula $\forall_2$ de primeira ordem é preservada em uniões de cadeias. Por exemplo os axiomas (2.32) na seção 2.2 (para ordenações lineares densas sem extremos) são $\forall_2$ de primeira ordem, e segue-se imediatamente que a união de cadeias de ordenações lineares densas sem extremos é uma ordenação linear densa sem extremos.

Exercícios para a seção 2.4

1. Seja L uma linguagem de primeira ordem. (a) Suponha que ϕ é uma sentença $\forall_1$ de L e A seja uma L-estrutura. Mostre que $A \vDash \phi$ se e somente se $B \vDash \phi$ para toda subestrutura finitamente gerada B de A. (b) Mostre que se A e B são L-estruturas, e toda subestrutura finitamente gerada B de A é imersível em A, então toda sentença $\forall_1$ de L que é verdadeira B é verdadeira em A também.

2. Suponha que a linguagem de primeira ordem L tem apenas um número finito de símbolos de relação e de constante, e nenhum símbolo de função. Mostre que se A e B são L-estruturas tais que toda sentença $\forall_1$ de L que é verdadeira em B é verdadeira em A também, então toda subestrutura finitamente gerada de A é imersível em B.

3. Seja L uma linguagem de primeira ordem e T uma teoria em L, tal que toda fórmula $\phi(\bar{x})$ de L que é $\forall_1$ é equivalente módulo T a uma fórmula $\exists_1\ \psi(\bar{x})$. Mostre que toda fórmula $\phi(\bar{x})$ de L é equivalente módulo T a uma fórmula $\exists_1\ \psi(\bar{x})$. [Ponha ϕ em forma prenex e elimine os blocos de quantificadores, começando de dentro para fora.]

4. Na seção 2.2 acima existem axiomatizações de várias classes importantes de estruturas. Mostre que, usando as assinaturas dadas na seção 2.2, não é possível escrever conjuntos de axiomas das seguintes formas: (a) um conjunto de axiomas $\exists_1$ para a classe dos grupos; (b) um conjunto de axiomas $\forall_1$ para a classe das álgebras booleanas sem átomos; (c) um único axioma $\exists_2$ de primeira ordem para a classe de ordenações lineares densas sem extremos.

Seja L uma assinatura contendo o símbolo de relação binária $<$. Se A e B são L-estruturas, dizemos que B é uma **extensão-por-extremidade** *de A se $A \subseteq B$ e sempre que a é um elemento de A e $B \vDash b < a$ então b é um elemento de A também. Dizemos que uma imersão $f : A \to B$ de L-estruturas é uma* **imersão-por-extremidade** *se B é uma extensão-por-extremidade da imagem de f. Definimos $(\forall x < y)$ e $(\exists x < y)$ como na seção 2.1: $(\forall x < y)\phi$ é $\forall x(x < y \to \phi)$ e $(\exists x < y)\phi$ é $\exists x(x < y \wedge \phi)$, e os quantificadores $(\forall x < y)$ e $(\exists x < y)$ são ditos* **limitados**.
5. Seja L como definido acima. Uma fórmula Π^0_0 é uma fórmula na qual todos os quantificadores são limitados. Uma fórmula Σ^0_1 é uma fórmula na menor classe de fórmulas que contém as fórmulas Π^0_0 e é fechada sob $\bigwedge$, $\bigvee$ e quantificação existencial. Mostre que imersões-por-extremidade preservam fórmulas Σ^0_1.

6. Seja L uma assinatura contendo um símbolo 1-ário P. Por uma P-**imersão** queremos dizer uma imersão $e : A \to B$, onde A e B são L-estruturas, tal que e mapeia P^A sobre P^B. Seja Φ a menor classe de fórmulas de $L_{\infty\omega}$ tal que: (i) toda fórmula livre-de-quantificador pertence a Φ, (ii) Φ é fechada sob $\bigwedge$ e $\bigvee$, (iii) se ϕ pertence a Φ e x é uma variável então $\exists x\, \phi$ e $\forall x(Px \to \phi)$ pertencem a Φ. Mostre que toda P-imersão preserva todas as fórmulas em Φ.

Seja L uma assinatura. Por uma **cadeia descendente de L-estruturas** *queremos dizer uma seqüência $(A_i : i < \gamma)$ de L-estruturas tal que $A_j \subseteq A_i$ sempre que $i < j < \gamma$.*
7. Mostre que se $(A_i : i < \gamma)$ é uma cadeia descendente de L-estruturas, então existe uma única L-estrutura B que é uma subestrutura de cada A_j e tem domínio $\bigcap_{i<\gamma} \mathrm{dom}(A_i)$. (Chamamos essa estrutura de **interseção** da cadeia, em símbolos $\bigcap_{i<\gamma} A_i$.)

Dizemos que uma fórmula ϕ de $L_{\infty\omega}$ é **preservada em interseções de cadeias descendentes** *se para toda cadeia descendente $(A_i : i < \gamma)$ de L-estruturas e toda upla $\bar{a}$ de elementos de*

$\bigcap_{i<\gamma} A_i$, *se* $A_j \models \phi(\bar{a})$ *para todo* $j < \gamma$ *então* $\bigcap_{i<\gamma} A_i \models \phi(\bar{a})$.
8. (a) Mostre que, se ϕ é uma fórmula de $L_{\infty\omega}$ da forma $\forall\bar{x}\exists_{=n}y\,\psi(\bar{x},y,\bar{z})$ onde ψ não tem quantificadores, então ϕ é preservada em interseções de cadeias descendentes de L-estruturas. (b) Escreva um conjunto de axiomas de primeira ordem dessa forma para a classe dos corpos real-fechados. (c) Podemos encontrar axiomas dessa forma para a classe de ordenações lineares densas sem extremos?

Seja $\mathbf{K}$ *a classe de todas as* L*-estruturas que portam uma ordenação parcial (nomeada pelo símbolo de relação* $<$*) que não tem elemento maximal. Quando* A *e* B *são estruturas em* $\mathbf{K}$*, dizemos que* A *é uma* **subestrutura cofinal** *de* B *(e que* B *é uma* **extensão cofinal** *de* A*) se* $A \subseteq B$ *e para todo elemento* b *de* B *existe um elemento* a *em* A *tal que* $B \models b < a$*. Uma fórmula* $\phi(\bar{x})$ *de* L *é* **preservada em subestruturas cofinais** *se sempre que* A *é uma subestrutura cofinal de* B *e* $\bar{a}$ *é uma upla em* A *tal que* $B \models \phi(\bar{a})$*, então* $A \models \phi(\bar{a})$*.*
9. Seja L uma assinatura e Φ a menor classe de fórmulas de $L_{\infty\omega}$ tal que (1) todos os literais de L estão em Φ, (2) Φ é fechada sob $\bigwedge$ e $\bigvee$, e (3) se $\phi(x,\bar{y})$ é uma fórmula qualquer em Φ, então lá também estão as fórmulas $\forall x\,\phi$ e $\exists z\forall x(z < x \to \phi)$. Mostre que toda fórmula em Φ é preservada em subestruturas cofinais.

Dizemos que um símbolo de relação R **é positivo na** *fórmula* ϕ *de* $L_{\infty\omega}$ *se* ϕ *pertence à menor classe* X *de fórmulas tal que (1) todo literal de* L *que não contém* R *pertence a* X*, (2) toda fórmula atômica de* L *pertence a* X*, e (3)* X *é fechada sob* $\bigwedge$*,* $\bigvee$ *e quantificação. (Por exemplo* R *é positivo em* $\forall x(Qx \to Rx)$*, mas não o é em* $\forall x(Rx \to Qx)$*.)*
10. Seja L uma assinatura e L^+ a assinatura obtida adicionando-se a L um novo símbolo de relação n-ária P. Seja $\bar{x}$ uma n-upla de variáveis e $\phi(\bar{x})$ uma fórmula de L^+ na qual P é positivo. Seja A uma L-estrutura; suponha que X e Y são relações n-árias sobre $\mathrm{dom}(A)$ com $X \subseteq Y$. É óbvio que a função identidade sobre A forma uma imersão $e : (A,X) \to (A,Y)$ de L^+-estruturas. (a) Mostre que e preserva ϕ. (b) Para qualquer relação n-ária X sobre $\mathrm{dom}(A)$ definimos $\pi(X)$ como sendo a relação $\{\bar{a} : (A,X) \models \phi(\bar{a})\}$. Mostre que se $X \subseteq Y$ então $\pi(X) \subseteq \pi(Y)$.

2.5 Classificando funções por meio de fórmulas

Seja L uma assinatura, $f : A \to B$ um homomorfismo de L-estruturas e Φ uma classe de fórmulas de $L_{\infty\omega}$. Chamamos f de um **Φ-função** se f preserva todas as fórmulas em Φ.

De longe o mais importante exemplo é quando Φ é a classe de todas as fórmulas de primeira ordem. Um homomorfismo que preserva todas as fórmulas de primeira ordem tem que ser uma imersão (pelo Corolário 1.3.2); chamamos tal função de uma **imersão elementar**.

Dizemos que B é uma **extensão elementar** de A, ou que A é uma **subestrutura elementar** de B, em símbolos $A \preccurlyeq B$, se $A \subseteq B$ e a função inclusão é uma imersão elementar. (Essa função é então descrita como uma **inclusão elementar**.) Escrevemos $A \prec B$ quando A é uma subestrutura elementar própria de B.

Note que $A \preccurlyeq B$ implica em $A \equiv B$. Mas existem exemplos para mostrar que $A \subseteq B$ e $A \equiv B$ juntos não implicam em $A \preccurlyeq B$; veja o Exercício 2.

Teorema 2.5.1. ***(Critério de Tarski–Vaught para subestruturas elementares).*** *Seja* L *uma linguagem de primeira ordem e sejam* A*,* B L*-estruturas com* $A \subseteq B$*. Então as seguintes condições são equivalentes:*
(a) A *é uma subestrutura elementar de* B*.*

(b) *Para toda fórmula $\psi(\bar{x}, y)$ de L e toda upla $\bar{a}$ de A, se $B \models \exists y\, \psi(\bar{a}, y)$ então $B \models \psi(\bar{a}, d)$ para algum elemento d de A.*

Demonstração. Seja $f : A \to B$ a função inclusão. (a)⇒(b): Se $B \models \exists y\, \psi(\bar{a}, y)$ então $A \models \exists y\, \psi(\bar{a}, y)$ já que f é elementar; logo existe d em A tal que $A \models \psi(\bar{a}, d)$, e chegamos em $B \models \psi(\bar{a}, d)$ aplicando f novamente. (b)⇒(a): tome a prova do Teorema 2.4.1 na seção anterior; nossa condição (b) é exatamente o que se precisa para fazer aquela prova mostrar que f é elementar. □

O Teorema 2.5.1 por si só não é muito útil para se detectar subestruturas elementares na natureza (mesmo assim veja Exercícios 3, 4 adiante). Seu principal uso é em se construir subestruturas elementares, como no Exercício 5.

Se Φ é um conjunto de fórmulas, dizemos que uma cadeia $(A_i : i < \gamma)$ de L-estruturas é uma **Φ-cadeia** quando cada função inclusão $A_i \subseteq A_j$ é uma Φ-função. Em particular uma **cadeia elementar** é uma cadeia na qual as inclusões são elementares.

Teorema 2.5.2 ***(Teorema de Tarski–Vaught sobre uniões de cadeias elementares).*** *Seja $(A_i : i < \gamma)$ uma cadeia elementar de L-estruturas. Então $\bigcup_{i<\gamma} A_i$ é uma extensão elementar de cada A_j ($j < \gamma$).*

Demonstração. Faça $A = \bigcup_{i<\gamma} A_i$. Seja $\phi(\bar{x})$ uma fórmula de primeira ordem de assinatura L. Demonstramos por indução sobre a complexidade de ϕ que para todo $j < \gamma$ e toda upla $\bar{a}$ de elementos de A_j,

$$A_j \models \phi(\bar{a}) \;\Leftrightarrow\; A \models \phi(\bar{a}). \tag{5.1}$$

Quando ϕ é atômica, temos (5.1) pelo Teorema 1.3.1(c). Os casos $\neg\psi$, $(\psi \wedge \chi)$ e $(\psi \vee \chi)$ são simples. Suponha então que ϕ é da forma $\exists y\, \psi(\bar{x}, y)$. Se $A \models \phi(\bar{a})$ então existe algum b em A tal que $A \models \psi(\bar{a}, b)$. Escolha $k < \gamma$ tal que b pertença a dom(A_k) e $k \geqslant j$. Então $A_k \models \psi(\bar{a}, b)$ por hipótese da indução, logo $A_k \models \phi(\bar{a})$. Então $A_j \models \phi(\bar{a})$ como queríamos, já que a cadeia é elementar. Isso demonstra a direção da direita para a esquerda em (5.1); a outra direção é mais fácil. O argumento para $\forall y\, \psi(\bar{x}, y)$ é similar.
□

Lema 2.5.3 ***(Lema do diagrama elementar).*** *Suponha que L é uma linguagem de primeira ordem, A e B são L-estruturas, $\bar{c}$ é uma upla de constantes distintas que não estão em L, $(A, \bar{a})$ e $(B, \bar{b})$ são $L(\bar{c})$-estruturas, e $\bar{a}$ gera A. Então as seguintes condições são equivalentes.*
(a) *Para toda fórmula $\phi(\bar{x})$ de L, se $(A, \bar{a}) \models \phi(\bar{c})$ então $(B, \bar{b}) \models \phi(\bar{c})$.*
(b) *Existe uma imersão elementar $f : A \to B$ tal que $f\bar{a} = \bar{b}$.*

Demonstração. (b) claramente implica em (a). Para a recíproca, defina f como na prova do Lema 1.4.2. Se $\bar{a}'$ é uma upla qualquer de elementos de A e $\phi(\bar{z})$ é uma fórmula qualquer de L, então escolhendo-se uma seqüência apropriada $\bar{x}$ de variáveis, podemos escrever $\phi(\bar{z})$ como $\psi(\bar{x})$ de tal forma que $\phi(\bar{a}')$ seja a mesma fórmula que $\psi(\bar{a})$. Então $A \models \phi(\bar{a}')$ implica em $A \models \psi(\bar{a})$, que por (a) implica em $B \models \psi(f\bar{a})$ e portanto $B \models \phi(f\bar{a}')$. Por conseguinte f é uma imersão elementar. □

Definimos o **diagrama elementar** de uma L-estrutura A, em símbolos eldiag(A), como sendo Th$(A, \bar{a})$ onde $\bar{a}$ é qualquer seqüência que gera A. Por (a)⇒(b) no lema temos o seguinte fato, que será usado constantemente para se construir extensões elementares: *se D é um modelo do diagrama elementar da L-estrutura A, então existe uma imersão elementar de A no reduto $D|L$.*

A noção de Φ-função tem outras aplicações.

Exemplo 1: ***Extensões puras.*** Este exemplo é familiar aos teóricos de grupos abelianos e àqueles que trabalham com módulos. Sejam A e B R-módulos à esquerda, e A um submódulo de B. Dizemos que A é **pura** em B, ou que B é uma **extensão pura** de A, se a seguinte condição se verifica:

(5.2) para todo conjunto finito E de equações com parâmetros em A, se E tem uma solução em B então E já tem uma solução em A.

Agora o enunciado que diz que um certo conjunto finito de equações com parâmetros $\bar{a}$ tem uma solução pode ser escrito $\exists\bar{x}(\psi_1(\bar{x},\bar{a}) \wedge \ldots \wedge \psi_k(\bar{x},\bar{a}))$ com $\psi_1,\ldots,\psi_k$ atômicas; uma fórmula de primeira ordem dessa forma é dita **primitiva positiva**, ou **p.p.** abreviadamente. Logo podemos definir uma imersão **pura** como sendo aquela que preserva as negações de todas as fórmulas primitivas positivas.

Exercícios para a seção 2.5

Nosso primeiro exercício é um pequeno refinamento do Teorema 2.5.1.

1. Seja L uma linguagem de primeira ordem e B uma L-estrutura. Suponha que X é um conjunto de elementos de B tal que, para toda fórmula $\psi(\bar{x},y)$ de L e toda upla $\bar{a}$ de elementos de X, se $B \models \exists y\, \psi(\bar{a},y)$ então $B \models \psi(\bar{a},d)$ para algum elemento d em X. Mostre que X é o domínio de uma subestrutura elementar de B.

2. Dê um exemplo de uma estrutura A com uma subestrutura B tal que $A \cong B$ mas B não é uma subestrutura elementar de A. [Tome A como sendo $(\omega,<)$.]

3. Seja B uma L-estrutura e A uma subestrutura com a seguinte propriedade: se $\bar{a}$ é uma upla qualquer de elementos de A e b é um elemento de B, então existe um automorfismo f de B tal que $f\bar{a} = \bar{a}$ e $fb \in \mathrm{dom}(A)$. Mostre que se $\phi(\bar{x})$ é uma fórmula qualquer de $L_{\infty\omega}$ e $\bar{a}$ uma upla em A, então $A \models \phi(\bar{a}) \Leftrightarrow B \models \phi(\bar{a})$. (Em particular $A \preccurlyeq B$.)

4. Suponha que B é um espaço vetorial e A é um subespaço de dimensão infinita. Mostre que $A \preccurlyeq B$.

O próximo exercício será refinado na seção 3.1 adiante.

5. Seja L uma linguagem contável de primeira ordem e B uma L-estrutura de cardinalidade infinita μ. Mostre que para todo cardinal infinito $\lambda < \mu$, B tem uma subestrutura elementar de cardinalidade λ. [Escolha um conjunto X de λ elementos de B, e feche X de tal forma que o Exercício 1 se aplique.]

6. Seja $(A_i : i < \gamma)$ uma cadeia de estruturas tal que para todo $i < j < \gamma$, A_i é uma subestrutura pura de A_j. Mostre que cada estrutura A_j $(j < \gamma)$ é uma subestrutura pura da união $\bigcup_{i<\gamma} A_i$.

Os próximos dois exercícios não são particularmente difíceis, mas eles usam coisas de seções vindouras.

7. Mostre que se n é um inteiro positivo, então existem uma linguagem de primeira ordem L e L-estruturas A e B tais que $A \subseteq B$ e para toda n-upla $\bar{a}$ em A e toda fórmula $\phi(x_0,\ldots,x_{n-1})$ de L, $A \models \phi(\bar{a}) \Leftrightarrow B \models \phi(\bar{a})$, mas B não é uma extensão elementar de A. [Use limites de Fraïssé

(Capítulo 6) para construir uma estrutura contável C^+ na qual um símbolo de relação $(2n+2)$-ária E define uma relação de equivalência aleatória sobre os conjuntos de $n+1$ elementos, e um símbolo de relação $(2n+2)$-ária R arranja randomicamente essas classes de equivalência em uma ordenação linear cujo primeiro elemento é definido pelo símbolo de relação $(n+1)$-ária P. Forme C desprezando o símbolo P de C^+. Encontre uma imersão $e : C \to C$ cuja imagem não contém o primeiro elemento da ordenação.]

8. Suponha que R é um anel e A, B são R-módulos à esquerda com $A \subseteq B$, e, para todo elemento a de A e toda fórmula p.p. $\phi(x)$ sem parâmetros, $A \vDash \phi(a) \Leftrightarrow B \vDash \phi(a)$. Mostre que A é pura em B. [Mostre por indução sobre n que se $\phi(x_0, \ldots, x_n)$ é uma fórmula pura e $\bar{a}$ uma $(n+1)$-upla em A tal que $B \vDash \phi(\bar{a})$ então $A \vDash \phi(\bar{a})$. Se $B \vDash \phi(\bar{a})$ então $B \vDash \exists x_n \, \phi(\bar{a}|n, x_n)$, portanto pela hipótese da indução existe c em A tal que $A \vDash \phi(\bar{a}|n, c)$, logo por subtração (justifique isso!) $B \vDash \phi(0, \ldots, 0, a_n - c)$; portanto $A \vDash \phi(0, \ldots, 0, a_n - c)$, e a adição fornece $A \vDash \phi(\bar{a})$.]

9. Seja R um anel e L a linguagem de R-módulos à esquerda. Seja M um R-módulo à esquerda e $\phi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ uma fórmula p.p. de L. (a) Mostre que $\phi(M^n)$ é um subgrupo de M^n considerado como um grupo abeliano. *Grupos dessa forma são conhecidos como os* **grupos p.p.-definíveis** *de M^n. Leia o Exercício 2.7.12 para ver sua importância.* (b) Mostre que se $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ é uma fórmula p.p. de L e $\bar{b}$ uma upla de M, então $\phi(M^n, \bar{b})$ é vazio ou um coconjunto do subgrupo p.p.-definível $\phi(M^n, 0, \ldots, 0)$. Mostre que ambas as possibilidades podem ocorrer.

2.6 Traduções

Na teoria dos modelos tal qual em qualquer outro lugar, podem haver várias maneiras de dizer a mesma coisa. Diga-se da maneira errada e pode-se não obter os resultados que se pretendia.

Esta seção é uma introdução a alguns tipos de parafrase que teóricos de modelos acham úteis. *Essas parafrases nunca alteram a classe de relações definíveis sobre uma estrutura – elas apenas afetam as fórmulas que podem ser usadas para definir tais relações.*

1: Fórmulas desaninhadas

Seja L uma assinatura. Por uma **fórmula atômica desaninhada** de assinatura L queremos dizer uma fórmula atômica de uma das seguintes formas:

(6.1)	$x = y$;	
(6.2)	$c = y$	para alguma constante c de L;
(6.3)	$F(\bar{x}) = y$	para algum símbolo de função F de L;
(6.4)	$R\bar{x}$	para algum símbolo de relação R de L.

Chamamos uma fórmula de **desaninhada** se todas as suas subfórmulas atômicas são desaninhadas.

Fórmulas desaninhadas são práticas quando queremos fazer definições ou provas por indução sobre a complexidade de fórmulas. O caso atômico fica particularmente simples: nunca precisamos considerar quaisquer termos exceto variáveis, constantes e termos $F(\bar{x})$ onde F é um símbolo de função. Existirão exemplos nas seções 3.3 (jogos de vai-e-vem) e 4.3 (interpretações).

Teorema 2.6.1. *Seja L uma assinatura. Então toda fórmula atômica $\phi(\bar{x})$ de L é logicamente equivalente a fórmulas desaninhadas de primeira ordem $\phi^{\forall}(\bar{x})$ e $\phi^{\exists}(\bar{x})$ de assinatura L tais que $\phi^{\forall}$ é uma fórmula $\forall_1$ e $\phi^{\exists}$ é uma fórmula $\exists_1$.*

Demonstração por meio de exemplo. A fórmula $F(G(x), z) = c$ é logicamente equivalente a

(6.5) $$\forall uw(G(x) = u \wedge F(u, z) = w \to c = w)$$

e a

(6.6) $$\exists uw(G(x) = u \wedge F(u, z) = w \wedge c = w). \qquad \square$$

Corolário 2.6.2. *Seja L uma linguagem de primeira ordem. Então toda fórmula $\phi(\bar{x})$ de L é logicamente equivalente a uma fórmula desaninhada $\psi(\bar{x})$ de L. Generalizando, toda fórmula de $L_{\infty\omega}$ é logicamente equivalente a uma fórmula desaninhada de $L_{\infty\omega}$.*

Demonstração. Use o teorema para substituir todas as subfórmulas atômicas por fórmulas desaninhadas de primeira ordem. $\square$

Se ϕ no corolário é uma fórmula $\exists_1$, então escolhendo-se sabiamente entre $\theta^{\forall}$ e $\theta^{\exists}$ para cada subfórmula atômica θ de ϕ, podemos fazer com que ψ no corolário seja uma fórmula $\exists_1$ também. Na verdade podemos sempre escolher ψ de forma que esteja no mesmo lugar que ϕ na hierarquia $\forall_n$, $\exists_n$ (ver (4.2)–(4.4) na seção 2.4 acima), a menos que ϕ não tenha quantificadores.

2: Expansões definicionais e extensões

Seja L e L^+ assinaturas com $L \subseteq L^+$, e seja R um símbolo de relação de L^+. Então uma **definição explícita de R em termos de L** é uma sentença da forma

(6.7) $$\forall \bar{x}(R\bar{x} \leftrightarrow \phi(\bar{x}))$$

onde ϕ é uma fórmula de L. Igualmente se c é uma constante e F é um símbolo de função de L^+, **definições explícitas de c, F em termos de L** são sentenças da forma

(6.8) $$\forall y(c = y \leftrightarrow \phi(y)),$$
$$\forall \bar{x}y(F(\bar{x}) = y \leftrightarrow \psi(\bar{x}, y))$$

onde ϕ, ψ são fórmulas de L. Note que as sentenças em (6.8) têm conseqüências na linguagem L. Elas implicam respectivamente em

(6.9) $$\exists_{=1} y\, \phi(y),$$
$$\forall \bar{x} \exists_{=1} y\, \psi(\bar{x}, y).$$

Chamamos as sentenças (6.9) de **condições de admissibilidade** das duas definições explícitas em (6.8).

Definições explícitas têm duas propriedades principais, como segue.

Teorema 2.6.3 ***(Unicidade de expansões definicionais).*** *Sejam L e L^+ assinaturas com $L \subseteq L^+$. Sejam A e B L^+-estruturas, R um símbolo de relação de L^+ e θ uma definição explícita de R em termos de L. Se A e B são ambas modelos de θ e $A|L = B|L$, então $R^A = R^B$. Similarmente para constantes e símbolos de função.*

Demonstração. Imediata. □

Teorema 2.6.4 ***(Existência de expansões definicionais).*** *Sejam L e L^+ assinaturas com $L \subseteq L^+$. Suponha que para cada símbolo S de $L^+ \backslash L$, θ_S é uma definição explícita de S em termos de L; seja U o conjunto de tais definições.*

(a) *Se C é uma L-estrutura qualquer que satisfaz as condições de admissibilidade (caso existam) das definições θ_S, então podemos expandir C para formar uma L^+-estrutura C^+ que é modelo de U.*

(b) *Toda fórmula $\chi(\bar{x})$ de assinatura L^+ é equivalente módulo U a uma fórmula $\chi^*(\bar{x})$ de assinatura L.*

(c) *Se χ e todas as sentenças θ_S são de primeira ordem, então χ^* também o é.*

Demonstração. As definições nos dizem exatamente como interpretar os símbolos S em C^+, portanto temos (a). Para (b), use o Teorema 2.6.1 para substituir toda fórmula atômica em χ por uma fórmula desaninhada, e observe que as definições explícitas traduzem cada fórmula atômica desaninhada diretamente em uma fórmula de assinatura L. Então (c) está claro também. □

Uma estrutura C^+ como no Teorema 2.6.4(a) é chamada de **expansão definicional** de C. Se L e L^+ são assinaturas com $L \subseteq L^+$, e T é uma teoria de assinatura L, então uma **extensão definicional** de T para L^+ é uma teoria equivalente a $T \cup \{\theta_S : S$ é um símbolo em $L \backslash L^+\}$ onde para cada símbolo S em $L^+ \backslash L$,

(6.10) θ_S é uma definição explícita de S em termos de L, e

(6.11) se S é uma constante ou símbolo de função e χ é a condição de admissibilidade para θ_S então $T \vdash \chi$.

Os Teoremas 2.6.3 e 2.6.4 nos dizem que se T^+ é uma extensão definicional de T para L^+, então todo modelo C de T tem uma única expansão C^+ que é um modelo de T^+, e C^+ é uma expansão definicional de C.

Seja T^+ uma teoria na linguagem L^+, e L uma linguagem $\subseteq L^+$. Dizemos que um símbolo S de L^+ é **explicitamente definível em T^+ em termos de** L se T^+ acarreta alguma definição explícita de S em termos de L. Portanto, a menos de equivalência de teorias, T^+ é uma extensão definicional de uma teoria T em L se e somente se (1) T e T^+ têm as mesmas conseqüências em L e (2) todo símbolo de L^+ é explicitamente definível em T^+ em termos de L.

Extensões definicionais são úteis para se substituir fórmulas complicadas por fórmulas simples. Por exemplo, em teoria dos conjuntos elas nos permitem escrever $\phi(x \cup y)$ ao invés da fórmula menos legível $\exists z(\phi(z) \wedge \forall t(t \in z \leftrightarrow t \in x \vee t \in y))$.

Advertência – particulamente para quem trabalha com desenvolvimento de software usando lógica de primeira ordem. É importante que os símbolos sendo definidos em

(6.7) e (6.8) não ocorram nas fórmulas ϕ, ψ. Se os símbolos pudessem ocorrer em ϕ ou ψ, ambos os Teoremas 2.6.3 e 2.6.4 falhariam.

Existe uma armadilha aqui. Às vezes encontra-se umas coisas chamadas 'definições' que parecem definições explícitas exceto que o símbolo sendo definido ocorre em ambos os lados da fórmula. Essas podem ser definições implícitas, que são inofensivas – ao menos em lógica de primeira ordem; veja o teorema de Beth, Teorema 5.5.4 adiante. Por outro lado se elas têm babados lilás por baixo e bolinhas cor-de-rosa por cima, elas quase certamente são *definições recursivas*. As definições recursivas de 'mais' e 'vezes' em aritmética, (2.14)–(2.15) na seção 2.2, constituem-se num exemplo típico; pode-se reescrevê-las de forma que elas pareçam perigosamente com definições explícitas. *Em geral, definições recursivas definem símbolos sobre uma determinada estrutura, e não sobre todos os modelos de uma teoria. Não há garantia de que elas podem ser traduzidas para definições explícitas em uma teoria de primeira ordem.* A noção de definição recursiva está além da teoria dos modelos e eu não direi mais nada sobre isso aqui.

Antes de deixar extensões definicionais para trás, aqui vai um exemplo extendido que será útil na próxima seção.

Suponha que L_1 e L_2 são assinaturas; para simplificar a próxima definição vamos assumir que elas são disjuntas. Sejam T_1 e T_2 teorias de primeira ordem de assinaturas L_1, L_2 respectivamente. Então dizemos que T_1 e T_2 são **definicionalmente equivalentes** se existe uma teoria de primeira ordem T na assinatura $L_1 \cup L_2$ que é uma extensão definicional de ambas T_1 e T_2.

Quando teorias T_1 e T_2 são definicionalmente equivalentes como no caso acima, podemos transformar um modelo A_1 de T_1 em um modelo A_2 de T_2 primeiro expandindo A_1 para um modelo de T e depois aplicando a restrição à linguagem L_2; podemos retornar a A_1 a partir de A_2 fazendo o mesmo na direção oposta. Nessa situação dizemos que as estruturas A_1 e A_2 são **definicionalmente equivalentes**.

Exemplo 1: *Álgebras de termos em uma outra linguagem.* No Exemplo 1 da seção 2.2 escrevemos algumas sentenças (2.3)–(2.7) que são verdadeiras em toda álgebra de termos de uma assinatura algébrica L fixa. Chamemos essas sentenças T_1 e seja L_1 sua linguagem de primeira ordem. Seja L_2 uma linguagem de primeira ordem cuja assinatura consiste dos seguintes símbolos:

(6.12) símbolos de relação 1-ária É_c (para cada constante c de L_1) e É_F (para cada símbolo de função F de L_1);

(6.13) um símbolo de relação 1-ária F_i para cada símbolo de função F de L_1 e cada $i < \mathrm{aridade}(F)$.

Afirmamos que T_1 é definicionalmente equivalente à seguinte teoria T_2 em L_2.

(6.14) $\exists_{=1} y \text{É}_c(y)$ para cada símbolo de constante c de L.

(6.15) $\forall x_0 \dots x_{n-1} \exists_{=1} y(\text{É}_F(y) \wedge \bigwedge_{i<n} F_i(y) = x_i)$ para cada símbolo de função F de L.

(6.16) $\forall x \neg(\text{É}_c(x) \wedge \text{É}_d(x))$ onde c, d são símbolos de constante ou símbolos de função distintos.

(6.17) $\forall x(\neg\text{É}_F(x) \to F_i(x) = x)$ para cada símbolo de função F_i.

(6.18) $\forall x(t(F_i(x)) = x \to \neg\text{É}_F(x))$ para cada símbolo de função F_i e cada termo $t(y)$ de L_2.

Para mostrar isso, devemos escrever definições explícitas U_1 de símbolos de L_2 em termos de L_1, e definições explícitas U_2 dos símbolos de L_1 em termos de L_2, de tal forma que T_i implique as condições de admissibilidade para U_i ($i = 1, 2$), e $T_1 \cup U_1$ seja equivalente a $T_2 \cup U_2$. Aqui vão as definições de L_2 em termos de L_1, onde c é uma constante qualquer de L_1, F é um símbolo de função qualquer de L_1 com aridade n e $i < n$.

(6.19)
$$\begin{aligned}
&\forall y(\text{É}_c(y) \leftrightarrow y = c).\\
&\forall y(\text{É}_F(y) \leftrightarrow \exists \bar{x}\, F\bar{x} = y).\\
&\forall xy\, (F_i x = y \leftrightarrow (\exists y_0 \dots y_{i-1} y_{i+1} \dots y_{n-1}\\
&\quad F(y_0, \dots, y_{i-1}, y, y_{i+1}, \dots, y_{n-1}) = x)\\
&\quad \vee(x = y \wedge \neg\exists \bar{y}\, F\bar{y} = x)).
\end{aligned}$$

E aqui estão as definições explícitas de L_1 em termos de L_2, onde c é uma constante qualquer de L_1 e F um símbolo de função qualquer de L_1:

(6.20)
$$\begin{aligned}
&\forall y(y = c \leftrightarrow \text{É}_c(y));\\
&\forall x_0 \dots x_{n-1} y(F(x_0, \dots, x_{n-1}) = y \leftrightarrow (\text{É}_F(y) \wedge \bigwedge_{i<n} F_i(y) = x_i)).
\end{aligned}$$

Essas duas teorias T_1 e T_2 fornecem maneiras opostas de se olhar para a álgebra de termos: T_1 gera os termos de seus componentes, enquanto T_2 recupera os componentes a partir dos termos. Uma característica curiosa é que T_2 usa apenas símbolos de função e de relação 1-árias, enquanto que não há limite para as aridades dos símbolos em T_1. A teoria T_2 será útil para analisar T_1 na próxima seção.

3: Atomização

Aqui temos uma teoria T numa linguagem L, e um conjunto Φ de fórmulas de L que não são sentenças. O objetivo é extender T para uma teoria T^+ numa linguagem maior L^+ de tal forma que toda fórmula em Φ seja equivalente módulo T^+ a uma fórmula atômica. Na verdade o conjunto de novas sentenças $T^+ \backslash T$ acabará por depender apenas de L e não de T.

Esse dispositivo é às vezes chamado de Morleyização. Porém ele é bem conhecido desde 1920 quando Skolem o introduziu, e não tem nada particularmente a ver com Morley. Por isso achei melhor usar um nome mais descritivo. 'Skolemização' já significa algo diferente; veja a seção 3.1 adiante.

Teorema 2.6.5 ***(Teorema da atomização).*** *Seja L uma linguagem de primeira ordem. Então existem uma linguagem de primeira ordem $L^\Theta \supseteq L$ e uma teoria Θ em L^Θ tal que*

(a) *toda L-estrutura A pode ser expandida de uma única maneira para uma L^Θ-estrutura A^Θ que é modelo de Θ,*

(b) *toda fórmula $\phi(\bar{x})$ de L^Θ é equivalente módulo Θ a uma fórmula $\psi(\bar{x})$ de L, e também (quando $\bar{x}$ não é vazio) a uma fórmula atômica $\chi(\bar{x})$ de L^Θ,*

(c) *todo homomorfismo entre modelos não-vazios de Θ é uma imersão elementar,*

(d) $|L^\Theta| = |L|$.

Demonstração. Para cada fórmula $\phi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ de L com $n > 0$, introduza um novo símbolo de relação n-ária R_ϕ. Tome L^Θ como sendo a linguagem de primeira ordem obtida a partir de L pela adição de todos os símbolos R_ϕ, e tome Θ como sendo o conjunto de todas as sentenças da forma

$$\forall \bar{x}(R_\phi \leftrightarrow \phi(\bar{x})). \tag{6.21}$$

Então (d) é imediato. A teoria Θ é uma extensão definicional da teoria vazia em L, logo temos (a) e a primeira parte de (b). A segunda parte de (b) então segue devido a (6.21).

Agora, devido a (b), toda fórmula de L que não é uma sentença é equivalente módulo Θ a uma fórmula atômica. Se ϕ é uma sentença de L então $\phi \wedge x = x$ é equivalente módulo Θ a uma fórmula atômica $\chi(x)$; todo homomorfismo entre modelos não-vazios de Θ que preserva χ deve também preservar ϕ. Logo (c) segue devido ao Teorema 1.3.1(b). □

Pode-se aplicar a mesma técnica a um conjunto particular Φ de fórmulas de L, caso se deseje estudar homomorfismos que preservam as fórmulas em Φ. Se A e B são modelos de Θ, então toda imersão (na verdade todo homomorfismo) de A para B deve preservar as fórmulas em Φ, devido ao Teorema 1.3.1(b).

Teorema 2.6.6. *Seja Θ a teoria construída na demonstração do Teorema 2.6.5. Então para toda teoria T em L^Θ, $T \cup \Theta$ é equivalente a uma teoria $\forall_2$.*

Demonstração. Devido ao item (b) do teorema, toda fórmula de L^Θ com pelo menos uma variável livre é equivalente módulo Θ a uma fórmula atômica de L^Θ. Logo $T \cup \Theta$ é equivalente a uma teoria $T' \cup \Theta$ onde toda sentença de T' é $\forall_1$ no pior caso. Basta agora demonstrar que a própria Θ é equivalente a uma teoria $\forall_2$.

Seja Θ' o conjunto de todas as sentenças das seguintes formas:

(6.22) $\forall\bar{x}(\phi(\bar{x}) \leftrightarrow R_\phi(\bar{x}))$ onde ϕ é uma fórmula atômica de L;

(6.23) $\forall\bar{x}(R_\phi(\bar{x}) \wedge R_\psi(\bar{x}) \leftrightarrow R_{\phi\wedge\psi}(\bar{x}))$;
e igualmente para $\vee$ no lugar de $\wedge$;

(6.24) $\forall\bar{x}(\neg R_\phi(\bar{x}) \leftrightarrow R_{\neg\phi}(\bar{x}))$;

(6.25) $\forall\bar{x}(\forall y\, R_{\phi(\bar{x},y)}(\bar{x},y) \leftrightarrow R_{\forall y\phi(\bar{x},y)}(\bar{x}))$;
e igualmente para $\exists$ no lugar de $\forall$.

Após um pequeno rearranjo das sentenças (6.25), Θ' é uma teoria $\forall_2$. Demonstraremos que Θ é equivalente a Θ'. Claramente Θ implica em todas as sentenças em Θ'. Reciprocamente, suponha que Θ' se verifica. Então (6.21) segue por indução sobre a complexidade de ϕ. □

Uma teoria de primeira ordem é dita **modelo-completa** se toda imersão entre seus modelos é elementar. A atomização mostra que podemos transformar qualquer teoria de primeira ordem em uma teoria modelo-completa de uma forma inofensiva. Mas o real interesse da noção de modelo-completude está no fato de que um bom número de teorias em álgebra têm essa propriedade sem qualquer mexida prévia. Pensaremos sobre isso na seção 7.3.

Exercícios para a seção 2.6

Podemos eliminar símbolos de função em favor de símbolos de relação:
1. Seja L uma assinatura. Forme uma assinatura L^{r} a partir de L da seguinte forma: para cada inteiro positivo n e cada símbolo de função n-ária F de L, introduza um símbolo de relação $(n+1)$-ária R_F. Se A é uma L-estrutura, seja A^{r} a L^{r}-estrutura obtida a partir de A interpretando-se cada R_F como a relação $\{(\bar{a}, b) : A \models (F\bar{a} = b)\}$ (o **grafo** da função F^A). (a) Defina uma tradução $\phi \mapsto \phi^{\mathrm{r}}$ de fórmulas de L para fórmulas de L^{r}, que seja independente de A. Formule e demonstre um teorema sobre essa tradução e as estruturas A, A^{r}. (b) Extenda (a) de tal forma a traduzir toda fórmula de L para uma fórmula que não contém símbolos de função nem símbolos de constante.

Uma fórmula ϕ é dita **normal negativa** *se em ϕ o símbolo $\neg$ nunca ocorre exceto imediatamente na frente de uma fórmula atômica. (Recordemos que $\psi \to \chi$ é uma abreviação para $\neg\psi \vee \chi$.)*
2. Mostre que se L é uma linguagem de primeira ordem, então toda fórmula $\phi(\bar{x})$ de L é logicamente equivalente a uma fórmula normal negativa $\phi^*(\bar{x})$ de L. (Sua demonstração deve se adaptar facilmente para demonstrar o mesmo para $L_{\infty\omega}$ no lugar de L.) Mostre que se ϕ era desaninhada então ϕ^* pode ser escolhida de tal forma a ser também desaninhada.

3. Seja L uma linguagem de primeira ordem, R um símbolo de relação R de L e ϕ uma fórmula de L. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes. (a) R é positiva em alguma fórmula de L que é logicamente equivalente a ϕ. (b) ϕ é logicamente equivalente a uma fórmula de L em forma normal negativa na qual R nunca tem $\neg$ imediatamente antes dele.

Aqui está uma reescrita mais perversa, que depende das propriedades de uma teoria particular.
4. Seja T a teoria de ordenações lineares. Para cada inteiro positivo n, escreva uma sentença de primeira ordem que expressa (módulo T) 'Existem pelo menos n elementos', e que usa apenas duas variáveis, x e y.

5. Sejam T_0, T_1 e T_2 teorias de primeira ordem. Mostre que se T_2 é uma extensão definicional de T_1 e T_1 é uma extensão definicional de T_0, então T_2 é uma extensão definicional de T_0.

O método do exercício seguinte é conhecido como **método de Padoa**. *Não é limitado a linguagens de primeira ordem. Compare-o com o Lema 2.1.1 acima. Veja também a discussão após o Teorema 5.5.4.*
6. Sejam L e L^+ assinaturas com $L \subseteq L^+$; seja T uma teoria de assinatura L^+ e S um símbolo da assinatura L^+. Suponha que existem dois modelos A, B de T tais que $A|L = B|L$ mas $S^A \neq S^B$. Deduza que S não é explicitamente definível em T em termos de L (e por isso T não é uma extensão definicional de nenhuma teoria de assinatura L).

7. Seja L^+ a linguagem de primeira ordem da aritmética com símbolos 0, 1, $+$, $\cdot$, e seja T a teoria completa dos números naturais nessa linguagem. Seja L a linguagem L^+ com o símbolo $+$ removido. Mostre que $+$ não é explicitamente definível em T em termos de L.

Sejam L e L^+ linguagens de primeira ordem com $L \subseteq L^+$, e sejam T, T^+ teorias em L, L^+ respectivamente. Dizemos que T^+ é uma **extensão conservativa** *de T se para toda sentença ϕ de L, $T \vdash \phi \Leftrightarrow T^+ \vdash \phi$.*
8. (a) Mostre que se $T \subseteq T^+$ e toda L-estrutura que é um modelo de T pode ser expandida para formar um modelo de T^+, então T^+ é uma extensão conservativa de T. Em particular toda extensão definicional é conservativa. (b) Prove que a recíproca da afirmação (a) falha. [Seja T tal que diga que $<$ é uma ordenação linear com primeiro elemento 0, todo elemento tem um sucessor imediato e todo elemento exceto 0 tem um predecessor imediato. Seja T^+ a aritmética de Peano. Mostre que T é completa em sua linguagem, daí que T^+ é uma extensão conservativa de T. Mostre que todo modelo contável de T^+ tem tipo-ordem ω ou $\omega + (\omega^* + \omega) \cdot \eta$ onde ω^* é o reverso de ω e η é o tipo-ordem dos racionais; logo nem todo modelo contável de T se expande para um modelo de T^+.]

Mesmo a definição de adição (uma definição recursiva, não uma definição explícita) pode levar a novas conseqüências de primeira ordem.
9. Seja L a linguagem com o símbolo de constante 0 e o símbolo de função 1-ária S; seja L^+ a mesma L mais um símbolo de função 2-ária $+$. Seja T^+ a teoria $\forall x\, x + 0 = x$, $\forall xy\, x + Sy = S(x + y)$. Mostre que T^+ não é uma extensão conservativa da teoria vazia em L.

10. Mostre que a teoria de álgebras booleanas é definicionalmente equivalente à teoria de anéis comutativos com $\forall x\, x^2 = x$.

2.7 Eliminação de quantificadores

O primeiro programa sistemático para a teoria dos modelos apareceu na década após a primeira guerra mundial. Esse programa é conhecido como **eliminação de quantificadores**. Deixe-me resumí-lo.

Tome uma linguagem de primeira ordem L e uma classe $\mathbf{K}$ de L-estruturas. A classe $\mathbf{K}$ poderia ser, por exemplo, a classe de todas as ordenações lineares densas, ou poderia ser o conjunto unitário $\{\mathbb{R}\}$ onde $\mathbb{R}$ é o corpo dos números reais. Dizemos que um conjunto Φ de fórmulas de L é um **conjunto de eliminação** para $\mathbf{K}$ se

(7.1) para toda fórmula $\phi(\bar{x})$ de L existe uma fórmula $\phi^*(\bar{x})$ que é uma combinação booleana de fórmulas em Φ, e ϕ é equivalente a ϕ^* em toda estrutura em $\mathbf{K}$.

O programa pode ser enunciado brevemente: dada $\mathbf{K}$, *encontre um conjunto de eliminação para* $\mathbf{K}$. Existem programas análogos para outras linguagens, mas o caso de primeira ordem é o mais interessante.

É claro que sempre existe ao menos um conjunto de eliminação Φ para uma classe qualquer $\mathbf{K}$ de L-estruturas: tome Φ como sendo o conjunto de todas as fórmulas de L. Mas com cuidado e atenção podemos frequentemente encontrar um conjunto de eliminação muito mais revelador que esse.

Por exemplo, aqui estão dois resultados que devemos ao seminário de Varsóvia organizado por Tarski no final dos anos 20. (Uma ordenação linear é **densa** se para todos elementos $x < y$ existe z tal que $x < z < y$; cf. (2.31) e (2.32) na seção 2.2.)

Teorema 2.7.1. *Seja L a linguagem de primeira ordem cuja assinatura consiste do símbolo de relação binária $<$, e seja $\mathbf{K}$ a classe de todas as ordenações lineares densas. Suponha que Φ consiste de fórmulas de L que expressam cada um dos seguintes enunciados:*

(7.2) *Existe um primeiro elemento.*
Existe um último elemento.
x é o primeiro elemento.
x é o último elemento.
$x < y$.

Então Φ é um conjunto de eliminação para $\mathbf{K}$.

Demonstração. Exercício 1 adiante. □

Teorema 2.7.2. *Seja L a linguagem de primeira ordem de anéis, cujos símbolos são* $+$, $-$, $\cdot$, 0, 1. *Seja $\mathbf{K}$ a classe dos corpos real-fechados. Suponha que Φ consiste das fórmulas*

$$\exists y\, y^2 = t(x) \tag{7.3}$$

onde t varia sobre todos os termos de L que não contêm a variável y. Então Φ é um conjunto de eliminação para $\mathbf{K}$. (Note que (7.3) expressa que $t(x) \geqslant 0$.)

Demonstração. Veremos uma demonstração algébrica disto no Teorema 7.4.4 adiante. □

O nome 'eliminação de quantificadores' refere-se ou ao processo de se reduzir uma fórmula a uma combinação booleana de fórmulas em Φ, ou ao processo de se descobrir em primeiro lugar o conjunto apropriado Φ. Deve-se distinguir o método de eliminação de quantificadores da *propriedade de eliminação de quantificadores*, que é a propriedade que algumas teorias têm. Uma teoria T **tem eliminação de quantificadores** se o conjunto de fórmulas livres-de-quantificador forma um conjunto de eliminação para a classe de todos os modelos de T. (Cf. seção 7.4 adiante, e note que algumas das fórmulas em (7.2) e (7.3) não são livres-de-quantificador.)

O propósito da eliminação de quantificadores

Suponha que temos um conjunto de eliminação Φ para a classe $\mathbf{K}$. O que é que ele nos diz?

(a) *Classificação a menos de equivalência elementar*. Suponha que A e B são estruturas na classe $\mathbf{K}$, e A não é elementarmente equivalente a B. Então existe alguma combinação booleana de sentenças em Φ que é verdadeira em A mas falsa em B. Segue-se imediatamente que alguma sentença ϕ em Φ é verdadeira em uma das estruturas A ou B mas falsa na outra. A conclusão é que podemos classificar as estruturas em $\mathbf{K}$, a menos de equivalência elementar, procurando ver quais *sentenças* em Φ são verdadeiras nessas estruturas.

Se as sentenças em Φ expressam alguma propriedade 'algébrica' de estruturas (uma noção vaga, porém clara o suficiente para ser útil), então reduzimos a equivalência elementar em $\mathbf{K}$ a uma noção puramente 'algébrica'. Por exemplo Tarski mostrou que dois corpos algebricamente fechados são elementarmente equivalentes se e somente se eles têm a mesma característica.

(b) *Provas de completude*. Como um caso especial de (a), suponha que $\mathbf{K}$ é a classe Mod(T) de todos os modelos de uma teoria de primeira ordem T. Suponha que todas as sentenças em Φ são dedutíveis a partir de T ou inconsistentes com T. Então segue-se que todos os modelos de T são elementarmente equivalentes, logo T é uma teoria completa.

O Teorema 2.7.2 é um caso desse. As sentenças em Φ podem ser todas escritas como $s = t$ ou $s \leqslant t$ onde s, t são termos fechados de L. Mas todo corpo real-fechado tem característica 0. Em corpos de característica 0, cada termo fechado t tem um valor inteiro independente da escolha do corpo, logo podemos provar ou refutar as sentenças $s = t$, $s \leqslant t$ a partir dos axiomas de corpos real-fechados. Portanto o Teorema 2.7.2 mostra que a teoria de corpos real-fechados é completa.

(c) *Provas de decidibilidade*. Este é um caso especial de (b), por sua vez. Suponha que L é uma linguagem recursiva (veja seção 2.3 acima). A teoria T em L é decidível se e somente se existe um algoritmo para determinar se uma dada sentença de L é uma conseqüência de T. O **problema de decisão** para uma teoria T em L é o problema de se encontrar tal algoritmo (ou se demonstrar que ele não existe).

Agora suponha que $\mathbf{K}$ é Mod(T) e que a função $\phi \mapsto \phi^*$ em (7.1) é recursiva. Suponha também que temos um algoritmo que nos diz, para qualquer sentença ψ no conjunto de eliminação Φ, ou que ψ é demonstrável a partir de T ou que ela é refutável a partir de T. Então colocando-se tudo junto, derivamos um algoritmo para determinar quais sentenças são conseqüências de T; essa é uma solução positiva do problema da decisão para T. Novamente corpos real-fechados constituem um caso desse.

(d) *Descrição de relações definíveis*. Suponha que Φ é um conjunto de eliminação para $\mathbf{K}$ e A é uma estrutura em $\mathbf{K}$. Seja D o conjunto de todas as relações sobre A que têm a forma $\psi(A^n)$ para alguma fórmula $\psi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ em Φ. Então as relações $\varnothing$-definíveis sobre A são precisamente as combinações booleanas de relações em D.

(e) *Descrição de imersões elementares*. Se Φ é um conjunto de eliminação para $\mathbf{K}$, então as funções elementares entre estruturas em $\mathbf{K}$ são precisamente aqueles homomorfismos que preservam ψ e $\neg\psi$ para toda fórmula ψ em Φ. Por exemplo, pelo Teorema 2.7.1, toda imersão entre ordenações lineares densas sem extremos é elementar.

Os pontos (a), (d) e (e) foram vitais para o futuro da teoria dos modelos. O que eles disseram foi que em certas classes importantes de estruturas, as classificações modelo-teóricas naturais poderiam ser parafraseadas em noções algébricas simples. Isso permitiu que os lógicos e os algebristas conversassem uns com os outros e fundissem seus métodos.

A principal dificuldade da eliminação de quantificadores é que o método se realiza inteiramente no nível da dedutibilidade a partir de um conjunto de axiomas. Isso faz com que ele seja altamente sintático, e pode impedir que utilizemos boas informações algébricas sobre a classe $\mathbf{K}$. Em particular o método não nos permite explorar o que quer que saibamos sobre funções entre estruturas em $\mathbf{K}$. Por exemplo, para provar o seguinte resultado de Tarski pelo método da eliminação de quantificadores precisaríamos empreender um estudo razoavelmente trabalhoso de equações; porém o argumento mais estrutural do Exemplo 2 na seção 7.4 adiante torna o resultado quase uma trivialidade.

Teorema 2.7.3. *A teoria dos corpos algebricamente fechados tem eliminação de quantificadores.* □

Por essa razão o exemplo feito em detalhe adiante não é um dos bem conhecidos resultados algébricos da escola de Tarski. A maior parte daqueles resultados podem ser tratados por métodos mais refinados hoje em dia. Ao invés de escolher um deles escolho um exemplo em que as estruturas são elas próprias objetos sintáticos, portanto o método engrena bem com o problema.

Mas primeiramente uma rápida palavra sobre estratégia. Temos uma linguagem de primeira ordem L e uma classe $\mathbf{K}$ de L-estruturas. Temos também uma teoria T que é uma candidata à axiomatização de $\mathbf{K}$, e um conjunto de fórmulas Φ que é um candidato a conjunto de eliminação. Se $\mathbf{K}$ for definida como $\mathrm{Mod}(T)$, então obviamente T de fato axiomatiza $\mathbf{K}$. Mas se $\mathbf{K}$ foi dada e T é uma suposta axiomatização, podemos chegar à conclusão durante o processo de eliminação de quantificadores que temos que ajustar T.

O seguinte lema simples facilita bastante o fardo de mostrar que Φ é um conjunto de eliminação. Escrevemos Φ^- para designar o conjunto $\{\neg\phi : \phi \in \Phi\}$.

Lema 2.7.4. *Suponha que*

(7.4) *toda fórmula atômica de L pertence a Φ, e*

(7.5) *para toda fórmula $\theta(\bar{x})$ de L que é da forma $\exists y \bigwedge_{i<n} \psi_i(\bar{x}, y)$*
com cada ψ_i em $\Phi \cup \Phi^-$, existe uma fórmula $\theta^*(\bar{x})$ de L que
(i) *é uma combinação booleana de fórmulas em Φ, e*
(ii) *é equivalente a θ em toda estrutura em $\mathbf{K}$.*

Então Φ é um conjunto de eliminação para $\mathbf{K}$.

Demonstração. Veja Lema 2.3.1. □

Portanto para achar um conjunto de eliminação, devemos encontrar uma maneira de nos livrar do quantificador $\exists y$ em (7.5). Daí o nome 'eliminação de quantificadores'. Como o Lema 2.7.4 sugere, começamos com um subconjunto finito arbitrário $\Theta(y, \bar{x})$ de $\Phi \cup \Phi^-$, e objetivamos encontrar uma combinação booleana $\psi(\bar{x})$ de fórmulas em Φ tal que $\exists y \bigwedge \Theta$ seja equivalente a ψ módulo T. Tipicamente a passagem de Θ para ψ se realiza em várias etapas, dependendo de que tipos de fórmulas aparecem em Θ.

Se esbarramos num beco-sem-saída, podemos adicionar sentenças a T e fórmulas a Θ até que o processo volte a se mover novamente.

Exemplo: álgebras de termos

Consideramos a classe $\mathbf{K}$ de álgebras de termos de uma assinatura algébrica L_1: veja o Exemplo 1 na seção 2.2 e o Exemplo 1 na seção 2.6. A teoria T_1, que consiste das sentenças (2.3)–(2.7) da seção 2.2, é verdadeira em toda álgebra em $\mathbf{K}$. Nossa eliminação será mais fácil de realizar se passamos para a linguagem L_2 e para a teoria T_2 da seção 2.6. Como T_2 é definicionalmente equivalente a T_1, tudo pode ser traduzido de volta à linguagem de T_1 se necessário.

Se L_1 (e portanto L_2) tem assinatura finita, podemos escrever para cada inteiro positivo k uma sentença α_k de L_2 que diz 'Existem pelo menos k elementos satisfazendo todas as $\neg$É$_c$ e $\neg$É$_F$'. Seja β a sentença $\exists x\, x = x$.

Teorema 2.7.5. *Seja $\boldsymbol{K}$ a classe de álgebras de termos na assinatura L_2 descrita acima. Seja Φ o conjunto de fórmulas atômicas de L_2, juntamente com as sentenças α_k se L_1 tem assinatura finita, e a sentença β se L_1 não tem símbolos de constante. Então Θ é um conjunto de eliminação para a classe de todos os modelos de T_2, e portanto para $\boldsymbol{K}$.*

Demonstração. Nossa tarefa é a seguinte. Temos um conjunto finito $\Theta_0(\bar{x}, y)$ que consiste de literais de L_2 (e possivelmente algumas sentenças β, α_k ou suas negações), e devemos eliminar o quantificador $\exists y$ da fórmula $\exists y \bigwedge \Theta_0$. Podemos supor sem perda de generalidade que

(7.6) Nenhuma sentença α_k ou β ou sua negação pertence a Θ_0.

Razão: A variável y não está livre em α_k, logo $\exists y(\alpha_k \wedge \psi)$ é logicamente equivalente a $\alpha_k \wedge \exists y\, \psi$. Igualmente com β.

Também podemos supor sem perda o seguinte:

(7.7) não existe fórmula ψ tal que ambas ψ e $\neg\psi$ pertençam a Θ_0;
além disso $y \neq y$ não pertence a Θ_0.

Razão: Do contrário $\exists y \bigwedge \Theta_0$ reduz-se imediatamente a $\perp$.

Podemos substituir Θ_0 por um conjunto Θ_1 que satisfaz (7.6), (7.7) e

(7.8) se t é um termo de L_2 no qual y não ocorre, então as fórmulas
$y = t$ e $t = y$ não estão em Θ_1.

Razão: $\exists y(y = t \wedge \psi(y, \bar{x}))$ é logicamente equivalente a $\exists y(y = t \wedge \psi(t, \bar{x}))$, portanto equivalente também a $\psi(t, \bar{x}) \wedge \exists y\, y = t$, ou equivalentemente $\psi(t, \bar{x})$. A fórmula $\exists y\, y = t$ é equivalente a $t = t$.

Podemos substituir Θ_1 por um ou mais conjuntos Θ_2 que satisfazem (7.6)–(7.8) e

(7.9) a variável y nunca ocorre dentro de um outro termo.

Razão: Suponha que um termo $s(F_i(y))$ aparece em algum lugar em Θ_1. Agora $\exists y\, \psi$ é equivalente a $\exists y(\text{É}_F(y) \wedge \psi) \vee \exists y(\neg\text{É}_F(y) \wedge \psi)$, portanto podemos supor que exatamente uma das duas $\text{É}_F(y)$ ou $\neg\text{É}_F(y)$ aparece em Θ_1. Se $\neg\text{É}_F(y)$ aparece, podemos substituir $F_i(y)$ por y de acordo com o axioma (6.17). Se $\text{É}_F(y)$ aparece e F é n-ário, podemos fazer as seguintes modificações. Primeiro se G é um símbolo de função qualquer de L_1 distinto de F, substituimos qualquer expressão $G_j(y)$ em Θ_1 por y (novamente devido a (6.17)). Introduzimos n novas variáveis $y_0, \ldots, y_{n-1}$, substituimos cada $F_j(y)$ por y_j e adicionamos as fórmulas $F_j(y) = y_j$. Então $\exists y \bigwedge \Theta_1$ fica equivalente a uma expressão $\exists y_0 \ldots y_{n-1} \exists y(\text{É}_F(y) \wedge \bigwedge_{j<n} F_j(y) = y_j \wedge \bigwedge \Theta_2)$ onde Θ_2 satisfaz (7.9). Por (6.15) isso se reduz a $\exists y_0 \ldots y_{n-1} \bigwedge \Theta_2$. Aqui Θ_2 tem mais variáveis y_j para serem descartadas, mas todas essas ocorrem em termos menores que aqueles envolvendo y em Θ_1. Logo podemos lidar com as variáveis $y_{n-1}, \ldots, y_0$ por sua vez, usando uma indução sobre o comprimento dos termos.

Nesse ponto Θ_2 consiste de fórmulas da forma $y \neq t$ ou $t \neq y$ (onde y não ocorre em t), $y = y$, $\text{É}_c(y)$, $\neg\text{É}_c(y)$, $\text{É}_F(y)$ ou $\neg\text{É}_F(y)$; como em (7.6), podemos eliminar quaisquer literais nos quais y não aparece. Podemos substituir Θ_2 por um conjunto Θ_3 satisfazendo (7.6)–(7.9) e

(7.10) não existe constante c tal que $\text{É}_c(y)$ pertença a Θ_3, e
não existe símbolo de função F tal que $\text{É}_F(y)$ pertença a Θ_3.

Razão: $\exists y(\text{É}_c(y) \wedge y \neq t \wedge \neg\text{É}_F(y))$, digamos, é equivalente a $\neg\text{É}_c(t)$ por (6.14) e (6.16); $\exists y \text{É}_c(y)$ é equivalente a $\neg\bot$ por (6.14). Símbolos de função requerem um argumento mais complicado. Seja F um símbolo de função n-ária.

Afirmamos que T_2 implica que para quaisquer k elementos ($k > 0$) existe um elemento distinto de todos os outros que satisfaz $\text{É}_F(y)$. Por (6.15), T_2 implica que se $\text{É}_F(x_0)$ então existe um único x_1 tal que $\text{É}_F(x_1)$ e $F_i(x_1) = x_0$ para todo $i < n$; por (6.18), $x_0 \neq x_1$. Igualmente por (6.15) existe x_2 tal que $\text{É}_F(x_2)$ e $F_i(x_2) = x_1$ para todo $i < n$, e então por (6.18) novamente, $x_2 \neq x_1$ e $x_2 \neq x_0$. Etc., etc.; isso prova a afirmação. Com (6.16), a afirmação permite a redução para (7.10), a menos que o problema seja eliminar o quantificador da fórmula $\exists y\ \text{É}_F(y)$. Quando L_1 tem ao menos uma constante c, a fórmula $\exists y\ \text{É}_F(y)$ reduz-se a $\neg\bot$ por (6.15); mas em geral ela é equivalente a β.

Estamos quase chegando lá. Quando L_1 tem assinatura infinita, $\exists y \bigwedge \Theta_3$ reduz-se a β por (6.16). Resta apenas o caso em que L_1 tem um número finito de símbolos. Como no início da razão para (7.9), podemos supor que para cada símbolo S de L_1, Θ_3 contém uma das duas $\text{É}_S(y)$ ou $\neg\text{É}_S(y)$, e já vimos como lidar com a primeira delas. Portanto suponha daqui por diante que Θ_3 contém $\neg\text{É}_S(y)$ para cada símbolo S de L_1. Pelo mesmo raciocínio podemos supor que para cada termo t aparecendo em Θ_3 (mesmo que dentro de outros termos), uma das duas fórmulas $\text{É}_S(t)$ ou $\neg\text{É}_S(t)$ pertence a Θ_3. Podemos também supor que para cada par de termos s, t aparecendo em Θ_3, $s = t$ ou $s \neq t$ também aparece em Θ_3. Agora $\bigwedge \Theta_3$ afirma (entre outras coisas) que existem pelo menos k itens distintos, incluindo y, que satisfazem $\neg\text{É}_S(x)$ para todo S. Tal elemento y pode ser encontrado se e somente se α_k se verifica; logo $\exists y \bigwedge \Theta_3$ se reduz a uma conjunção de α_k e das fórmulas em Θ_3 que não mencionam y. $\square$

Note que se tivéssemos esquecido as fórmulas α_k ou β, ou um dos axiomas que deveriam estar em T_2, então esse procedimento nos teria mostrado nosso erro e sugerido como corrigí-lo.

Corolário 2.7.6. *Seja* $\mathbf{K}$ *(como acima) a classe de todas as álgebras de termos de* L_1*, consideradas como* L_2*-estruturas. Se* L_1 *é infinita, ou tem pelo menos um símbolo* *de constante, ou absolutamente nenhum símbolo, então* Th$(\mathbf{K})$ *é equivalente a* T_2. *Se* L_1 *é finita e tem símbolos de função mas nenhum símbolo de constante então* Th$(\mathbf{K})$ *é equivalente a* $T_2 \cup \{\beta \to \alpha_1\}$.

Demonstração. Certamente toda sentença de T_2 pertence a Th$(\mathbf{K})$. Na outra direção, o caso mais difícil é quando L_1 é finita. Seja ϕ uma sentença qualquer em Th$(\mathbf{K})$. Pelo teorema, ϕ é equivalente módulo T_2 a uma combinação booleana de sentenças β, α_k. (A assinatura L_2 não tem termo fechado.) Da noção de conseqüência lógica, cada α_{k+1} acarreta em α_k e α_1 acarreta em β. Se L_1 tem pelo menos um símbolo de constante então β é demonstrável a partir de T_2 mas não existem quaisquer outras implicações entre β e os α_k; logo nesse caso ϕ deve ser demonstrável a partir de T_2.

Se L_1 tem símbolos de função mas nenhum símbolo de constante então a álgebra de termos é vazia a menos que α_1 se verifique; logo $\beta \to \alpha_1$ pertence a Th$(\mathbf{K})$. Essa fórmula não é uma conseqüência de T_2, pois podemos construir um modelo de T_2 no qual α_1 falha, tomando um 'termo' infinitamente decomponível como em (2.10) da seção 2.2. Exemplos mostram que nenhuma outra implicação se verifica entre β e os α_k. Deixo ao leitor o caso em que L_1 é vazia. □

Corolário 2.7.7. *A teoria das álgebras de termos de uma dada assinatura algébrica finita, seja na linguagem* L_1 *ou na linguagem* L_2 *acima, é decidível.*

Demonstração. Qualquer sentença de L_1 pode ser traduzida efetivamente em uma sentença ϕ de L_2 pelas definições explícitas (6.20) da seção 2.6. Então podemos computar uma sentença ϕ^* de L_2 que é equivalente a ϕ módulo T_2 e é uma combinação booleana de sentenças em Φ, onde Φ é como no Teorema 2.7.5. O argumento para o corolário anterior mostra que podemos verificar efetivamente se ϕ^* é uma conseqüência de T_2 ou de $T_2 \cup \{\beta \to \alpha_1\}$ qualquer que seja o caso. □

Exercícios para a seção 2.7

Para estes exercícios, fique advertido de que o método da eliminação de quantificadores não é intrinsecamente difícil, mas requer horas e muito papel.

1. Demonstre o Teorema 2.7.1.

2. Suponha que a assinatura L consiste de um número finito de símbolos de relação 1-ária $R_0, \ldots, R_{n-1}$. Para cada função $s : n \to 2$ seja $\phi^s(x)$ a conjunção $R_0^{s(0)}(x) \wedge \ldots \wedge R_{n-1}^{s(n-1)}(x)$, onde R_i^j é R_i se $j = 1$ e $\neg R_i$ se $j = 0$. Se $\mathbf{K}$ é a classe de todas as L-estruturas, demonstre que um conjunto de eliminação para $\mathbf{K}$ é dado pelas fórmulas $\phi^s(x)$ e as sentenças $\exists_{=k} x \phi^s(x)$ onde $s : n \to 2$ e $k < \omega$.

3. Seja L a linguagem de primeira ordem para álgebras booleanas (veja (2.29) na seção 2.2). Seja Ω um conjunto e A a álgebra dos conjuntos das partes de Ω, considerada como uma L-estrutura com $\wedge$ para $\cap$, $\vee$ para $\cup$, * para complemento em Ω, 0 para $\varnothing$ e 1 para Ω. Seja $\mathbf{K}$ a classe $\{A\}$. Para cada inteiro positivo k, escreva $\alpha_k(y)$ para designar a fórmula 'y tem pelo menos k elementos'. (Isso pode ser escrito como 'Existem pelo menos k átomos $\leqslant y$', onde um **átomo** de uma álgebra booleana é um elemento $b > 0$ tal que não existe elemento c com $b > c > 0$.) Seja Φ o conjunto de todas as fórmulas atômicas de L e todas as fórmulas da forma $\alpha_k(t)$ onde t é um termo de L. Mostre que Φ é um conjunto de eliminação para $\mathbf{K}$.

4. Uma álgebra booleana B é dita **atômica** se o supremo do conjunto de átomos em B é o

elemento topo de B. Seja T a teoria das classes de álgebras booleanas atômicas. Mostre que (a) uma álgebra booleana B é atômica se e somente se para todo elemento $b > 0$ existe um átomo $a \leqslant b$, (b) se B é uma álgebra booleana atômica então toda fórmula $\phi(\bar{x})$ da linguagem de primeira ordem para álgebras booleanas é equivalente em B a uma combinação booleana de fórmulas que dizem exatamente quantos átomos estão abaixo dos elementos $y_0 \wedge \ldots \wedge y_{n-1}$, onde cada y_i é x_i ou x_i^* (complemento), (c) T é a teoria da classe de álgebras booleanas finitas, (d) T é decidível.

5. Seja $\mathbf{K}$ a classe de álgebras booleanas B tais que o conjunto de átomos de B tem um supremo em B. (a) Mostre que $\mathbf{K}$ é uma classe axiomatizável de primeira ordem. (b) Use o método de eliminação de quantificadores para mostrar que a menos de equivalência elementar existem exatamente ω álgebras booleanas em $\mathbf{K}$; descreva essas álgebras.

6. Seja L a assinatura consistindo de um símbolo de relação 2-ária $<$. Seja $\mathbf{K}$ a classe de L-estruturas $(X, <')$ onde X é um conjunto não-vazio e $<'$ é uma ordenação linear de X na qual todo elemento tem um predecessor imediato e um sucessor imediato. (a) Use o método de eliminação de quantificadores para mostrar que quaisquer duas estruturas em $\mathbf{K}$ são elementarmente equivalentes. (b) Dê condições necessárias e suficientes para que uma função de A para B seja uma imersão elementar, onde A e B estão em $\mathbf{K}$. (c) Mostre que para todo cardinal infinito λ existem 2^λ estruturas não-isomorfas em $\mathbf{K}$ com cardinalidade λ. [Construa modelos $\Sigma_{i<\lambda}((\omega^* + \omega) \cdot \rho_i)$, onde cada ρ_i é ω ou $(\omega^* + \omega)$; demonstre que cada ρ_i é recuperável a partir do modelo.]

Lidaremos com o próximo resultado de maneira diferente na seção 3.3.
7. Suponha que a assinatura L consiste de constantes 0, 1 e um símbolo de função 2-ária $+$. Suponha que $\mathbf{K}$ consiste de uma estrutura, a saber o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ considerado como uma L-estrutura da maneira óbvia. Usando o método de eliminação de quantificadores, encontre um conjunto de axiomas para Th($\mathbb{N}$) e mostre que Th($\mathbb{N}$) é uma teoria decidível. [Um conjunto de eliminação consiste de equações e fórmulas que expressam '$t(\bar{x})$ é divisível por n' onde n é um inteiro positivo.]

8. Suponha que a assinatura L consiste de um símbolo de função 1-ária F e um símbolo de constante 0. Seja $\mathbf{K}$ a classe de L-estruturas que obedecem ao axioma da indução de segunda ordem, a saber, para todo conjunto X de elementos, $((0 \in X \wedge \forall y(y \in X \to F(y) \in X)) \to \exists y(y \in X))$. Use o método de eliminação de quantificadores para encontrar (a) um conjunto de axiomas para a teoria de primeira ordem $\mathrm{Th}(\mathbf{K})$ de $\mathbf{K}$, e (b) uma classificação dos modelos de $\mathbf{K}$, a menos de equivalência elementar.

9. Seja K um corpo; seja $\mathbf{J}$ a classe de espaços vetoriais (à esquerda) sobre K, na linguagem de K-módulos à esquerda (i.e. com símbolos $+$, $-$, 0 e para cada escalar r um símbolo de função 1-ária $r(x)$ para representar multiplicação de um vetor por r; veja Exemplo 4 na seção 1.1 acima). (a) Mostre que o conjunto de equações lineares $r_0(x_0) + \ldots + r_{n-1}(x_{n-1}) = 0$, com $n < \omega$ e $r_0, \ldots, r_{n-1}$ escalares, juntamente com o conjunto de sentenças $\exists_{=k} x\, x = x$ $(k < \omega)$, é um conjunto de eliminação para $\mathbf{J}$. (b) Deduza que todo espaço vetorial infinito em $\mathbf{J}$ é uma estrutura minimal (no sentido da seção 2.1).

Um grupo abeliano é **divisível** *se para todo elemento não-zero b e todo inteiro positivo n existe um elemento c tal que $nc = b$. Ele é* **ordenado** *se ele dispõe de uma relação de ordenação linear $<$ tal que $a < b$ implica que $a + c < b + c$ para todo a, b, c.*
10. Use o método de eliminação de quantificadores para axiomatizar a classe de grupos abelianos divisíveis ordenados não-triviais. Mostre que (a) todo os grupos nessa classe são elementarmente equivalentes, (b) se A e B são grupos abelianos divisíveis ordenados não-triviais e A é um subgrupo de B então A é uma subestrutura elementar de B.

11. Seja T_1 a teoria das álgebras de termos de uma dada assinatura algébrica L. (a) Mostre que se A é um modelo finitamente gerado qualquer de T_1, então A é isomorfa a uma álgebra de termos de L. (b) Mostre que se B é uma L-estrutura então B é um modelo de T_1 se e somente se toda subestrutura finitamente gerada de B é isomorfa a uma álgebra de termo de L. *(Daí T_1 ser conhecida como a* **teoria de L-estruturas localmente livres***.)*

12. Seja R um anel e T a teoria de R-módulos à esquerda como em (2.21); seja L a linguagem de T e M um R-módulo à esquerda. Usamos a notação da seção 2.5 e Exercício 2.5.9. O exercício esboça a prova de Monk do **teorema de Baur–Monk**, que fórmulas p.p. juntamente com as sentenças invariantes (definidas adiante) formam um conjunto de eliminação para T. (a) Mostre que para toda fórmula p.p. $\phi(x)$ e $\psi(x)$ de L e todo inteiro positivo n existe uma sentença $Inv(\phi, \psi, n)$ que expressa em M: o grupo $\phi(M)/(\phi(M) \cap \psi(M))$ tem cardinalidade $\leqslant n$. *Essas sentenças são chamadas de* **sentenças invariantes**. (b) Suponha que $\phi(x_0, \ldots, x_n)$ é uma conjunção de fórmulas p.p. de L e negações de tais fórmulas, e $\bar{d}$ é uma n-upla em M. Mostre que a afirmação $M \vDash \neg\exists x_n \phi(\bar{d})$ pode parafraseada como (*): $G \subseteq \bigcup_{i<k}(H_i + \bar{b}_i)$, onde G, $H_0, \ldots, H_{k-1}$, são certos subgrupos p.p. de M^n, $\bar{b}_0, \ldots, \bar{b}_{n-1}$ são certas uplas de M, cada H_i é um subgrupo de G e k depende apenas de ϕ. (c) Usando o Corolário 5.6.4, mostre que podemos por um limite finito (dependendo apenas de ϕ) nos índices dos subgrupos H_i em G. (d) Colocamos $H = \bigcap_{i<k} H_i$, e para toda união X de co-conjuntos de H escrevemos $N(X)$ para designar o número de co-conjuntos de H em X. (Pelo item (c) esse número é finito.) Mostre que (*) pode ser parafraseada como (**): $N(G) \leqslant \Sigma_{1 \leqslant j \leqslant k}(-1)^{j-1}\{\Sigma_{J \subseteq k, |J|=j} N(\bigcap_{i \in J}(H_i + \bar{b}_i))\}$. (e) Exprima (**) através de uma combinação booleana $\chi(\bar{d})$ de sentenças invariantes e fórmulas $\phi(\bar{d})$ onde $\phi(\bar{x})$ são fórmulas p.p. de L. Comprove que em qualquer modelo M de T, $\chi(\bar{x})$ depende apenas de ϕ e não de M ou $\bar{d}$.

Leitura adicional

Os artigos originais de Tarski, em alguns casos escritos com seus estudantes, são excepcionais pela sua clareza. Dois exemplos relevantes para este capítulo são:

Tarski, A. & Vaught, R. L. Arithmetical extensions of relational systems. *Compositio Mathematica*, **13** (1957), 81–102.

Tarski, A. *A decision method for elementary algebra and geometry*. Berkeley: University of California Press, 1951.

Teorias O-minimais (Exercício 2.1.4) têm um lugar central no trabalho recente sobre teoria dos modelos de corpos. Para um apanhado (em um nível mais avançado que esse livro), veja

van den Dries, L. O-minimal structures. In *Logic: from foundations to applications*, ed. Hodges, W. *et al.* pp. 143–85. Oxford: Oxford University Press, 1996.

Modelos não-padrão (veja seção 2.2) são a base da *análise não-padrão*; trata-se de uma maneira de se fazer análise, citando teoremas da teoria dos modelos para justificar o uso de infinitesimais. O livro de Keisler abaixo é um texto para a graduação usando análise não-padrão, enquanto que a coleção de Cutland faz um apanhado sobre pesquisa na área.

Keisler, H. J. *Foundations of infinitesimal analysis*. Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1976.

Cutland, N. J. *Nonstandard analysis and its applications*. Cambridge University Press, 1988.