Lógica e Estrutura

(Versão Parcial: 25 de abril de 2007)

$\boxed{\text{Favor não distribuir}}$

Dirk van Dalen

Traduzido do original em inglês
Logic and Structure, Springer, ©1980, 1983, 1994, 2004
(Quarta Edição 2004)
por Ruy J. Guerra B. de Queiroz

Prefácio

Lógica aparece sob forma 'sagrada' e sob forma 'profana'; a forma sagrada é predominante em teoria da prova, a forma profana em teoria dos modelos. O fenômeno não é incomum, observa-se essa dicotomia também em outras áreas, e.g. teoria dos conjuntos e teoria da recursão. Algumas catástrofes antigas, tais como a descoberta dos paradoxos da teoria dos conjuntos (Cantor, Russell), ou os paradoxos da definibilidade (Richard, Berry), nos fazem tratar um assunto por algum tempo com espanto e timidez. Mais cedo ou mais tarde, entretanto, as pessoas começam a tratar o assunto de uma maneira mais livre e mais fácil. Tendo sido educado na tradição 'sagrada', meu primeiro contato com a tradição profana foi algo como um choque cultural. Hartley Rogers me introduziu a um mundo mais descontraído da lógica através de seu exemplo de ensinar teoria da recursão a matemáticos como se fosse apenas um curso comum em, digamos, álgebra linear ou topologia algébrica. No decorrer do tempo acabei aceitando esse ponto de vista como o didaticamente seguro: antes de entrar para as belezas esotéricas seria preciso desenvolver um certo sentimento pelo assunto e obter uma quantidade razoável de conhecimento pleno de trabalho. Por essa razão este texto introdutório inicia-se na vertente profana e tende à sagrada apenas no final.

O presente livro foi desenvolvido a partir de cursos dados nos departamentos de matemática da Universidade de Utrecht. A experiência adquirida nesses cursos e a reação dos participantes sugeriram fortemente que não se deveria praticar e ensinar lógica em isolamento. Assim que possível exemplos cotidianos de matemática deveriam ser introduzidos; de fato, lógica de primeira ordem encontra um campo cheio de aplicações no estudo dos grupos, anéis, conjuntos parcialmente ordenados, etc.

O papel da lógica em matemática e ciência da computação tem dois aspectos — uma ferramenta para aplicações em ambas as áreas, e uma técnica para assentar os fundamentos. Esse último papel será neglicenciado aqui, e nos concentraremos nos problemas cotidianos da ciência formalizada (ou formalizável). De fato, optei por uma abordagem prática, — cobrirei o básico de técnicas de prova e de semântica, e passarei então para os tópicos que são menos abstratos. A experiência tem nos ensinado que a técnica de dedução natural de Gentzen se presta melhor para uma introdução, é próxima o suficiente do verdadeiro raciocínio informal para permitir que os estudantes construam as provas por si próprios. Praticamente nenhum truque artificial está envolvido e no final existe a agradável descoberta de que o sistema tem propriedades impressionantes, em particular ele se adequa perfeitamente à interpretação construtiva da lógica e permite formas normais. Esse último tópico foi adicionado a esta edição em vista de sua importância em teoria da computação. No capítulo 3 já temos poder técnico suficiente para obter alguns dos tradicionais e (mesmo hoje) surpreendentes resultados da teoria dos modelos.

O livro está escrito para principiantes sem conhecimento de tópicos mais avançados, nada de teoria esotérica dos conjuntos ou teoria da recursão. Os ingredientes básicos são dedução natural e semântica, esse último sendo apresentado tanto na forma construtiva quanto na forma clássica.

No capítulo 5 a lógica intuicionística é tratada com base na dedução natural sem a regra de Reductio ad absurdum, e da semântica de Kripke. A lógica intuicionística tem se livrado gradualmente da imagem de excentricidade e hoje é reconhecida por sua utilidade em e.g., teoria de topos e teoria de tipos, por isso sua inclusão em um texto introdutório é plenamente justificado. O capítulo final, sobre normalização, foi adicionado pelas mesmas razões; normalização tem um papel importante em certas partes da ciência da computação; tradicionalmente normalização (e eliminação do corte) pertence à teoria da prova, mas gradualmente aplicações em outras áreas têm sido introduzidas. No capítulo 6 consideramos apenas normalização fraca, e um número de aplicações simples é fornecido.

Várias pessoas têm contribuído para a formatação do texto em uma ocasião ou outra; Dana Scott, Jane Bridge, Henk Barendregt e Jeff Zucker foram muito importantes na preparação da primeira edição. Desde então muitos colegas e estudantes têm localizado erros e sugerido melhoramentos; esta edição teve o benefício de contar com as observações de Eleanor McDonnell, A. Scedrov e Karst Koymans. A todos esses críticos e consultores sou grato.

O progresso impôs que a máquina de datilografar tradicional deveria ser substituída por dispositivos mais modernos; este livro foi refeito em LaTeX por Addie Dekker e minha mulher Doke. Addie abriu caminho com as primeiras três seções do capítulo um e Doke concluiu o restante do manuscrito; devo a ambas, especialmente a Doke que encontrou tempo e coragem para dominar os secredos do LaTeX. Agradecimentos também a Leen Kievit por ter confeccionado as derivações e por ter adicionado o toque final necessário a um manuscrito LaTeX. A macro de Paul Taylor para árvores de prova foi usada para as derivações em dedução natural.

Junho 1994 Dirk van Dalen

A conversão para TeX introduziu um punhado de erros de tipográficos que estão corrigidos nesta nova tiragem. Muitos leitores têm sido bondosos me enviando sua coleção de erros de impressão, sou-lhes grato por sua ajuda. Em particular quero agradecer a Jan Smith, Vincenzo Scianna, A. Ursini, Mohammad Ardeshir e Norihiro Kamide. Aqui em Utrecht minhas turmas de lógica têm sido de grande ajuda, e em particular Marko Hollenberg, que ensinou parte de um curso, me passou comentários úteis. Gostaria de agradecê-los também.
Usei a ocasião para incorporar uns poucos melhoramentos. A definição de ‘subfórmula’ foi padronizada – juntamente com a noção de ocorrência positiva e negativa. Existe também um pequeno adendo sobre ‘indução sobre a complexidade de uma fórmula’.

Janeiro 1997 Dirk van Dalen

A pedido de usuários adicionei um capítulo sobre a incompletude da aritmética.

Isso torna o livro mais auto-contido, e adiciona informação útil sobre teoria básica da recursão e aritmética. A codificação da aritmética formal faz uso da exponencial; essa não é a codificação mais eficiente, mas para o coração do argumento isso não é de importância radical. De modo a evitar trabalho extra o sistema formal da aritmética contém a exponencial. Como a técnica de prova do livro é a da dedução natural, a codificação da noção de derivabilidade também é baseada nela. Existem, é claro, muitas outras abordagens. O leitor é encorajado a consultar a literatura.

O material desse capítulo é em grande medida aquele de um curso dado em Utrecht em 1993. Os alunos têm sido da maior ajuda ao comentar a apresentação, e ao preparar versões em TEX. W. Dean generosamente apontou algumas correções a mais no texto antigo.

O texto final foi beneficiado pelos comentários e as críticas de um número de colegas e alunos. Sou agradecido aos conselhos de Lev Beklemishev, John Kuiper, Craig Smoryński, e Albert Visser. Agradecimentos também são devidos a Xander Schrijen, cuja inestimável assistência ajudou a superar os TEX-problemas.

Maio 2003 Dirk van Dalen

Índice

Capítulo 0

Introdução

Sem adotar uma das várias visões defendidas nos fundamentos da matemática, podemos concordar que matemáticos precisam e fazem uso de uma linguagem, mesmo se apenas para a comunicação de seus resultados e seus problemas. Enquanto matemáticos têm afirmado pela máxima possível exatidão para seus métodos, eles têm sido menos sensíveis com respeito a seu meio de comunicação. É bem conhecido que Leibniz propôs colocar a prática da comunicação matemática e do raciocínio matemático sobre uma base firme; entretanto, não foi antes do século dezenove que tais empreitadas foram levadas a cabo com mais sucesso por G. Frege e G. Peano. Independentemente do quão engenhosa e rigorosamente Frege, Russell, Hilbert, Bernays e outros desenvolveram a lógica matemática, foi apenas na segunda metade desse século que lógica e sua linguagem mostraram algumas características de interesse para o matemático em geral. Os resultados sofisticados de Gödel obviamente foram logo apreciados, mas eles permaneceram por um longo tempo como destaques técnicos mas sem uso prático. Até mesmo o resultado de Tarski sobr a decidibilidade da álgebra elementar e geometria tiveram que esperar seu momento adequado até que algumas aplicações aparecessem.

Hoje em dia as aplicações de lógica a álgebra, análise, topologia, etc. são em grande número e bem reconhecidas. Parece estranho que um bom número de fatos simples, dentro da capacidade de percepção de qualquer estudante, passassem despercebidos por tanto tempo. Não é possível dar o crédito apropriado a todos aqueles que abriram esse novo território, qualquer lista demonstraria inevitavelmente as preferências do autor, e omitiria algumas áreas e pessoas.

Vamos observar que matemática tem uma maneira bem regular, canônica de formular seu material, em parte por sua natureza sob a influência de fortes escolas, como a de Bourbaki. Além do mais, a crise no início do século forçou os matemáticos a prestar mais atenção aos detalhes mais finos de sua linguagem e às suas pressuposições concernentes à natureza e o alcance do universo matemático. Essa atenção começou a dar frutos quando se descobriu que havia em certos casos uma estreita ligação entre classes de estruturas matemáticas e suas descrições sintáticas. Aqui vai um exemplo:

Sabe-se bem que um subconjunto de um grupo G que é fechado sob multiplicação e inverso, é um grupo; entretanto, um subconjunto de um corpo algebricamente fechado F que é fechado sob soma, produto, menos e inverso, é em geral um corpo que não é algebricamente fechado. Esse fenômeno é uma instância de algo bem geral: uma classe axiomatizável de estruturas é axiomatizada por um conjunto de sentenças universais (da forma $\forall x_1, \ldots, x_n \varphi$, com φ sem-quantificadores) sse ela é fechada sob subestruturas. Se verificarmos os axiomas da teoria dos grupos veremos que de fato todos os axiomas são universais, enquanto que nem todos os axiomas da teoria dos corpos algebricamente fechados são universais. Esse último fato poderia obviamente ser acidental, poderia ser o caso que não fôssemos espertos o suficiente para descobrir uma axiomatização universal da classe de corpos algebricamente fechados. O teorema acima de Tarski e Los nos diz, entretanto, que é impossível encontrar tal axiomatização!

O ponto de interesse é que para algumas propriedades de uma classe de estruturas temos critérios sintáticos simples. Podemos, por assim dizer, ler o comportamento do mundo matemático real (em alguns casos simples) a partir de sua descrição sintática.

Existem numerosos exemplos do mesmo tipo, e.g. o *Teorema de Lyndon*: uma classe axiomatizável de estruturas é fechada sob homomorfismos sse ela pode ser axiomatizada por um conjunto de sentenças positivas (i.e. sentenças que, em forma normal prenex com a parte aberta em forma normal disjuntiva, não contêm negação).

O exemplo mais básico e ao mesmo tempo monumental de tal ligação entre noções sintáticas e o universo matemático é obviamente o *teorema da completude de Gödel*, que nos diz que demonstrabilidade nos sistemas formais usuais é extensionalmente idêntica à noção de *verdade* em todas as estruturas. Isto é o mesmo que dizer, embora demonstrabilidade e verdade sejam noções totalmente diferentes (a primeira é combinatorial por natureza, e a outra é conjuntista), elas determinam a mesma classe de sentenças: φ é demonstrável sse φ é verdadeira em todas as estruturas.

Dado que o estudo de lógica envolve uma boa dose de trabalho sintático, iniciaremos apresentando uma maquinaria eficiente para lidar com sintaxe. Usamos a técnica de *definições indutivas* e como uma conseqüência ficamos bem inclinados a ver árvores onde for possível, em particular preferimos dedução natural na forma de árvores às versões lineares que aparecem aqui e ali em uso na literatura.

Um dos fenômenos impressionantes no desenvolvimento dos fundamentos da matemática é a descoberta de que a própria linguagem da matemática pode ser estudada por meios matemáticos. Isso está longe de ser um jogo fútil: os teoremas da incompletude de Gödel, por exemplo, e o trabalho de Gödel e Cohen no campo das provas de independência em teoria dos conjuntos requerem um minucioso conhecimento da matemática e da linguagem matemática. Esses tópicos não fazem parte do escopo do presente livro, portanto podemos nos concentrar nas partes mais simples da sintaxe. Entretanto objetivaremos fazer um tratamento minucioso, na esperança de que o leitor perceberá que todas essas coisas que ele suspeita ser trivial, mas não consegue ver por que, são perfeitamente acessíveis a demonstrações. Ao leitor pode ser uma ajuda pensar de si próprio como um computador com enormes capacidades mecânicas, mas sem qualquer estalo criativo, naqueles casos em que fica intrigado devido a questões do tipo 'por que devemos provar algo tão completamente evidente'!

Por outro lado o leitor deve sempre se lembrar que ele não é um computador e que, certamente quando ele chegar ao capítulo 3, alguns detalhes devem ser reconhecidos como triviais.

Para a prática propriamente dita da matemática a lógica de predicados é sem dúvida a ferramenta perfeita, pois ela nos permite manusear objetos individualmente. Mesmo assim iniciamos o livro com uma exposição da lógica proposicional. Há várias razões para essa escolha.

Em primeiro lugar a lógica proposicional oferece em miniatura os problemas que encontramos na lógica de predicados, mas lá as dificuldades obscurecem alguns dos aspectos relevantes e.g. o teorema da completude para a lógica proposicional já usa o conceito de 'conjunto consistente maximal', mas sem as complicações dos axiomas de Henkin.

Em segundo lugar existem um número de questões verdadeiramente proposicionais que seriam difíceis de tratar em um capítulo sobre a lógica de predicados sem criar uma impressão de descontinuidade que se aproxima do caos. Finalmente parece uma questão de pedagogia saudável deixar que a lógica proposicional preceda a lógica de predicados. O principiante pode em um único contexto se familiarizar com as técnicas de teoria da prova, as algébricas e as da teoria dos modelos que seria demasiado em um primeiro contato com a lógica de predicados.

Tudo o que foi dito sobre o papel da lógica em matemática pode ser repetido para a ciência da computação; a importância dos aspectos sintáticos é ainda mais pronunciada que em matemática, mas não pára aqui. A literatura de teoria da computação é abundante em sistemas lógicos, provas de completude e coisas do gênero. No contexto de teoria dos tipos (lambda cálculo tipificado) a lógica intuicionística tem adquirido um papel importante, enquanto que as técnicas de normalização têm se tornado uma dieta básica para cientistas da computação.

Capítulo 1

Lógica Proposicional

1.1 Proposições e Conectivos

Tradicionalmente, lógica é dita ser a arte (ou estudo) do raciocínio; portanto para descrever a lógica na sua tradição, temos que saber o que é 'raciocínio'. De acordo com algunas visões tradicionais o raciocínio consiste do processo de construir cadeias de entidades lingüísticas por meio de certas relações '... segue de ...', uma visão que é suficientemente boa para nossos propósitos. As entidades lingüísticas que ocorrem nesse tipo de raciocínio são tomadas como sendo *sentenças*, i.e. entidades que exprimem um pensamento completo, ou estado de coisas. Chamamos tais sentenças de *declarativas*. Isso significa que, do ponto de vista da língua natural nossa classe de objetos lingüísticos aceitáveis é bastante restrita.

Felizmente essa classe é suficientemente larga quando olhada do ponto de vista do matemático. Até o presente a lógica tem sido capaz de caminhar muito bem mesmo com essa restrição. É verdade, não se pode lidar com perguntas, ou enunciados imperativos, mas o papel desses entidades é desprezível em matemática pura. Devo fazer uma exceção a enunciados de ação, que têm um papel importante em programação; pense em instruções como 'goto, if ... then, else ...', etc. Por razões dadas adiante, vamos, no entanto, deixá-las de fora.

As sentenças que temos em mente são do tipo '27 é um número quadrado', 'todo inteiro positivo é a soma de quatro quadrados', 'existe apenas um conjunto vazio'. Um aspecto comum de todas essas sentenças declarativas é a possibilidade de atribuí-las um valor de verdade, *verdadeiro* ou *falso*. Não exigimos a determinação propriamente dita do valor de verdade em casos concretos, como por exemplo a conjectura de Goldbach ou a hipótese de Riemann. Basta que possamos 'em princípio' atribuir um valor de verdade.

Nossa chamada lógica *bi-valorada* é baseada na suposição de que toda sentença é verdadeira ou falsa, e é a pedra angular da prática de tabelas-verdade.

Algumas sentenças são mínimas no sentido de que não há parte própria que seja também uma sentença, e.g. $5 \in \{0, 1, 2, 5, 7\}$, ou $2 + 2 = 5$; outras podem ser divididas em partes menores, e.g. 'c é um racional ou c é um irracional' (onde c é uma constante). Por outro lado, podemos construir sentenças maiores a partir de sentenças menores através do uso de *conectivos*. Conhecemos muitos conectivos em língua natural; a seguinte lista não tem de forma alguma o propósito de ser exaustiva: *e*, *ou*, *não*, *se* ... *então* ..., *mas*, *pois*, *como*, *por*, *embora*, *nem*. No discurso usual, como também em matemática informal, usa-se esses conectivos incessantemente; entretanto, em matemática formal seremos econômicos nos conectivos que admitimos. Isso é sobretudo por razões de exatidão. Compare, por exemplo, as seguintes sentenças: "π é irracional, mas não é algébrico", "Max é um marxista, mas ele não é carrancudo". No segundo enunciado podemos descobrir uma sugestão de algum contraste, como se deveríamos nos surpreender que Max não é carrancudo. No primeiro caso tal surpresa não pode ser facilmente imaginada (a menos que, e.g. se tenha acabado de ler que todos os irracionais são algébricos); sem modificar o significado pode-se transformar esse enunciado em "π é irracional e π não é algébrico". Logo por que usar (em um texto formal) a formulação que traz certos tons vagos, emocionais? Por essas e outras razões (e.g. de economia) em lógica nos fixamos em um número limitado de conectivos, em particular aqueles que têm-se mostrado úteis na rotina diária de formular e demonstrar.

Note, entretanto, que mesmo aqui as ambigüidades ameaçam. Cada um dos conectivos já tem um ou mais significados em língua natural. Vamos dar alguns exemplos:

1. João passou direto e bateu num pedestre.
2. João bateu num pedestre e passou direto.
3. Se eu abrir a janela então termos ar fresco.
4. Se eu abrir a janela então $1 + 3 = 4$.
5. Se $1 + 2 = 4$, então teremos ar fresco.
6. João está trabalhando ou está em casa.
7. Euclides foi um grego ou um matemático.

De 1 e 2 concluimos que 'e' pode ter uma função de ordenação no tempo. Não é assim em matemática; "π é irracional e 5 é positivo" simplesmente significa que ambas as partes se verificam. O tempo simplesmente não tem qualquer papel na matemática formal. Certamente não poderíamos dizer "π não era nem algébrico nem transcendente antes de 1882". O que desejaríamos dizer é que "antes de 1882 não se sabia se π era algébrico ou transcendente".

Nos exemplos 3–5 consideramos a implicação. O exemplo 3 será em geral aceito, pois mostra um aspecto que viemos a aceitar como inerente à implicação: existe uma relação entre a premissa e a conclusão. Esse aspecto está ausente nos exemplos 4 e 5. Mesmo assim permitiremos casos tais como o 4 e o 5 em matemática. Há várias razões para se fazer isso. Uma é que a consideração de que o significado deveria ser deixado fora de considerações sintáticas. Do contrário a sintaxe se tornaria difícil de manejar e acabaríamos sendo levados a uma prática esotérica de casos excepcionais. Essa implicação generalizada, em uso em matemática, é chamada de *implicação material*. Algumas outras implicações têm sido estudadas sob as denominações de *implicação estrita*, *implicação relevante*, etc.

Finalmente 6 e 7 demonstram o uso do 'ou'. Tendemos a aceitar 6 e a rejeitar 7. Na maioria das vezes se pensa no 'ou' como algo exclusivo. Em 6 até certo ponto esperamos que João não trabalhe em casa, enquanto que 7 é incomum no sentido de que via de regra não usamos 'ou' quando poderíamos de fato usar 'e'. Além disso, normalmente hesitamos em usar uma disjunção se já sabemos qual das duas partes se verifica, e.g. "32 é um número primo ou 32 não é um número primo" será considerada (no mínimo) artificial pela maioria das pessoas, pois já sabemos que 32 não é um número primo. Ainda assim a matemática usa livremente tais disjunções supérfluas, por exemplo "$2 \geq 2$" (que designa "$2 > 2$ ou $2 = 2$").

De forma a prover a matemática de uma linguagem precisa criaremos uma linguagem artificial, formal, que se prestará ao tratamento matemático. Primeiramente definiremos uma linguagem para a lógica proposicional, i.e. a lógica que lida com *proposições* (sentenças, enunciados). Mais adiante estenderemos nosso tratamento à lógica que também leva em conta propriedades de objetos.

O processo de *formalização* da lógica proposicional consiste de dois estágios: (1) apresentar uma linguagem formal, (2) especificar um procedimento para se obter proposições *válidas* ou *verdadeiras*.

Inicialmente descreveremos a linguagem, usando a técnica de *definições indutivas*. O procedimento é bem simples: *Primeiro* especifique quem são as proposições menores, que não decomponíveis em proposições menores que elas; *depois* descreva como proposições compostas são construídas a partir de proposições previamente dadas.

Definição 1.1.1 A linguagem da lógica propositional tem um alfabeto consistindo de

(i) *símbolos proposicionais*: $p_0, p_1, p_2, \ldots,$
(ii) *conectivos*: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$, $\leftrightarrow$, $\perp$,
(iii) *símbolos auxiliares*: (,).

Os conectivos carregam nomes tradicionais:

$\wedge$	-	*e*	-	*conjunção*
$\vee$	-	*ou*	-	*disjunção*
$\rightarrow$	-	*se ..., então ...*	-	*implicação*
$\neg$	-	*não*	-	*negação*
$\leftrightarrow$	-	*sse*	-	*equivalência*, *bi-implicação*
$\perp$	-	*falso*	-	*falsum*, *absurdum*

Os símbolos proposicionais e o símbolo $\perp$ designam proposições indecomponíveis, que chamamos *átomos*, ou *proposições atômicas*.

Definição 1.1.2 O conjunto $PROP$ de proposições é o menor conjunto X com as propriedades

(i) $p_i \in X$ $(i \in N)$, $\perp \in X$,
(ii) $\varphi, \psi \in X \Rightarrow (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi) \in X$,
(iii) $\varphi \in X \Rightarrow (\neg\varphi) \in X$.

As cláusulas descrevem exatamente as maneiras possíveis de construir proposições. De modo a simplificar a cláusula (ii) escrevemos $\varphi, \psi \in X \Rightarrow (\varphi \Box \psi) \in X$, onde $\Box$ é um dos conectivos $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

Uma advertência ao leitor é recomendável nesse ponto. Usamos letras gregas φ, ψ na definição; elas são proposições? Claramente não queremos que elas sejam, pois queremos apenas aquelas cadeias de símbolos obtidas combinando-se símbolos do alfabeto de maneira correta. Evidentemente nenhuma letra grega entra de jeito nenhum! A explicação é que φ e ψ são usadas como variáveis para proposições. Como queremos estudar lógica, devemos usar uma linguagem para discutí-la nessa linguagem. Em geral essa linguagem é o português puro, cotidiano. Chamamos a linguagem usada para discutir lógica de nossa *meta-linguagem* e φ e ψ são *meta-variáveis* para proposições. Poderíamos dispensar meta-variáveis lidando com (ii) e (iii) verbalmente: se duas proposições são dadas, então uma nova proposição é obtida colocando-se o conectivo $\wedge$ entre elas e adicionando-se parênteses na frente e no final, etc. Essa versão verbal deveria bastar para convencer o leitor das vantagens da maquinaria matemática.

Note que adicionamos um conectivo um bocado incomum, $\perp$. Incomum no sentido de que ele não conecta nada. *Constante lógica* seria um nome melhor. Por uniformidade ficamos com o nosso uso já mencionado. $\perp$ é adicionado por conveniência, poder-se-ia muito bem dispensá-lo, mas ele tem certas vantagens. Pode-se notar que há algo faltando, a saber um símbolo para a proposição verdadeira; de fato adicionaremos um outro símbolo, $\top$, como uma abreviação para a proposição "verdadeira".

Exemplos.

$$(p_7 \to p_0), ((\perp \vee p_{32}) \wedge (\neg p_2)) \in PROP.$$
$$p_1 \leftrightarrow p_7, \neg\neg\perp, ((\to \wedge \notin PROP$$

É fácil mostrar que algo pertence a $PROP$ (simplesmente execute a construção de acordo com 1.1.2); é um pouco mais difícil mostrar que algo não pertence a $PROP$. Faremos um exemplo:

$$\neg\neg\perp \notin PROP.$$

Suponha que $\neg\neg\perp \in X$ e X satisfaz (i), (ii), (iii) da definição 1.1.2. Afirmamos que $Y = X - \{\neg\neg\perp\}$ também satisfaz (i), (ii) e (iii). Como $\perp, p_i \in X$, também $\perp, p_i \in Y$. Se $\varphi, \psi \in Y$, então $\varphi, psi \in X$. Como X satisfaz (ii) $(\varphi \Box \psi) \in X$. Da forma das expressões fica claro que $(\varphi \Box \psi) \neq \neg\neg\perp$ (olhe para os parênteses), logo $(\varphi \Box \psi) \in X - \{\neg\neg\perp\} = Y$. Igualmente se demonstra que Y satisfaz (iii). Logo X não é o menor conjunto satisfazendo (i), (ii) e (iii), portanto $\neg\neg\perp$ não pode pertencer a $PROP$.

Propriedades de proposições são estabelecidas por um procedimento indutivo análogo à definição 1.1.2: primeiro lida com os átomos, e depois vai das partes às proposições compostas. Isso é expresso mais precisamente em

Teorema 1.1.3 (Princípio da indução) *Seja A uma propriedade, então $A(\varphi)$ se verifica para todo $\varphi \in PROP$ se*
(i) $A(p_i)$, *para todo* i, *e* $A(\perp)$,
(ii) $A(\varphi)$, $A(\psi) \Rightarrow A((\varphi \Box \psi))$,
(iii) $A(\varphi) \Rightarrow A((\neg\varphi))$.

Demonstração. Seja $X = \{\varphi \in PROP \mid A(\varphi)\}$, então X satisfaz (i), (ii) e (iii) da definição 1.1.2. Logo $PROP \subseteq X$, i.e. para todo $\varphi \in PROP$ $A(\varphi)$ se verifica. $\Box$

A uma aplicação do teorema 1.1.3 chamamos de uma *prova por indução sobre* φ. O leitor vai notar uma semelhança óbvia entre o teorema acima e o princípio da indução completa em aritmética.

O procedimento acima que permite obter todas as proposições e provar propriedades de proposições é elegante e perspicaz; existe uma outra abordagem, no entanto, que tem suas próprias vantagens (em particular para codificação): considere proposições como o resultado de uma construção linear passo-a-passo. E.g. $((\neg p_0) \to \bot)$ é construído montando-se a expressão a partir de suas partes menores usando as partes previamente construídas: $p_0 \ldots \bot\ (\neg p_0) \ldots ((\neg p_0) \to \bot)$. Isso é formalizado da seguinte maneira:

Definição 1.1.4 Uma seqüência $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ é chamada de *seqüência de formação* de φ se $\varphi_n = \varphi$ e para todo $i \leq n$ φ_i é atômica, ou

$$\begin{array}{l} \varphi_i = (\varphi_j \Box \varphi_k) \text{ para certo } j, k < i \text{ ou} \\ \varphi_i = (\neg \varphi_i) \text{ para certo } j < i. \end{array}$$

Observe que nessa definição estamos considerando cadeias φ de símbolos do alfabeto dado; isso abusa um pouco da convenção notacional.

Exemplos. (a) $\bot, p_2, p_3, (\bot \vee p_2), (\neg(\bot \vee p_2)), (\neg p_3)$ e $p_3, (\neg p_3)$ são ambas seqüências de formação de $(\neg p_3)$. Note que seqüências de formação podem conter 'lixo'.

(b) p_2 é uma subfórmula de $((p_7 \vee (\neg p_2)) \to p_1)$; $(p_1 \to \bot)$ é uma subfórmula de $(((p_2 \vee (p_1 \wedge p_0)) \leftrightarrow (p_1 \to \bot))$.

Agora vamos dar alguns exemplos triviais de prova por indução. Na prática apenas verificamos verdadeiramente as cláusulas da prova por indução e deixamos a conclusão para o leitor.

1. *Cada proposição tem um número par de parênteses.*

Demonstração. (i) Cada átomo tem 0 parênteses e 0 é par.

(ii) Suponha que φ e ψ tenham $2n$, resp. $2m$ parênteses, então $(\varphi \Box \psi)$ tem $2(n + m + 1)$ parênteses.

(iii) Suponha que φ tem $2n$ parênteses, então $(\neg\varphi)$ tem $2(n+1)$ parênteses. □

2. *Cada proposição tem uma seqüência de formação.*

Demonstração. (i) Se φ é um átomo, então a seqüência consistindo de apenas φ é uma seqüência de formação de φ.

(ii) Sejam $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ e $\psi_0, \ldots, \psi_m$ seqüências de formação de φ e ψ, então observa-se facilmente que $\varphi_0, \ldots, \varphi_n, \psi_0, \ldots, \psi_m, (\varphi_n \Box \psi_m)$ é uma seqüência de formação de $(\varphi_n \Box \psi_m)$.

(iii) Deixo para o leitor. □

Podemos melhorar 2:

Teorema 1.1.5 *PROP é o conjunto de todas as expressões que têm seqüência de formação.*

Demonstração. Seja F o conjunto de todas as expressões (i.e. cadeias de símbolos) que têm seqüência de formação. Demonstramos acima que $PROP \subseteq F$.

Suponha que φ tem uma seqüência de formação $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$, vamos demonstrar que $\varphi \in PROP$ por indução sobre n.

$n = 0$: $\varphi = \varphi_0$ e por definição φ é atômica, logo $\varphi \in PROP$.

Suponha que todas as expressões com seqüência de formação de comprimento $m < n$ estão em $PROP$. Por definição $\varphi_n = (\varphi_i \Box \psi_j)$ para todo $i, j < n$, ou $\varphi_n = (\neg\varphi_i)$ para $i < n$, ou φ_n é atômica. No primeiro caso φ_i e φ_j têm seqüência de formação de comprimento $i, j < n$, logo pela hipótese da indução $\varphi_i, \varphi_j \in PROP$. Como $PROP$ satisfaz às cláusulas de definição 1.1.2, temos também $(\varphi_i \Box \varphi_j) \in PROP$. Trate negação igualmente. O caso atômico é trivial. Conclusão $F \subseteq PROP$. □

Em um certo sentido o Teorema 1.1.5 é uma justificação da definição de seqüência de formação. Ele também nos permite estabelecer propriedades de proposições por indução ordinária sobre o comprimento de seqüências de formação.

Em aritmética normalmente se define funções por recursão, e.g. exponenciação é definida por $x^0 = 1$, e $x^{y+1} = x^y \cdot x$, ou a função fatorial por $0! = 1$ e $(x + 1)! = x! \cdot (x + 1)$. A justificação é bem imediata: cada valor é obtido usando-se os valores precedentes (para argumentos positivos). Existe um princípio análogo em nossa sintaxe.

Exemplos. O número $p(\varphi)$ de parênteses de φ, pode ser definido como se segue:

$$\begin{cases} p(\varphi) & = 0 \text{ para } \varphi \text{ atômica}, \\ p((\varphi \Box \psi)) & = p(\varphi) + p(\psi) + 2, \\ p((\neg\varphi)) & = p(\varphi) + 2. \end{cases}$$

O valor de $p(\varphi)$ pode ser computado calculando-se sucessivamente $p(\psi)$ para as subfórmulas ψ. □

Podemos dar esse tipo de definição para todos os conjuntos que são definidos por indução. O princípio de "definição por recursão" toma a forma de "existe uma única função tal que ...". O leitor deve se manter lembrado que a idéia básica é que pode-se 'computar' o valor da função para uma composição de uma forma prescrita a partir dos valores da função nas partes componentes.

O princípio geral por trás dessa prática é firmado pelo seguinte teorema.

Teorema 1.1.6 (Definição por Recursão) *Suponha que sejam dados os mapeamentos $H_\Box : A^2 \to A$ e $H_\neg : A \to A$ e suponha que H_{at} seja um mapeamento do conjunto de átomos para A, então existe exatamente um mapeamento $F : PROP \to A$ tal que*

$$\begin{cases} F(\varphi) & = H_{at} \text{ para } \varphi \text{ atômica}, \\ F((\varphi \Box \psi)) & = H_\Box(F(\varphi), F(\psi)), \\ F((\neg\varphi)) & = H_\neg(F(\varphi)). \end{cases}$$

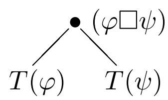
Usualmente, em aplicações concretas o princípio é bem facilmente reconhecido como um princípio correto. Entretanto, em geral tem-se que demonstrar a existência de uma única função satisfazendo às equações acima. A demonstração é deixada como um exercício, cf. Exercício 11.

Aqui estão algums exemplos de definição por recursão:

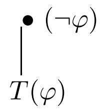
1. A *árvore* (léxica) de uma proposição φ é definida por

$T(\varphi) \quad = \quad \bullet\, \varphi$ para φ atômica

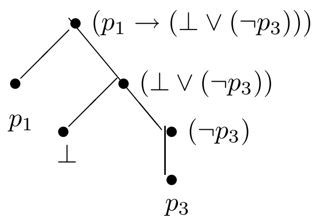
$T((\varphi \Box \psi)) =$

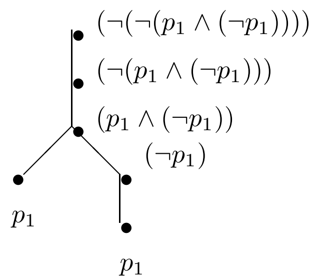


$T((\neg\varphi)) \quad =$



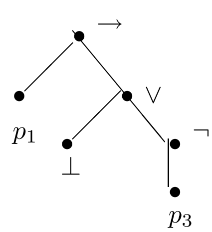
Exemplos. $T((p_1 \to (\bot \vee (\neg p_3)));$ $\qquad T(\neg(\neg(p_1 \wedge (\neg p_1))))$



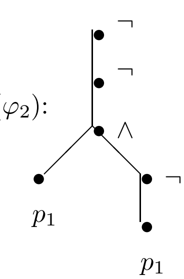


Uma maneira simples de exibir as árvores consiste em listar os átomos localizados no fundo, e indicar os conectivos presentes nos nós.

$T(\varphi_1)$:



$T(\varphi_2)$:



2. O *posto* $p(\varphi)$ de uma proposição φ é definido por

$$\begin{cases} p(\varphi) & = 0 \text{ para } \varphi \text{ atômica,} \\ p((\varphi \Box \psi)) & = \max(p(\varphi), p(\psi)) + 1, \\ p((\neg\varphi)) & = p(\varphi) + 1. \end{cases}$$

Agora vamos usar a técnica da definição por recursão para definir a noção de subfórmula.

Definição 1.1.7 O conjunto das subfórmulas $Sub(\varphi)$ é dado por

$$\begin{array}{ll} Sub(\varphi) & = \{\varphi\} \text{ para } \varphi \text{ atômica} \\ Sub(\varphi_1 \Box \varphi_2) & = Sub(\varphi_1) \cup Sub(\varphi_2) \cup \{\varphi_1 \Box \varphi_2\} \\ Sub(\neg\varphi) & = Sub(\varphi) \cup \{\neg\varphi\} \end{array}$$

Dizemos que ψ *é uma subfórmula de* φ se $\varphi \in Sub(\varphi)$.

Convenções de notação. De forma a simplificar nossa notação vamos economizar em parênteses. Vamos sempre desprezar os parênteses mais externos e omitiremos também os parênteses no caso de negações. Além do mais usaremos a convenção que $\wedge$ e $\vee$ têm precedência sobre $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ (cf. $\cdot$ e $+$ em aritmética), e que $\neg$ tem precedência sobre os outros conectivos.

Exemplos.

$\neg\varphi \vee \varphi$	designa	$((\neg\varphi) \vee \varphi)$,
$\neg(\neg\neg\neg\varphi \wedge \bot)$	designa	$(\neg((\neg(\neg(\neg\varphi))) \wedge \bot))$,
$\varphi \vee \psi \rightarrow \varphi$	designa	$((\varphi \vee \psi) \rightarrow \varphi)$,
$\varphi \rightarrow \varphi \vee (\psi \rightarrow \chi)$	designa	$(\varphi \rightarrow (\varphi \vee (\psi\chi)))$.

Advertência. Note que, rigorosamente falando, aquelas abreviações não são proposições.

Na proposição $(p_1 \rightarrow p_1)$ apenas um átomo é usado para definí-la, embora ele seja usado duas vezes e ocorra em dois lugares. Para um certo propósito é conveniente distinguir entre *fórmulas* e *ocorrências de fórmulas*. A definição de subfórmula não nos informa o que é uma ocorrência de φ em ψ, por isso temos que adicionar alguma informação. Uma maneira de indicar uma ocorrência de φ é especificar seu lugar na árvore de ψ, e.g. uma ocorrência de uma fórmula em uma dada fórmula ψ é um par (φ, k), onde k é um nó na árvore de ψ. Poder-se-ia até mesmo codificar k como uma seqüência de 0's e 1's, onde associamos a cada nó a seguinte seqüência: $\langle\ \langle$ (a seqüência vazia) para o nó raiz, $\langle s_0, \ldots, s_{n-1}, 0\rangle$ para o descendente imediato à esquerda do nó com seqüência $\langle s_0, \ldots, s_{n-1}\rangle$ e $\langle s_0, \ldots, s_{n-1}, 1\rangle$ para o seu segundo descendente imediato (se existe algum). Não seremos demasiadamente formais no manuseio de ocorrências de fórmulas (ou símbolos, na verdade), mas é importante que isso pode ser feito.

A introdução da função de posto não é mera ilustração da 'definição por recursão', pois ela também nos permite demonstrar fatos sobre proposições por meio da *indução completa* (ou *indução matemática*). Reduzimos, por assim dizer, a estrutura de árvore à linha reta dos números naturais. Note que outras 'medidas' servirão tão bem quanto essa, e.g. o número de símbolos. Para evitar omissão definiremos explicitamente o *Princípio da Indução sobre o Posto*:

Teorema 1.1.8 (Princípio da indução sobre o posto) *Se para todo φ [$A(\psi)$ para todo ψ com posto menor que $p(\varphi)$] $\Rightarrow A(\varphi)$, então $A(\varphi)$ se verifica para todo $\varphi \in PROP$.*

Vamos mostrar que indução sobre φ e indução sobre o posto de φ são equivalentes.[1]

Primeiro introduzimos uma notação conveniente pra a indução sobre o posto: escreva $\varphi \prec \psi$ ($\varphi \preceq \psi$) para designar $p(\varphi) < p(\psi)$ ($p(\varphi) \leq p(\psi)$). Logo $\forall\psi \preceq \varphi\, A(\varphi)$ designa "$A(\psi)$ se verifica para todo ψ com posto no máximo $p(\varphi)$"
O *Princípio da Indução sobre o Posto* agora lê

$$\forall\varphi(\forall\psi \preceq \varphi\, A(\psi) \Rightarrow A(\varphi)) \Rightarrow \forall\varphi\, A(\varphi)$$

[1] O leitor pode pular essa demonstração na primeira leitura. Estará fazendo bem aplicando a indução sobre o posto ingenuamente.

Demonstraremos que o princípio da indução sobre o posto segue do princípio da indução. Suponha que

$$\forall\varphi(\forall\psi \preceq \varphi\, A(\psi) \Rightarrow A(\varphi)) \qquad (\dagger)$$

seja dado. Para mostrar que $\forall\varphi\, A(\varphi)$ temos que comer do próprio bolo, ou seja, usar um pouco de indução. Ponha $B(\varphi) := \forall\psi \preceq \varphi\, A(\varphi)$. Agora vamos demonstrar $\forall\varphi\, B(\varphi)$ por indução sobre φ.

1. para φ atômica $\forall\psi \prec \varphi\, A(\varphi)$ é vacuamente verdadeira, logo por (†) $A(\varphi)$ se verifica. Portanto $A(\psi)$ se verifica para todo ψ com posto ≤ 0. Logo $B(\varphi)$.

2. $\varphi = \varphi_1 \Box \varphi_2$. Hipótese da indução: $B(\varphi_1)$, $B(\varphi_2)$. Seja ρ uma proposição qualquer com $p(\rho) = p(\varphi) = n + 1$ (para um n apropriado). Temos que demonstrar que ρ e todas as proposições com posto menor que $n + 1$ têm a propriedade A. Como $p(\varphi) = max(p(\varphi_1), p(\varphi_2)) + 1$, ou φ_1 ou φ_2 tem posto n — digamos φ_1. Agora escolha um ψ arbitrário com $p(\psi) \leq n$, então $\psi \preceq \varphi_1$. Portanto, por $B(\varphi_1)$, $A(\psi)$ se verifica. Isso demonstra que $\forall\psi \prec \rho\, A(\psi)$, logo por (†) $A(\rho)$ se verifica. Isso demonstra $B(\varphi)$.

3. $\varphi = \neg\varphi_1$. Argumento semelhante.

Uma aplicação do princípio da indução nos dá $\forall\varphi\, B(\varphi)$, e como uma conseqüência $\forall\varphi\, A(\varphi)$.

Para a recíproca assumimos as premissas do princípio da indução. Para aplicar o princípio da indução sobre o posto temos que mostrar que (†) se verifica. Distinguimos os seguintes casos:

1. φ atômica. Então (†) trivialmente se verifica.

2. $\varphi = \varphi_1 \Box \varphi_2$. Então $\varphi_1, \varphi_2 \preceq \varphi$ (veja exercício 6). Nossa hipótese é $\forall\psi \prec \varphi\, A(\psi)$, portanto $A(\varphi_1)$ e $A(\varphi_2)$ se verificam. Logo $A(\varphi)$ se verifica.

3. $\varphi = \neg\varphi_1$. Argumento semelhante.

Isso estabelece (†). Logo pela indução sobre o posto obtemos $\forall\varphi\, A(\varphi)$.

Exercícios

1. Dê as seqüências de formação de

   $(\neg p_2 \to (p_3 \vee (p_1 \leftrightarrow p_2))) \wedge \neg p_3$,

   $(p_7 \to \neg\bot) \leftrightarrow ((p_4 \wedge \neg p_2) \to p_1)$,

   $(((p_1 \to p_2) \to p_1) \to p_2) \to p_1$.

2. Demonstre que $((\to \notin PROP$.

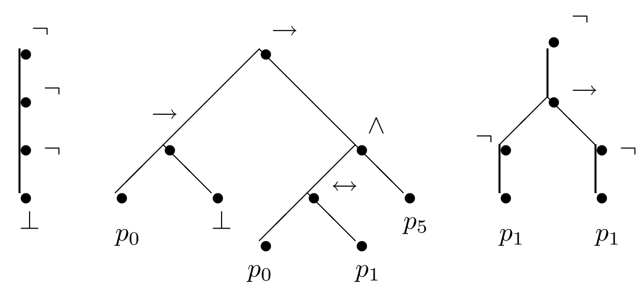
3. Demonstre que a relação "é uma subfórmula de" é transitiva.

4. Seja φ uma subfórmula de ψ. Demonstre que φ ocorre em cada seqüência de formação de ψ.

5. Se φ ocorre em uma seqüência de formação mínima de ψ então φ é uma subfórmula de ψ.

6. Seja g a função posto:
   (a) Demonstre que $p(\varphi) \leq$ o número de ocorrências de conectivos de φ,
   (b) Dê exemplos de φ tais que $<$ ou $=$ se verifica em (a),
   (c) Ache o posto das proposições no exercício 1.
   (d) Demonstre que $p(\varphi) < p(\psi)$ se φ é uma subfórmula própria de ψ.

7. (a) Determine as árvores das proposições no exercício 1,
   (b) Determine as proposições com as seguintes árvores.



8. Seja $\#(T(\varphi))$ o número de nós de $T(\varphi)$. Pelo "número de conectivos em φ" queremos dizer o número de ocorrências de conectivos em φ. (Em geral $\#(A)$ designa o número de elementos de um conjunto (finito) A).
   (a) Se φ não contém $\perp$, demonstre que: o número de conectivos de $\varphi +$ o número de átomos de $\varphi \leq \#(T(\varphi))$.
   (b) $\#(\text{sub}(\varphi)) \leq \#(T(\varphi))$.
   (c) Um ramo de uma árvore é um conjunto maximal linearmente ordenado. O comprimento de um ramo é o número de seus nós menos um. Demonstre que $p(\varphi)$ é o comprimento de um ramo de maior comprimento em $T(\varphi)$.
   (d) Suponha que φ não contém $\perp$. Demonstre que: o número de conectivos em $\varphi +$ o número de átomos de $\varphi \leq 2^{p(\varphi)+1} - 1$.

9. Demonstre que uma proposição com n conectivos tem no máximo $2n + 1$ subfórmulas.

10. Demonstre que para $PROP$ temos um teorema de decomposição única: para cada proposição não-atômica σ ou existem duas proposições φ e ψ tais que $\sigma = \varphi \square \psi$, ou existe uma proposição φ tal que $\sigma = \neg\varphi$.

11. (a) Dê uma definição indutiva para a função F, definida por recursão sobre $PROP$ a partir das funções H_{at}, $H_{\Box}$, $H_{\neg}$, como um conjunto F^* de pares.

    (b) Formule e demonstre para F^* o princípio da indução.

    (c) Demonstre que F^* é de fato uma função sobre $PROP$.

    (d) Demonstre que ela é a única função sobre $PROP$ satisfazendo as equações recursivas.

1.2 Semântica

A tarefa de interpretar a lógica proposicional é simplificada pelo fato de que as entidades consideradas têm uma estrutura simples. As proposições são construídas a partir de blocos adicionando-se conectivos.
As partes mais simples (os átomos) são da forma "a grama é verde", "Maria gosta de Goethe", "$6 - 3 = 2$", que são simplesmente *verdadeiras* ou *falsas*. Estendemos essa atribuição de *valores-verdade* a proposições compostas, por reflexão sobre o significado dos conectivos lógicos.

Vamos combinar de usar 1 e 0 ao invés de 'verdadeiro' e 'falso'. O problema que enfrentamos é como interpretar $\varphi \Box \psi$, $\neg\varphi$, dados os valores-verdade de φ e ψ.

Ilustraremos a solução considerando a tabela entrada-saída para os Srs. Smith e Jones.

Conjunção. Um visitante que deseja ver ambos Smith e Jones quer que a tabela esteja na posição mostrada aqui, i.e.

	entra	sai
Smith	$\times$	
Jones	$\times$	

"Smith está" $\wedge$ "Jones está" é verdadeiro sse
"Smith está" é verdadeiro e "Jones está" é verdadeiro

Escrevemos $v(\varphi) = 1$ (resp. 0) para "φ é verdadeiro". Então a consideração acima pode ser enunciada como sendo $v(\varphi \wedge \psi) = 1$ sse $v(\varphi) = v(\psi) = 1$, ou $v(\varphi \wedge \psi) = \min(v(\varphi), v(\psi))$.

Pode-se também escrever sob forma de uma *tabela-verdade*:

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

A tabela-verdade deve ser lida da seguinte forma: o primeiro argumento é tomado da coluna mais à esquerda e o segundo argumento é tomado da linha mais acima.

Disjunção. Se um visitante deseja ver um dos parceiros, não importa qual, ele deseja que a tabela esteja em uma das posições

	entra	sai
Smith	$\times$	
Jones		$\times$

	entra	sai
Smith		$\times$
Jones	$\times$	

	entra	sai
Smith	$\times$	
Jones	$\times$	

No último caso ele pode fazer uma escolha, porém isso não é um problema, pois ele deseja ver pelo menos um dos caras, não importa qual.

Em nossa notação, a interpretação de $\vee$ é dada por

$$v(\varphi \vee \psi) = 1 \qquad \text{sse} \qquad v(\varphi) = 1 \quad \text{ou} \quad v(\psi) = 1$$

Abreviando: $v(\varphi \vee \psi) = \max(v(\varphi), v(\psi))$.

Sob forma de tabela-verdade:

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

Negação. O visitante que está apenas interessado no Sr. Smith enunciará “Smith não está” se a tabela estiver na posição:

	entra	sai
Smith		$\times$

Portanto “Smith não está” é verdadeiro se “Smith está” é falso. Escrevemos isso da forma $v(\neg\varphi) = 1$ sse $v(\varphi) = 0$, ou $v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$.

Sob forma de tabela-verdade:

$\neg$	
0	1
1	0

Implicação. Nosso famoso visitante foi informado de que “Jones está se Smith está”. Agora podemos ao menos prever as seguintes posições da tabela

	entra	sai
Smith	$\times$	
Jones	$\times$	

	entra	sai
Smith		$\times$
Jones		$\times$

Se a tabela está na posição:

	entra	sai
Smith	$\times$	
Jones		$\times$

então ele sabe que a informação era falsa.

O caso remanescente,

	entra	sai
Smith		$\times$
Jones	$\times$	

, não pode ser tratado de forma tão simples. Evidentemente não há razão para considerar a informação falsa, mas sim que “não ajuda muito”, ou “irrelevante”. Entretanto, nos comprometemos com a posição de que cada enunciado é verdadeiro ou falso, por isso temos que decidir atribuir a “Se Smith está, então Jones está” verdadeiro também nesse caso particular. O leitor vai se dar conta de que fizemos uma escolha deliberada aqui; uma escolha que se revelará uma escolha feliz em vista da elegância do sistema resultante. Não há razão convincente, entretanto, para se permanecer com a noção de implicação que acabamos de introduzir. Embora várias outras noções tenham sido estudadas na literatura, para propósitos matemáticos nossa noção é perfeitamente apropriada.

Note que há um caso em que a implicação é falsa (veja a tabela-verdade abaixo), e vamos manter essa observação na lembrança para aplicação mais adiante – ela vai ajudar a diminuir os cálculos.

Em nossa notação a interpretação da implicação é dada por $v(\varphi \to \psi) = 0$ sse $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 0$.

Sua tabela-verdade é:

$\to$	0	1
0	1	1
1	0	1

Equivalência. Se nosso visitante sabe que "Smith está se e somente se Jones está", então ele sabe que ambos estão presentes ou ambos não estão. Logo $v(\varphi \to \psi) = 1$ sse $v(\varphi) = v(\psi)$.

Sua tabela-verdade é:

$\leftrightarrow$	0	1
0	1	0
1	0	1

Falsum. Um absurdo, tal como "$0 \neq 0$", "alguns números ímpares são pares", "Eu não sou eu", não podem ser verdadeiros. Logo colocamos $v(\bot) = 0$.

Estritamente falando deveríamos adicionar uma tabela-verdade, i.e. a tabela para $\top$, o oposto de *falsum*.

Verum. Esse símbolo designa proposições evidentemente verdadeiras tal como $1 = 1$; colocamos $v(\top) = 1$ para todo v.

Definição 1.2.1 Um mapeamento $v : PROP \to \{0, 1\}$ é uma *valoração* se

$$\begin{array}{lll}
v(\varphi \wedge \psi) & = & \min(v(\varphi), v(\psi)), \\
v(\varphi \vee \psi) & = & \max(v(\varphi), v(\psi)), \\
v(\varphi \to \psi) & = & 0 \quad \Leftrightarrow \quad v(\varphi) = 1 \text{ e } v(\psi) = 0, \\
v(\varphi \leftrightarrow \psi) & = & 1 \quad \Leftrightarrow \quad v(\varphi) = v(\psi), \\
v(\neg\varphi) & = & 1 - v(\varphi), \\
v(\bot) & = & 0.
\end{array}$$

Se uma valoração é dada apenas para átomos então, em virtude da definição por recursão, é possível extendê-la para todas as proposições, portanto obtemos:

Teorema 1.2.2 *Se v é um mapeamento do conjunto de átomos em $\{0, 1\}$, satisfazendo $v(\bot) = 0$, então existe uma única valoração $[\![\cdot]\!]_v$, tal que $[\![\varphi]\!]_v = v(\varphi)$ para φ atômica.*

Tem sido prática comum designar valorações como definidas acima por $[\![\varphi]\!]$, por isso adotaremos essa notação. Como $[\![\cdot]\!]$ é completamente determinado por seus valores sobre os átomos, $[\![\varphi]\!]$ é frequentemente designado por $[\![\varphi]\!]_v$. Sempre que não houver confusão omitiremos o índice v.

O teorema 1.2.2 nos diz que cada um dos mapeamentos v e $[\![\cdot]\!]_v$ determina o outro de forma única, por conseguinte chamamos v também de valoração (ou de uma *valoração atômica*, se necessário). Desse teorema torna-se aparente que existem muitas valorações (cf. Exercício 4).

É óbvio também que o *valor* $[\![\varphi]\!]_v$ *de* φ *sob* v somente depende dos valores de v nas suas subfórmulas atômicas:

Lema 1.2.3 *Se $v(p_i) = v'(p_i)$ para todo p_i ocorrendo em φ, então $[\![\varphi]\!]_v = [\![\varphi]\!]_{v'}$.*

Demonstração. Uma indução fácil sobre φ.

Um importante subconjunto de $PROP$ é o de todas as proposições φ que são *sempre verdadeiras*, i.e. verdadeiras sob todas as valorações.

Definição 1.2.4 (i) φ é uma *tautologia* se $[\![\varphi]\!]_v = 1$ para todas as valorações v,
(ii) $\models \varphi$ designa 'φ é uma tautologia',
(iii) Seja Γ um conjunto de proposições, então $\Gamma \models \varphi$ sse para todo v: ($[\![\psi]\!]_v = 1$ para todo $\psi \in \Gamma$) $\Rightarrow [\![\varphi]\!]_v = 1$.

Em palavras, $\Gamma \models \varphi$ se verifica sse φ é verdadeira sob toda valoração que torna toda fórmula ψ em Γ verdadeira. Dizemos que φ é uma conseqüência semântica de Γ. Escrevemos $\Gamma \not\models \varphi$ se $\Gamma \models \varphi$ não é o caso.

Convenção. $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$ designa $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi$.

Note que "$[\![\varphi]\!]_v = 1$ para toda v" é uma outra maneira de dizer "$[\![\varphi]\!] = 1$ para todas as valorações".

Exemplos. (i) $\models \varphi \to \varphi$; $\quad \models \neg\neg\varphi \to \varphi$; $\quad \models \varphi \vee \psi \leftrightarrow \psi \vee \varphi$,
(ii) $\varphi, \psi \models \varphi \wedge \psi$; $\quad \varphi, \varphi \to \psi \models \psi$; $\quad \varphi \to \psi, \neg\psi \models \neg\varphi$.

Frequentemente se precisa de substituir subfórmulas por proposições; acontece que basta definir substituição apenas para átomos.

Escrevemos $\varphi[\psi/p_i]$ para designar a proposição obtida substituindo-se todas as ocorrências de p_i em φ por ψ. Na realidade, a substituição de p_i por ψ define um mapeamento de $PROP$ em $PROP$, que pode ser dado por recursão (sobre φ).

Definição 1.2.5

$$
\begin{array}{lcl}
\varphi[\psi/p_i] & = & \begin{cases} \varphi & \textit{se } \varphi \textit{ atômica e } \varphi \neq p_i \\ \psi & \textit{se } \varphi = p_i \end{cases} \\
(\varphi_1 \square \varphi_2)[\psi/p_i] & = & \varphi_1[\psi/p_i] \square \varphi_2[\psi/p_i] \\
(\neg\varphi)[\psi/p_i] & = & \neg\varphi[\psi/p_i].
\end{array}
$$

O teorema seguinte expõe as propriedades básicas da substituição de proposições equivalentes.

Teorema 1.2.6 (Teorema da Substituição) *Se* $\models \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$, *então* $\models \psi[\varphi_1/p] \leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$, *onde* p *é um átomo.*

O teorema da substituição é na verdade uma conseqüência de um lema um pouco mais forte

Lema 1.2.7 $[\![\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2]\!]_v \leq [\![\psi[\varphi_1/p] \leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]]\!]_v$ *e*
$\models (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) \to (\psi[\varphi_1/p] \leftrightarrow \psi[\varphi_2/p])$

Demonstração. Indução sobre φ. Apenas temos que considerar $[\![\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2]\!]_v = 1$ (por que?).

- ψ atômica. Se $\psi = p$, então $\psi[\varphi_i/[] = \varphi_i$ e o resultado segue imediatamente. Se $\psi \neq p$, então $\psi[\varphi_i/p] = \psi$, e $[\![\psi[\varphi_1/p] \leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]]\!]_v = [\![\psi \leftrightarrow \psi]\!]_v = 1$.
- $\psi = \psi_1 \square \psi_2$. Hipótese da indução: $[\![\psi_i[\varphi_1/p]]\!]_v = [\![\psi_i[\varphi_2/p]]\!]_v$. Agora o valor de $[\![(\psi_1 \square \psi_2)[\varphi_i/p]]\!]_v = [\![\psi_1[\varphi_i/p] \square \psi_2[\varphi_i/p]]\!]_v$ é univocamente determinado por suas partes $[\![\psi_j[\varphi_i/p]]\!]_v$, logo $[\![(\psi_1 \square \psi_2)[\varphi_1/p]]\!]_v = [\![(\psi_1 \square \psi_2)[\varphi_2/p]]\!]_v$.

– $\psi = \neg\psi_1$. Deixo para o leitor.

A prova da segunda parte essencialmente usa o fato de que $\models \varphi \to \psi$ sse $[\![\varphi]\!]_v \le [\![\psi]\!]_v$ para toda v (cf. Exercício 6). □

A prova do teorema da substituição agora segue imediatamente. □

O teorema da substituição diz em bom português que *partes podem ser substituídas por partes equivalentes*.

Existem várias técnicas para se testar tautologias. Uma delas (bastante lenta) usa tabelas-verdade. Damos um exemplo:

$$(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi\neg\varphi)$$

φ	ψ	$\neg\varphi$	$\neg\psi$	$\varphi \to \psi$	$\neg\psi \to \neg\varphi$	$(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

A última coluna consiste de 1's apenas. Como, pelo lema 1.2.3 apenas os valores de φ e ψ são relevantes, tivemos que testar 2^2 casos. Se existirem n partes (atômicas) precisamos de 2^n linhas.

Podemos comprimir um pouco a tabela acima, escrevendo-a da seguinte forma:

$(\varphi$	$\to$	$\psi)$	$\leftrightarrow$	$(\neg\psi$	$\to$	$\neg\varphi)$
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	1	0

Vamos fazer uma outra observação sobre o papel dos conectivos 0-ários $\bot$ e $\top$. Claramente $\models \top \leftrightarrow (\bot \to \bot)$, logo podemos definir $\top$ a partir de $\bot$. Por outro lado, não podemos definir $\bot$ a partir de $\top$ e $\to$; note que a partir de $\top$ nunca podemos obter algo exceto uma proposição equivalente a $\top$ se usamos $\wedge$, $\vee$, $\to$, mas a partir de $\bot$ podemos gerar $\bot$ e $\top$ através da aplicação de $\wedge$, $\vee$, $\to$.

Exercícios

1. Verifique pelo método da tabela-verdade quais das seguintes proposições são tautologias:
   (a) $(\neg\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\psi \to \varphi)$
   (b) $\varphi \to ((\psi \to \sigma) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma)))$
   (c) $(\varphi \to \neg\varphi) \leftrightarrow \neg\varphi$
   (d) $\neg(\varphi \to \neg\varphi)$
   (e) $(\varphi \to (\psi \to \sigma)) \leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \to \sigma)$
   (f) $\varphi \vee \neg\varphi$ (*princípio do terceiro excluído*)
   (g) $\bot \leftrightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)$
   (h) $\bot \to \varphi$ (*ex falso sequitur quodlibet*)

2. Demonstre que: (a) $\varphi \models \varphi$;

   (b) $\varphi \models \psi$ e $\psi \models \sigma \Rightarrow \varphi \models \sigma$;

   (c) $\models \varphi \to \psi \Leftrightarrow \varphi \models \psi$.

3. Determine $\varphi[\neg p_0 \to p_3/p_0]$ para $\varphi = p_1 \wedge p_0 \to (p_0 \to p_3)$;

   $\varphi = (p_3 \leftrightarrow p_0) \vee (p_2 \to \neg p_0)$.

4. Demonstre que existem $2^{\aleph_0}$ valorações.

5. Demonstre que $[\![\varphi \wedge \psi]\!]_v = [\![\varphi]\!]_v \cdot [\![\psi]\!]_v$,

   $[\![\varphi \vee \psi]\!]_v = [\![\varphi]\!]_v + [\![\psi]\!]_v - [\![\varphi]\!]_v \cdot [\![\psi]\!]_v$,

   $[\![\varphi \to \psi]\!]_v = 1 - [\![\varphi]\!]_v + [\![\varphi]\!]_v \cdot [\![\psi]\!]_v$,

   $[\![\varphi \leftrightarrow \psi]\!]_v = 1 - |[\![\varphi]\!]_v - [\![\psi]\!]_v|$.

6. Demonstre que $[\![\varphi \to \psi]\!]_v = 1 \quad \Leftrightarrow \quad [\![\varphi]\!]_v \leq [\![\psi]\!]_v$.

1.3 Algumas Propriedades da Lógica Proposicional

Com base nas seções anteriores já podemos provar muitos teoremas sobre a lógica proposicional. Uma das primeiras descobertas na lógica proposicional moderna foi sua semelhança com álgebras.
Após Boole, um estudo amplo das propriedades algébricas foi realizado por muitos lógicos. Os aspectos puramente algébricos têm desde então sido estudados na chamada *Álgebra de Boole*.

Apenas mencionaremos um pequeno número dessas leis algébricas.

Teorema 1.3.1 *As seguintes proposições são tautologias.*

$$(\varphi \vee \psi) \vee \sigma \leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \sigma) \quad (\varphi \vee \psi) \wedge \sigma \leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma)$$
associatividade
$$\varphi \vee \psi \leftrightarrow \psi \vee \varphi \quad \varphi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi$$
comutatividade
$$\varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma) \quad \varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)$$
distributividade
$$\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi \quad \neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$$
leis de De Morgan
$$\varphi \vee \varphi \leftrightarrow \varphi \quad \varphi \wedge \varphi \leftrightarrow \varphi$$
idempotência
$$\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$$
lei da dupla negação

Demonstração. Verifique a tabela verdade ou faça alguns cálculos. E.g. a lei de De Morgan: $[\![\neg(\varphi \vee \psi)]\!] = 1 \Leftrightarrow [\![\varphi \vee \psi]\!] = 0 \Leftrightarrow [\![\varphi]\!] = [\![\psi]\!] = 0 \Leftrightarrow [\![\neg\varphi]\!] = [\![\neg\psi]\!] = 1 \Leftrightarrow [\![\neg\varphi \wedge \neg\psi]\!] = 1$.
Logo $[\![\neg(\varphi \vee \psi)]\!] = [\![\neg\varphi \wedge \psi]\!]$ para todas as valorações, i.e. $\models \neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$.
As tautologias restantes são deixadas ao leitor. □

Para aplicar o teorema anterior em "cálculos lógicos" precisamos de mais algumas equivalências. Isso é demonstrado na simples equivalência $\models \varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \varphi$ (exercício para o leitor). Pois, pela lei da distributividade $\models \varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi \wedge \varphi) \vee (\varphi \wedge \psi)$ e $\models (\varphi \wedge \varphi) \vee (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \varphi \vee (\varphi \wedge \psi)$, por idempotência e pelo teorema da substituição. Logo $\models \varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \varphi \vee (\varphi \wedge \psi)$. Uma outra aplicação da lei da distributividade nos levará de volta ao início, portanto apenas aplicando-se as leis acima não nos permitirá eliminar ψ!

Listamos portanto mais algumas propriedades convenientes.

Lema 1.3.2
Se $\models \varphi \to \psi$, *então* $\models \varphi \wedge \psi \leftrightarrow \varphi$
$\models \varphi \vee \psi \leftrightarrow \psi$

Demonstração. Pelo Exercício 6 da seção 1.2 $\models \varphi \to \psi$ implica que $[\![\varphi]\!]_v \leq [\![\psi]\!]_v$ para toda valoração v. Logo $[\![\varphi \wedge \psi]\!]_v = \min([\![\varphi]\!]_v, [\![\psi]\!]_v) = [\![\varphi]\!]_v$ e $[\![\varphi \vee \psi]\!]_v = \max([\![\varphi]\!]_v, [\![\psi]\!]_v) = [\![\psi]\!]_v$ para toda v. □

Lema 1.3.3
(a) $\models \varphi \quad \Rightarrow \quad \models \varphi \wedge \psi \leftrightarrow \psi$
(b) $\models \varphi \quad \Rightarrow \quad \models \neg\varphi \vee \psi \leftrightarrow \psi$
(c) $\models \bot \vee \psi \leftrightarrow \psi$
(d) $\models \top \wedge \psi \leftrightarrow \psi$

Demonstração. Deixo ao leitor. □

O teorema a seguir estabelece algumas equivalências envolvendo vários conectivos. Ele nos diz que podemos "definir" a menos de equivalência lógica todos os conectivos em termos de $\{\vee, \neg\}$, ou $\{\to, \neg\}$, ou $\{\wedge, \neg\}$, ou $\{\to, \bot\}$. Ou seja, podemos encontrar e.g. uma proposição envolvendo apenas $\vee$ e $\neg$, que é equivalente a $\varphi \leftrightarrow \psi$, etc.

Teorema 1.3.4
(a) $\models (\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$,
(b) $\models (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$,
(c) $\models \varphi \vee \psi \leftrightarrow (\neg\varphi \to \psi)$,
(d) $\models \varphi \vee \psi \leftrightarrow \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$,
(e) $\models \varphi \wedge \psi \leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$,
(f) $\models \neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \to \bot)$,
(g) $\models \bot \leftrightarrow \varphi \wedge \neg\varphi$.

Demonstração. Calcule os valores-verdade das proposições à esquerda e das proposições à direita. □

Agora temos material suficiente para lidar com lógica como se fosse álgebra. Por conveniência escrevemos $\varphi \approx \psi$ para designar $\models \varphi \leftrightarrow \psi$.

Lema 1.3.5
$\approx$ *é uma relação de equivalência sobre* $PROP$, *i.e.*
$\varphi \approx \varphi$ (*reflexividade*),
$\varphi \approx \psi \quad \Rightarrow \quad \psi \approx \varphi$ (*simetria*),
$\varphi \approx \psi$ *e* $\psi \approx \sigma \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx \sigma$ (*transitividade*).

Demonstração. Use $\models \varphi \leftrightarrow \psi$ sse $[\![\varphi]\!]_v = [\![\psi]\!]_v$ para toda v. □

Vamos dar alguns exemplos de cálculos algébricos que estabelecem uma cadeia de equivalências.

1. $\models (\varphi \to (\psi \to \sigma)) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi \to \sigma)$,

$$\begin{array}{rcll} \varphi \to (\psi \to \sigma) & \approx & \neg\varphi \vee (\psi \to \sigma), & \text{(1.3.4(b))} \\ \neg\varphi \vee (\psi \to \sigma) & \approx & \neg\varphi \vee (\neg\psi \vee \sigma), & \text{(1.3.4(b) e teor. subst.)} \\ \neg\varphi \vee (\neg\psi \vee \sigma) & \approx & (\neg\varphi \vee \neg\psi) \vee \sigma, & \text{(associatividade)} \\ (\neg\varphi \vee \neg\psi) \vee \sigma & \approx & \neg(\varphi \wedge \psi) \vee \sigma & \text{(De Morgan e teor. subst.)} \\ \neg(\varphi \wedge \psi) \vee \sigma & \approx & (\varphi \wedge \psi) \to \sigma, & \text{(1.3.4(b))} \\ \text{Logo } \varphi \to (\psi \to \sigma) & \approx & (\varphi \wedge \psi) \to \sigma. & \end{array}$$

Agora deixamos de fora as referências aos fatos utilizados, e formamos uma longa cadeia. Basta calcular até atingirmos uma tautologia.

2. $\models (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi)$,

$\neg\psi \to \neg\varphi \approx \neg\neg\psi \vee \neg\varphi \approx \psi \vee \neg\varphi \approx \neg\varphi \vee \psi \approx \varphi \to \psi$

3. $\models \varphi \to (\psi \to \varphi)$,

$\varphi \to (\psi \to \varphi) \approx \neg\varphi \vee (\neg\psi \vee \varphi) \approx (\neg\varphi \vee \varphi) \vee \neg\psi$.

Vimos que $\vee$ e $\wedge$ são associativos, porisso adotamos a convenção, também usada em álgebra, de omitir parênteses em disjunções e conjunções iteradas; ou seja, escrevemos $\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \varphi_3 \vee \varphi_4$, etc. Isso é correto, pois independentemente da forma como recuperarmos (corretamente do ponto de vista sintático) os parênteses, a fórmula resultante é determinada univocamente a menos de equivalência.

Será que até esse ponto introduzimos *todos* os conectivos? Obviamente não. Podemos facilmente inventar novos conectivos. Aqui vai um famoso, introduzido por Sheffer: $\varphi|\psi$ designa "não é verdade que ambos φ e ψ são verdadeiros". Mais precisamente: $\varphi|\psi$ é dado pela seguinte tabela-verdade:

barra de Sheffer

$\vert$	0	1
0	1	1
1	1	0

Vamos dizer que um conectivo lógico n-ário \$ é *definido* por sua tabela-verdade, ou por sua função de avaliação, se $[\![\$(p_1,\ldots,p_n)]\!] = f([\![p_1]\!],\ldots,[\![p_n]\!])$ para alguma função f.
Embora possamos aparentemente introduzir muitos conectivos novos dessa forma, não há surpresas em estoque nos esperando, pois todos aqueles conectivos são definíveis em termos de $\vee$ e $\neg$:

Teorema 1.3.6 *Para cada conectivo n-ário \$ definido por sua função de avaliação, existe uma proposição τ, contendo apenas $p_1,\ldots,p_n$, $\vee$ e $\neg$, tal que* $\models \tau \leftrightarrow \$(p_1,\ldots,p_n)$.

Demonstração. Por indução sobre n. Para $n = 1$ existem 4 conectivos possíveis com tabelas-verdade

$\$_1$	
0	0
1	0

$\$_2$	
0	1
1	1

$\$_3$	
0	0
1	1

$\$_4$	
0	1
1	0

Facilmente se verifica que todas as proposições $\neg(p \vee \neg p)$, $p \vee \neg p$, p e $\neg p$ atenderão aos requisitos.

Suponha que para todos os conectivos n-ários foram encontradas as proposições. Considere $\$(p_1, \ldots, p_n, p_{n+1})$ com a tabela-verdade:

p_1	p_2	$\ldots$	p_n	p_{n+1}	$\$(p_1, \ldots, p_n, p_{n+1})$
0	0		0	0	i_1
.	.		0	1	i_2
.	0		1	.	.
.	1		1	.	.
0	.		.	.	.
.	1		.	.	.
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
1	0		.	.	.
.	.		.	.	.
.	.		.	.	.
.	0		.	.	.
.	1		0	.	.
.	.		0	.	.
1	.		1	0	.
.	.		1	1	$i_{2^{n+1}}$

onde $i_k \leq 1$.

Consideramos dois conectivos auxiliares $\$_1$ e $\$_2$ definidos por

$\$_1(p_2, \ldots, p_{n+1}) = \$(\bot, p_2, \ldots, p_{n+1})$ e
$\$_2(p_2, \ldots, p_{n+1}) = \$(\top, p_2, \ldots, p_{n+1})$ onde $\top = \neg\bot$

(como foi dado pelas metades superior e inferior da tabela acima).

Pela hipótese da indução existem proposições σ_1 e σ_2, contendo apenas $p_1, \ldots, p_{n+1}$, $\vee$ e $\neg$ tal que $\models \$_i(p_2, \ldots, p_{n+1}) \leftrightarrow \sigma_i$.
A partir daquelas duas proposições podemos construir a proposição τ:
$\tau := (p_1 \to p_2) \wedge (\neg p_1 \to \sigma_1)$.

Afirmação $\models \$(p_1, \ldots, p_{n+1}) \leftrightarrow \tau$.

Se $[\![p_1]\!]_v = 0$ então $[\![p_1 \to \sigma_2]\!]_v = 1$, logo $[\![\tau]\!]_v = [\![\neg p_1 \to \sigma_1]\!]_v = [\![\sigma_1]\!]_v = [\![\$_1(p_2, \ldots, p_{n+1})]\!]_v = [\![\$(p_1, p_2, \ldots, p_{n+1})]\!]_v$, usando $[\![p_1]\!]_v = 0 = [\![\bot]\!]_v$.

O caso $[\![p_1]\!]_v = 1$ é semelhante.

Agora exprimindo $\to$ e $\wedge$ em termos de $\vee$ e $\neg$ (1.3.4), temos $[\![\tau']\!] = [\![\$(p_1, \ldots, p_{n+1})]\!]$ para todas as valorações (um outro uso do lema 1.2.3), onde $\tau' \approx \tau$ e τ' contém apenas os conectivos $\vee$ e $\neg$. $\square$

Para uma outra solução veja o Exercício 7.

O teorema acima e o teorema 1.3.4 são justificações pragmáticas para nossa escolha da tabela-verdade para $\to$: obtemos uma teoria extremamente elegante e útil. O teorema 1.3.6 é usualmente expresso dizendo-se que $\vee$ e $\neg$ formam um conjunto *funcionalmente completo* de conectivos. Igualmente $\wedge$, $\neg$ e $\to$, $\neg$ e $\bot$, $\to$ formam conjuntos funcionalmente completos.

Por analogia com $\sum$ e $\prod$ de álgebra, introduzimos disjunções e conjunções finitas:

Definição 1.3.7

$$\begin{cases} \bigwedge\limits_{i\leq 0}\varphi_i & = & \varphi_0 \\ \\ \bigwedge\limits_{i\leq n+1}\varphi_i & = & \bigwedge\limits_{i\leq n}\varphi_i \wedge \varphi_{n+1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \bigvee\limits_{i\leq 0}\varphi_i & = & \varphi_0 \\ \\ \bigvee\limits_{i\leq n+1}\varphi_i & = & \bigvee\limits_{i\leq n}\varphi_i \vee \varphi_{n+1} \end{cases}$$

Definição 1.3.8 *Se* $\varphi = \bigwedge\limits_{i\leq n} \bigvee\limits_{j\leq m_i} \varphi_{ij}$*, onde* φ_{ij} *é atômica ou a negação de um átomo, então* φ *é uma* forma normal conjuntiva*. Se* $\varphi = \bigvee\limits_{i\leq n} \bigwedge\limits_{j\leq m_i} \varphi_{ij}$*, onde* φ_{ij} *é atômica ou a negação de um átomo, então* φ *é uma* forma normal disjuntiva*.*

As formas normais são análogas às bem-conhecidas formas normais em álgebra: $ax^2 + byx$ é "normal", enquanto que $x(ax + by)$ não é. Pode-se obter formas normais simplesmente "multiplicando", i.e. aplicação repetida de leis distributivas. Em álgebra existe apenas uma "forma normal"; em lógica existe uma certa dualidade entre $\wedge$ e $\vee$, de tal forma que temos dois teoremas da forma normal.

Teorema 1.3.9 *Para cada* φ *existem as formas normais conjuntivas* $\varphi^\wedge$ *e as formas normais disjuntivas* $\varphi^\vee$*, tais que* $\models \varphi \leftrightarrow \varphi^\wedge$ *e* $\models \varphi \leftrightarrow \varphi^\vee$*.*

Demonstração. Primeiro elimine todos os conectivos exceto $\perp$, $\wedge$, $\vee$ e $\neg$. Então demonstre o teorema por indução sobre a proposição resultante na linguagem restrita a $\perp$, $\wedge$, $\vee$ e $\neg$. Na verdade $\perp$ não tem qualquer papel nesse cenário; poderia muito bem ser ignorado.

(a) φ é atômica. Então $\varphi^\wedge = \varphi^\vee = \varphi$.

(b) $\varphi = \psi \wedge \sigma$. Então $\varphi^\wedge = \psi^\wedge \wedge \sigma^l and$.

Para obter uma forma normal disjuntiva consideramos $\psi^\vee = \bigvee \psi_i$, $\sigma^\vee = \bigvee \sigma_j$, onde os ψ_i's e os σ_j's são conjunções de átomos e negações de átomos.

Agora $\varphi = \psi \wedge \sigma \approx \psi^\vee \wedge \sigma^\vee \approx \bigvee\limits_{i,j}(\psi_i \wedge \sigma_j)$.

A última proposição está na forma normal, logo dizemos que $\varphi^\vee$ é essa fórmula.

(c) $\varphi = \psi \wedge \sigma$. Semelhante a (b).

(d) $\varphi = \neg\psi$. Por hipótese da indução ψ tem formas normais $\psi^\vee$ e $\psi^\wedge$.

$\neg\psi \approx \neg\psi^\wedge \approx \neg \bigvee \bigwedge \psi_{i,j} \approx \bigwedge \bigvee \neg\psi_{i,j} \approx \bigwedge \bigvee \psi'_{i,j}$, onde $\psi'_{i,j} = \neg\psi_{i,j}$ se $\psi_{i,j}$ é atômica, e $\psi_{i,j} = \neg\psi'_{i,j}$ se $\psi_{i,j}$ é a negação de um átomo. (Observe que $\neg\neg\psi_{i,j} \approx \psi_{i,j}$.) Claramente $\bigwedge \bigvee \psi'_{i,j}$ está na forma normal conjuntiva para φ. A forma normal disjuntiva é deixada para o leitor.

Para uma outra demonstração dos teoremas da forma normal veja Exercício 7. $\square$

Olhando para a álgebra da lógica no teorema 1.3.1, vimos que $\vee$ e $\wedge$ se comportaram de uma maneira semelhante, a ponto de que as mesmas leis se verificam para ambos. Vamos tornar essa 'dualidade' mais precisa. Para esse propósito consideramos uma linguagem com apenas os conectivos $\vee$, $\wedge$ e $\neg$.

Definição 1.3.10 Defina um mapeamento auxiliar $* : PROP \rightarrow PROP$ recursivamente da seguinte forma

$$\begin{array}{lcl} \varphi^* & = & \neg\varphi \text{ se } \varphi \text{ é atômica}, \\ (\varphi \wedge \psi)^* & = & \varphi^* \vee \psi^*, \\ (\varphi \vee \psi)^* & = & \varphi^* \wedge \psi^*, \\ (\neg\varphi)^* & = & \neg\varphi^*. \end{array}$$

Exemplo. $((p_0 \wedge \neg p_1) \vee p_2)^* = (p_0 \wedge \neg p_1)^* \wedge p_2^* = (p_0^* \vee (\neg p_1)^*) \wedge \neg p_2 = (\neg p_0 \vee \neg p_1^*) \wedge \neg p_2 = (\neg p_0 \vee \neg\neg p_1) \wedge \neg p_2 \approx (\neg p_0 \vee p_1) \wedge \neg p_2$.

Note que o efeito da tradução "$*$" resume-se a tomar a negação e aplicar as leis de De Morgan.

Lema 1.3.11 $[\![\varphi^*]\!] = [\![\neg\varphi]\!]$.

Demonstração. Indução sobre φ. Para φ atômica $[\![\varphi^*]\!] = [\![\neg\varphi]\!]$.
$[\![(\varphi \wedge \psi)^*]\!] = [\![\varphi^* \vee \psi^*]\!] = [\![\neg\varphi \vee \neg\psi]\!] = [\![\neg(\varphi \wedge \psi)]\!]$.
$[\![(\varphi \vee \psi)^*]\!]$ e $[\![(\neg\varphi)^*]\!]$ são deixados ao leitor. □

Corolário 1.3.12 $\models \varphi^* \leftrightarrow \neg\varphi$.

Demonstração. Imediata do Lema 1.3.11. □

Até agora não é bem a dualidade que procuramos. Na verdade desejamos apenas intercambiar $\wedge$ e $\vee$. Por isso introduzimos uma nova função de tradução.

Definição 1.3.13 A função de tradução $^d : PROP \rightarrow PROP$ é recursivamente definida por

$$\begin{array}{lcl} \varphi^d & = & \varphi \text{ para } \varphi \text{ atômica}, \\ (\varphi \wedge \psi)^d & = & \varphi^d \vee \psi^d, \\ (\varphi \vee \psi)^d & = & \varphi^d \wedge \varphi^d, \\ (\neg\varphi)^d & = & \neg\varphi^d. \end{array}$$

Teorema 1.3.14 (Teorema da Dualidade) $\models \varphi \leftrightarrow \psi \;\Leftrightarrow \models \varphi^d \leftrightarrow \psi^d$.

Demonstração. Usamos a tradução "$*$" como um passo intermediário. Vamos introduzir a noção de substituição simultânea para simplificar a demonstração: $\sigma[\tau_o, \ldots, \tau_n/p_0, \ldots, p_n]$ é obtida substituindo-se p_i por τ_i para todo $i \leq n$ simultaneamente (veja Exercício 15). Observe que $\varphi^* = \varphi^d[\neg p_0, \ldots, \neg p_n]$, logo $\varphi^*[\neg p_0, \ldots, \neg p_n] = \varphi^d[\neg\neg p_0, \ldots, \neg\neg p_n/p_0, \ldots, p_n]$, onde os átomos de φ ocorrem entre $p_0, \ldots, p_n$.

Pelo Teorema da Substituição $\models \varphi^d \leftrightarrow \varphi^*[\neg p_o, \ldots, \neg p_n/p_0, \ldots, p_n]$. A mesma equivalência se verifica para ψ.

Pelo Corolário 1.3.12 $\models \varphi^* \leftrightarrow \neg\varphi$, $\models \psi^* \leftrightarrow \neg\psi$. Como $\models \varphi \leftrightarrow \psi$, temos também $\models \neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi$. Logo $\models \varphi^* \leftrightarrow \psi^*$, e portanto $\models \varphi^*[\neg p_0, \ldots, \neg p_n/p_0, \ldots, p_n] \leftrightarrow \varphi^*[\neg p_0, \ldots, \neg p_n]/p_0, \ldots, p_n]$.

Usando a relação acima entre φ^d e φ^* obtemos $\models \varphi^d \leftrightarrow \psi^d$. A recíproca segue imediatamente, pois $\varphi^{dd} = \varphi$. □

O Teorema da Dualidade nos dá gratuitamente uma identidade para cada identidade que estabelecemos.

Exercícios

1. Demonstre por meios 'algébricos'

$$\begin{array}{ll}
\models & (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi), \quad \textit{Contraposição}, \\
\models & (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma), \ \textit{transitividade da} \ \to, \\
\models & (\varphi \to (\psi \wedge \neg\psi)) \to \neg\varphi, \\
\models & (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi, \\
\models & \neg(\varphi \wedge \neg\varphi), \\
\models & \varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi), \\
\models & ((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi. \ \textit{Lei de Peirce}.
\end{array}$$

2. Simplifique as seguintes proposições (i.e. encontre uma proposição equivalente mais simples).

   (a) $(\varphi \to \psi) \wedge \varphi$, (b) $(\varphi\psi) \vee \neg\varphi$ (c) $(\varphi \to \psi) \to \psi$,
   (d) $\varphi \to (\varphi \wedge \psi)$, (e) $(\varphi \wedge \psi) \vee \varphi$, (f) $(\varphi \to \psi) \to \varphi$

3. Mostre que $\{\neg\}$ não é um conjunto de conectivos funcionalmente completo. Idem para $\{\to, \vee\}$ (sugestão: mostre que para cada fórmula φ com apenas $\to$ e $\vee$ existe uma valoração v tal que $[\![\varphi]\!]_v = 1$).

4. Mostre que a barra de Sheffer, $|$, forma um conjunto funcionalmente completo (sugestão: $\models \neg\varphi \leftrightarrow \varphi|\varphi$).

5. Mostre que o conectivo $\downarrow$ (φ *nem* ψ), com função de valoração $[\![\varphi \downarrow \psi]\!] = 1$ sse $[\![\varphi]\!] = [\![\psi]\!] = 0$ forma um conjunto funcionalmente completo.

6. Mostre que $|$ e $\downarrow$ são os únicos conectivos binários \$ tais que $\{\,\$\,\}$ é funcionalmente completo.

7. A completude funcional de $\{\vee, \neg\}$ pode ser demonstrada de uma forma alternativa.
   Seja \$ um conectivo n-ário com função de valoração $[\![\$(p_1, \ldots, p_n)]\!] = f([\![p_1]\!], \ldots, [\![p_n]\!])$. Queremos encontrar uma proposição τ (em $\{\vee, \neg\}$) tal que $[\![\tau]\!] = f([\![p_1]\!], \ldots, [\![p_n]\!])$.

   Suponha que $f([\![p_1]\!], \ldots, [\![p_n]\!]) = 1$ ao menos uma vez. Considere todas as uplas $([\![p_1]\!], \ldots, [\![p_n]\!])$ com $f([\![p_1]\!], \ldots, [\![p_n]\!]) = 1$ e forme as conjunções correspondentes $\bar{p}_1 \wedge \bar{p}_2 \wedge \ldots \wedge \bar{p}_n$ tais que $\bar{p}_i = p_i$ se $[\![p_i]\!] = 1$, $\bar{p}_i = \neg p_i$ se $[\![p_i]\!] = 0$. Então mostre que $\models (\bar{p}_1^1 \wedge \bar{p}_2^1 \wedge \ldots \wedge \bar{p}_n^1) \vee \ldots \vee (\bar{p}_1^k \wedge \bar{p}_2^k \wedge \ldots \wedge \bar{p}_n^k) \leftrightarrow \$(p_1, \ldots, p_n)$, onde a disjunção é tomada sobre todas as n-uplas tais que $f([\![p_1]\!], \ldots, [\![p_n]\!]) = 1$.

   Alternativamente, podemos considerar as uplas para as quais $f([\![p_1]\!], \ldots, [\![p_n]\!]) = 0$. Preencha os detalhes. Note que esta demonstração da completude funcional prova ao mesmo tempo os Teoremas da Forma Normal.

8. Seja o conectivo ternário \$ definido por $[\![\$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)]\!] = 1 \Leftrightarrow [\![\varphi_1]\!] + [\![\varphi_2]\!] + [\![\varphi_3]\!] \geq 2$ (o conectivo 'maioria'). Exprima \$ em termos de $\vee$ e $\neg$.

9. Seja o conectivo binário # definido pela tabela

#	0	1
0	0	1
1	1	0

   Exprima # em termos de $\vee$ e $\neg$.

10. Determine as formas normais conjuntivas e disjuntivas para $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$, $((\varphi \to \psi) \to \psi) \to \psi$, $(\varphi \to (\varphi \wedge \neg\psi)) \wedge (\psi \to (\psi \wedge \neg\varphi))$.

11. Dê um critério para que uma forma normal conjuntiva seja uma tautologia.

12. Demonstre que $\bigwedge_{i \leq n} \varphi_i \vee \bigwedge_{j \leq m} \psi_j \approx \bigwedge_{\substack{i \leq n \\ j \leq m}} (\varphi_i \vee \psi_j)$ e

    $\bigvee_{i \leq n} \varphi_i \wedge \bigvee_{j \leq m} \psi_j \approx \bigvee_{\substack{i \leq n \\ j \leq m}} (\varphi_i \wedge \psi_j)$.

13. O conjunto de todas as valorações, visto como o conjunto de todas as seqüências 0-1, forma um espaço topológico, o chamado espaço de Cantor $\mathcal{C}$. Os conjuntos abertos básicos são uniões finitas de conjuntos da forma $\{v \mid [\![p_i]\!]_v = \ldots = [\![p_{i_n}]\!]_v = 1 \text{ e } [\![p_{j_1}]\!]_v = \ldots = [\![p_{j_m}]\!]_v = 0\}$, $i_k \neq j_p$ para $k \leq n$; $p \leq m$.

    Defina uma função $[\![\ ]\!] : PROP \to \mathcal{P}(\mathcal{C})$ (subconjuntos do espaço de Cantor) por: $[\![\varphi]\!] = \{v \mid [\![\varphi]\!]_v = 1\}$.

    (a) Mostre que $[\![\varphi]\!]$ é um conjunto aberto básico (que também é fechado),

    (b) $[\![\vee\psi]\!] = [\![\varphi]\!] \cup [\![\psi]\!]$; $[\![\varphi \wedge \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \cap [\![\psi]\!]$; $[\![\neg\varphi]\!] = [\![\varphi]\!]^{\wedge}$,

    (c) $\models \varphi \Leftrightarrow [\![\varphi]\!] = C$; $[\![\bot]\!] = \emptyset$; $\models \varphi \to \psi \Leftrightarrow [\![\varphi]\!] \subseteq [\![\psi]\!]$.

    Estenda o mapeamento para conjuntos de proposições Γ por $[\![\Gamma]\!] = \{v \mid [\![\varphi]\!]_v = 1 \text{ para todo } \varphi \in \Gamma\}$. Note que $[\![\Gamma]\!]$ é fechado.

    (d) $\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow [\![\Gamma]\!] \subseteq [\![\varphi]\!]$.

14. Podemos ver a relação $\models \varphi \to \psi$ como uma espécie de ordenação. Ponha $\varphi \sqsubset \psi := \models \varphi \to \psi$ e $\not\models \psi \to \varphi$.

    (i) para cada φ, ψ tais que $\varphi \sqsubset \psi$, encontre σ com $\varphi \sqsubset \sigma \sqsubset \psi$,

    (ii) encontre $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$, tais que $\varphi_1 \sqsubset \varphi_2 \sqsubset \varphi_3 \sqsubset \varphi_4 \sqsubset \ldots$,

    (iii) mostre que para cada φ, ψ com φ e ψ incomparáveis, existe pelo menos um σ com $\varphi, \psi \sqsubset \sigma$.

15. Dê uma definição recursiva da substituição simultânea. $\varphi[\psi_1, \ldots, \psi_n/p_1, \ldots, p_n]$ e formule e demonstre o análogo apropriado do Teorema da Substituição (teorema 1.2.6).

1.4 Dedução Natural

Nas seções precedentes adotamos a visão de que a lógica proposicional é baseada nas tabelas-verdade, i.e. olhamos para a lógica do ponto de vista semântico. Essa, entretanto, não é a única visão possível. Se se pensa em lógica como uma codificação do raciocínio (exato), então ela deveria permanecer próxima à prática de se fazer inferência, ao invés de se basear na noção de verdade. Agora exploraremos a abordagem não-semântica, definindo um sistema para derivar conclusões a partir de premissas. Embora essa abordagem seja de natureza formal, i.e. se abstenha de interpretar os enunciados e as regras, é aconselhável manter em mente alguma interpretação. Vamos introduzir um número de regras de derivação, que são, até certo ponto, os passos atômicos em uma derivação. Essas regras de derivação são concebidas (por Gentzen), para reproduzir o significado intuitivo dos conectivos tão fielmente quanto possível.

Existe um pequeno problema, que ao mesmo tempo é uma grande vantagem, a saber: nossas regras exprimem o significado construtivo dos conectivos. Essa vantagem não será explorada agora, mas é bom guardá-la na memória quando lidamos com lógica (a vantagem é explorada na lógica intuicionística).

Um exemplo simples: o princípio do terceiro excluído nos diz que $\models \varphi \vee \neg\varphi$, i.e., assumindo que φ é um enunciado matemático definido, ou ele ou sua negação deve ser verdadeiro(a). Agora considere um determinado problema ainda não resolvido, como por exemplo a Hipótese de Riemann, chame-a R. Então ou R é verdadeiro, ou $\neg R$ é verdadeiro. Entretanto, não sabemos qual dos dois é verdadeiro, portanto o conteúdo construtivo de $R \vee \neg R$ é nulo. Construtivamente, seria necessário um método para encontrar qual das alternativas se verifica.

O conectivo proposicional que tem um significado bem diferente em uma abordagem construtiva e em uma abordagem não-construtiva é a disjunção. Por conseguinte restringimos nossa linguagem no momento aos conectivos $\wedge$, $\rightarrow$, e $\bot$. Essa não é uma restrição real pois $\{\rightarrow, \bot\}$ é um conjunto funcionalmente completo.

Nossas derivações consistem de passos muito simples, tais como "de φ e $\varphi \rightarrow \psi$ conclua ψ", escrito da seguinte forma:

$$\frac{\varphi \qquad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$

As proposições acima da linha são *premissas*, e a que está abaixo da linha é a *conclusão*. O exemplo acima *eliminou* o conectivo $\rightarrow$. Podemos também *introduzir* conectivos. As regras de derivação para $\wedge$ e $\rightarrow$ são divididas em

REGRAS DE INTRODUÇÃO	REGRAS DE ELIMINAÇÃO
$(\wedge I) \quad \dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge I$	$(\wedge E) \quad \dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \wedge E \quad \dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi} \wedge E$
$(\rightarrow I) \quad \begin{array}{c} [\varphi] \\ \vdots \\ \dfrac{\psi}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow I \end{array}$	$(\rightarrow E) \quad \dfrac{\varphi \qquad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \rightarrow E$

Temos duas regras para $\perp$, ambas eliminam $\perp$, mas introduzem uma fórmula.

$$(\perp) \quad \frac{\perp}{\varphi}\perp \qquad\qquad (\mathrm{RAA}) \quad \begin{array}{c} [\neg\varphi] \\ \vdots \\ \dfrac{\perp}{\varphi}\,\mathrm{RAA} \end{array}$$

Como de costume '$\neg\varphi$' é usada aqui como uma abreviação para '$\varphi \to \perp$'.

As regras para $\wedge$ são evidentes: se temos φ e ψ podemos concluir $\varphi \wedge \psi$, e se temos $\varphi \wedge \psi$ podemos concluir φ (ou ψ). A regra de introdução para a implicação tem uma forma diferente. Ela enuncia que, se podemos derivar ψ a partir de φ (como uma hipótese), então podemos concluir $\varphi \to \psi$ (sem a hipótese φ). Isso está de acordo com o significado intuitivo da implicação: $\varphi \to \psi$ significa que "ψ segue de φ". Escrevemos a regra $(\to I)$ na forma acima para sugerir uma derivação. A notação ficará mais clara depois que tivermos definido derivações. Por enquanto escreveremos as premissas de uma regra na ordem que parece mais apropriada, e mais tarde seremos mais exigentes.

A regra $(\to E)$ também é evidente considerando o significado da implicação. Se φ é dado e sabemos que ψ segue de φ, então temos também ψ. A *regra do falsum*, $(\perp)$, expressa que a partir de um absurdo podemos derivar qualquer coisa (em latim *ex falso sequitur quodlibet*), e a *regra de reductio ad absurdum*, (RAA), é uma formulação do *princípio da prova por contradição*: se se deriva uma contradição a partir da hipótese $\neg\varphi$, então tem-se uma derivação de φ (sem a hipótese $\neg\varphi$, é claro). Em ambos $(\to I)$ e (RAA) as hipóteses desaparecem, e isso é indicado por um traço riscando a hipótese. Dizemos que a hipótese é *cancelada*. Vamos abrir um parênteses aqui e falar um pouco sobre o cancelamento de hipóteses. Primeiramente consideremos a introdução da implicação. Existe um teorema bem conhecido em geometria plana que enuncia "se um triângulo é isósceles, então os ângulos opostos aos lados iguais são iguais entre si" (*Elementos*, de Euclides, Livro I, proposição 5). Isso é demonstrado da seguinte maneira: supomos que temos um triângulo isósceles e então, em um certo número de passos, deduzimos que os ângulos na base são iguais. Daí concluímos que *os ângulos na base são iguais se o triângulo é isósceles*.

Pergunta 1: ainda precisamos da hipótese de que o triângulo é isósceles? É claro que não! Incorporamos, por assim dizer, essa condição no enunciado propriamente dito. É precisamente o papel dos enunciados condicionais, tais como "se chover usarei meu guarda-chuva", para se livrar da obrigação de requerer (ou verificar) a condição. Em resumo: se podemos deduzir ψ usando a hipótese φ, então $\varphi \to \psi$ é o caso *sem a hipótese* φ (pode haver outras hipóteses, obviamente).

Pergunta 2: é proibido manter a hipótese? Resposta: não, mas ela é claramente supérflua. Na verdade em geral sentimos que as condições supérfluas são confusas ou até mesmo enganosas, mas isso é muito mais uma questão da psicologia da resolução de problemas do que de lógica formal. Normalmente queremos o melhor resultado possível, e é intuitivamente claro que quanto mais hipóteses enunciamos para um teorema, mais fraco é o nosso resultado. Por conseguinte cancelaremos, via de regra, tantas hipóteses quanto possível.

No caso do reductio ad absurdum também temos que lidar com o cancelamento de hipóteses. Novamente, vamos considerar um exemplo.

Em Análise introduzimos a noção de *seqüência convergente* (a_n) e posteriormente a noção "a é um limite de (a_n)". O próximo passo é demonstrar que para cada seqüência convergente existe um único limite; estamos interessados na parte da demonstração que mostra que existe no máximo um limite. Tal demonstração pode se processar da seguinte maneira: assumimos que existem dois limites distintos a e a', e a partir dessa hipótese, $a \neq a'$, derivamos uma contradição. Conclusão: $a = a'$. Nesse caso desprezamos a hipótese $a \neq a'$, dessa vez não é o caso de ser supérflua, mas de estar em conflito! Logo, tanto no caso de $(\to I)$ quanto no de (RAA), é prática segura cancelar todas as ocorrências da hipótese em aberto.

Para dominar a técnica da Dedução Natural, e para se familiarizar com a técnica de cancelamento de hipóteses, nada melhor que olhar para alguns casos concretos. Portanto, antes de proceder à noção de *derivação*, consideremos alguns exemplos.

I
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \wedge \psi]^1}{\psi}\wedge E \qquad \dfrac{[\varphi \wedge \psi]^1}{\varphi}\wedge E}{\psi \wedge \varphi}\wedge I}{\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi}\to I_1$$

II
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]^2 \qquad [\varphi \to \bot]^1}{\bot}\to E}{(\varphi \to \bot) \to \bot}\to I_1}{\varphi \to ((\varphi \to \bot) \to \bot)}\to I_2$$

III
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \wedge \psi]^1}{\psi}\wedge E \qquad \dfrac{\dfrac{[\varphi \wedge \psi]^1}{\varphi}\wedge E \qquad [\varphi \to (\psi \to \sigma)]^2}{\psi \to \sigma}\to E}{\sigma}\to E}{\varphi \wedge \psi \to \sigma}\to I_1}{(\varphi \to (\psi \to \sigma)) \to (\varphi \wedge \psi \to \sigma)}\to I_2$$

Se usarmos a abreviação usual '$\neg\varphi$' para '$\varphi \to \bot$', podemos trazer algumas derivações para uma forma mais conveniente. (Recordemos que $\neg\varphi$ e $\varphi \to \bot$, como foram dados em 1.2, são semanticamente equivalentes). Reescrevemos a derivação **II** usando a abreviação:

II′
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]^2 \qquad [\neg\varphi]^1}{\bot}\to E}{\neg\neg\varphi}\to I_1}{\varphi \to \neg\neg\varphi}\to I_2$$

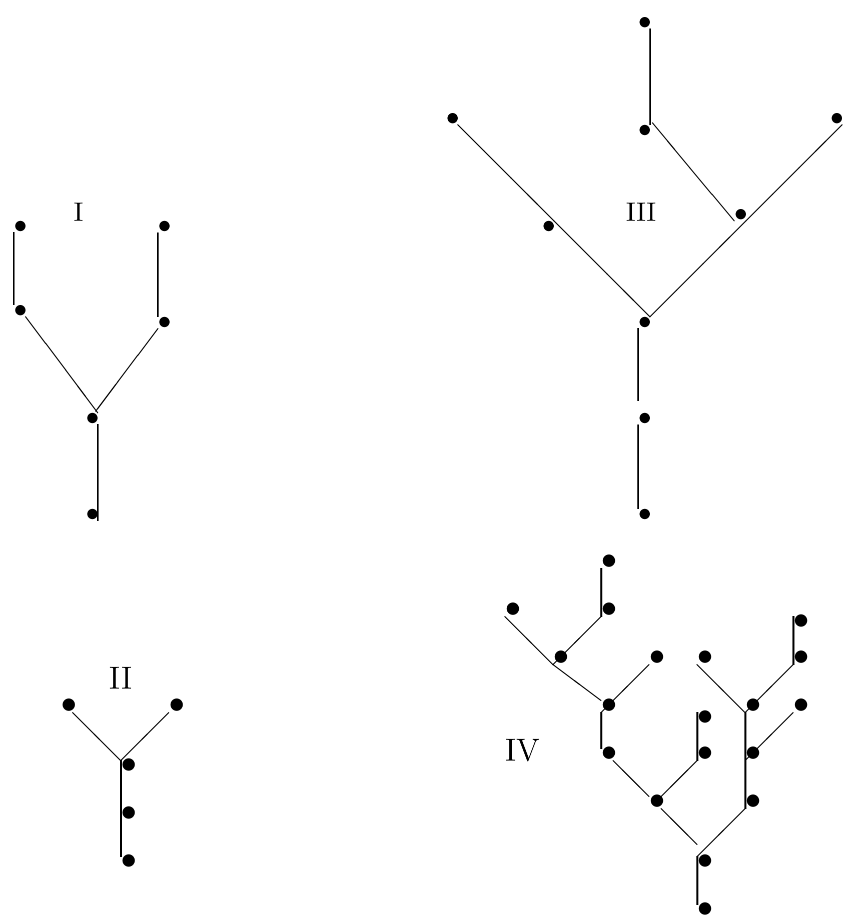
No exemplo seguinte usamos o símbolo de negação e também o de bi-implicação;

$\varphi \leftrightarrow \psi$ para $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$.

IV

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]^1 \quad \dfrac{[\varphi\leftrightarrow\neg\varphi]^3}{\varphi\to\neg\varphi}\wedge E}{\neg\varphi}\to E \quad [\varphi]^1}{\bot}\to E}{\neg\varphi}\to I_1 \quad \dfrac{[\varphi\leftrightarrow\neg\varphi]^3}{\neg\varphi\to\varphi}\wedge E}{\varphi}\to E \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]^2 \quad \dfrac{[\varphi\leftrightarrow\neg\varphi]^3}{\varphi\to\neg\varphi}\wedge E}{\neg\varphi}\to E \quad [\varphi]^2}{\bot}\to E}{\neg\varphi}\to I_2}{\dfrac{\bot}{\neg(\varphi\leftrightarrow\neg\varphi)}\to I_3}\to E
$$

Os exemplos nos mostram que derivações têm a forma de árvores. Mostramos as árvores abaixo:



Pode-se também apresentar derivações como cadeias (lineares) de proposições: permaneceremos, entretanto com a forma de árvore, e a idéia é que aquilo que vem naturalmente na forma de árvore não deveria ser colocado numa cadeia.

Agora temos que definir a noção de *derivação* em geral. Usaremos uma definição indutiva para produzir árvores.

Notação. se $\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi\end{array}$, $\begin{array}{c}\mathcal{D}'\\ \varphi'\end{array}$ são derivações com conclusões φ, φ', então $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi\end{array}}{\psi}$, $\dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{D} & \mathcal{D}'\\ \varphi & \varphi'\end{array}}{\psi}$ são derivações obtidas aplicando-se uma regra de derivação a φ (e a φ e φ'). O cancelamento de uma hipótese é indicado da seguinte maneira: se $\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi\end{array}$ é uma derivação com hipótese ψ, então $\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \mathcal{D}\\ \varphi\end{array}}{\sigma}$ é uma derivação com ψ cancelada.

Com respeito ao cancelamento de hipóteses, observamos que não se cancela necessariamente *todas* as ocorrências de uma tal proposição ψ. Isso é claramente justificado, pois nota-se que ao adicionar hipóteses não se faz com que uma proposição seja inderivável (informação irrelevante pode sempre ser adicionada). É uma questão de prudência, entretanto, cancelar tanto quanto possível. Por que prosseguir com mais hipóteses do que o necessário?

Além do mais, pode-se aplicar $(\rightarrow I)$ se não há hipótese disponível para o cancelamento e.g. $\dfrac{\varphi}{\psi \rightarrow \varphi} \rightarrow I$ é uma derivação correta, usando apenas $(\rightarrow I)$. Para resumir: dada uma árvore de derivação de ψ, obtemos uma árvore de derivação de $\varphi \rightarrow \psi$ (ou ψ) no fundo da árvore e cancelando algumas (ou todas) as ocorrências, e cancelando algumas (ou todas) as ocorrências, se existe alguma, de φ (ou $\neg\varphi$) localizada no alto da árvore.

Algumas palavras sobre o uso prático da dedução natural: se você deseja construir uma derivação para uma proposição é aconselhável conceber algum tipo de estratégia, tal qual num jogo. Suponha que você quer mostrar que $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)) \rightarrow (\varphi \wedge \psi \rightarrow \sigma)$ (Exemplo **III**), então (como a proposição é uma fórmula implicacional) a regra $(\rightarrow I)$ sugere a si própria. Portanto tente derivar $\varphi \wedge \psi\sigma$ a partir da hipótese $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)$. Agora sabemos onde começar e para onde ir. Para usar $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)$ desejamos ter φ (para aplicar $(\rightarrow E)$). Por outro lado desejamos derivar σ a partir de $\varphi \wedge \psi$, logo podemos usar $\varphi \wedge \psi$ como uma hipótese. Mas disso podemos imediatamente obter φ. Agora uma aplicação de $(\rightarrow E)$ resulta em $\psi \rightarrow \sigma$. Novamente precisamos de algo para "quebrar $\psi \rightarrow \sigma$ em suas partes menores"; isso é claramente ψ. Mas ψ é fornecido pela hipótese $\varphi \wedge \psi$. Como resultado, obtivemos σ – tal qual desejávamos. Agora algumas regras de introdução produzião o resultado desejado. A derivação **III** mostra em detalhe como construir a derivação resultante. Depois de se construir um certo número de derivações adquire-se a convicção prática de que se deve primeiramente quebrar as proposições em suas partes menores na direção de-baixo-para-cima, e então constrói-se as proposições desejadas juntando-se as partes resultantes de maneira apropriada. Essa convicção prática é confirmada pelo *Teorema da Normalização*, para o qual retornaremos mais adiante. Há um ponto que tende particularmente a confundir principiantes:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi} \rightarrow I \qquad \text{e} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\varphi}\ \text{RAA}$$

se parecem muito. São ambas casos particulares de Reductio ad absurdum? Na verdade a derivação à esquerda nos diz (informalmente) que a suposição de φ leva a uma contradição, logo φ *não pode ser o caso*. Isso é em nossa terminologia o significado de “não φ”. A derivação à direita nos diz que a suposição de $\neg\varphi$ leva a uma contradição, portanto (pelo mesmo raciocínio) $\neg\varphi$ não pode ser o caso. Logo, pelo significado da negação, obteríamos apenas $\neg\neg\varphi$. Não está de forma alguma claro que $\neg\neg\varphi$ é equivalente a φ (de fato, isso é rejeitado pelos intuicionistas), logo essa é uma propriedade extra de nossa lógica. (Isso é confirmado num sentido técnico: $\neg\neg\varphi \to \varphi$ não é derivável no sistema sem RAA.)

Retornamos agora às noções teóricas.

Definição 1.4.1 O conjunto de derivações é o menor conjunto X tal que

(1) A árvore de um único elemento φ pertence a X para toda $\varphi \in PROP$.

$$(2\wedge)\quad \text{Se } \begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi\end{array}, \begin{array}{c}\mathcal{D}'\\ \varphi'\end{array} \in X \text{ então } \dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{D} & \mathcal{D}'\\ \varphi & \varphi'\end{array}}{\varphi\wedge\varphi'} \in X.$$

$$\text{Se } \begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi\wedge\psi\end{array} \in X, \text{ então } \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi\wedge\psi\end{array}}{\varphi}, \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi\wedge\psi\end{array}}{\psi} \in X.$$

$$(2\to)\quad \text{Se } \begin{array}{c}\varphi\\ \mathcal{D}\\ \psi\end{array} \in X, \text{ então } \dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \mathcal{D}\\ \psi\end{array}}{\varphi\to\psi} \in X.$$

$$\text{Se } \begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi\end{array}, \begin{array}{c}\mathcal{D}'\\ \varphi\to\psi\end{array} \in X \text{ então } \dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{D} & \mathcal{D}'\\ \varphi & \varphi\to\psi\end{array}}{\psi} \in X.$$

$$(2\bot)\quad \text{Se } \begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \bot\end{array} \in X, \text{ então } \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \bot\end{array}}{\varphi} \in X.$$

$$\text{Se } \begin{array}{c}\neg\varphi\\ \mathcal{D}\\ \bot\end{array} \in X, \text{ então } \dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]\\ \mathcal{D}\\ \bot\end{array}}{\varphi} \in X.$$

A fórmula no final de uma derivação é chamada de *conclusão* da derivação. Como a classe das derivações é indutivamente definida, podemos reproduzir os resultados da seção 1.1.

E.g. temos um *princípio da indução sobre* $\mathcal{D}$: seja A uma propriedade. Se $A(\mathcal{D})$ se verifica para derivações com apenas um elemento e A é preservada sob as cláusulas $(2\wedge)$, $(2\to)$ e $(2\bot)$, então $A(\mathcal{D})$ se verifica para todas as derivações. Igualmente podemos definir funções sobre o conjunto de derivações por recursão (cf. Exercício 6, 7, 9).

Definição 1.4.2 A relação $\Gamma \vdash \varphi$ entre conjuntos de proposições e proposições é definida por: existe uma derivação com conclusão φ e com todas as hipóteses (não canceladas) em Γ. (Veja também o Exercício 6).

Dizemos que φ é *derivável* a partir de Γ. Note que pela definição Γ pode conter várias "hipóteses" supérfluas. O símbolo $\vdash$ é chamado de *roleta*.

Se $\Gamma =$, escrevemos $\vdash \varphi$, e dizemos que φ é um teorema.

Poderíamos ter evitado a noção de 'derivação' e ao invés dela ter tomado a noção de 'derivabilidade' como fundamental, veja Exercício 10. As duas noções, entretanto, são intimamente relacionadas.

Lema 1.4.3
(a) $\Gamma \vdash \varphi$ *se* $\varphi \in \Gamma$,
(b) $\Gamma \vdash \varphi,\ \Gamma' \vdash \psi \Rightarrow \Gamma \cup \Gamma' \vdash \varphi \wedge \psi$,
(c) $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$ *e* $\Gamma \vdash \psi$,
(d) $\Gamma \cup \varphi \vdash \psi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \to \psi$,
(e) $\Gamma \vdash \varphi,\ \Gamma' \vdash \varphi \to \psi \Rightarrow \Gamma \cup \Gamma' \vdash \psi$,
(f) $\Gamma \vdash \bot \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$,
(g) $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$.

Demonstração. Imediata a partir da definição de derivação. □

Agora vamos listar alguns teoremas. $\neg$ e $\leftrightarrow$ são usados como abreviações.

Teorema 1.4.4
(1) $\vdash \varphi \to (\psi \to \varphi)$,
(2) $\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$,
(3) $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma))$,
(4) $\vdash (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi)$,
(5) $\vdash \neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$,
(6) $\vdash (\varphi \to (\psi \to \sigma)) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi \to \sigma)$,
(7) $\vdash \bot \leftrightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)$.

Demonstração.

1. $$\dfrac{\dfrac{[\varphi]^1}{\psi \to \varphi}\to I}{\varphi \to (\psi \to \varphi)}\to I_1$$

2. $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]^2 \quad [\neg\varphi]^1}{\bot}\to E}{\psi}\bot}{\neg\varphi \to \psi}\to I_1}{\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)}\to I_2$$

3. $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]^1 \quad [\varphi \to \psi]^3}{\psi}\to E \qquad [\psi \to \sigma]^2}{\sigma}\to E}{\varphi \to \sigma}\to I_1}{(\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma)}\to I_2}{(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma))}\to I_3$$

4. Para uma direção, substitua σ por $\bot$ em 3, então $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$.

Reciprocamente:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\psi]^1 \quad [\neg\psi\to\neg\varphi]^3}{\neg\varphi}\to E \qquad [\varphi]^2}{\bot}\to E}{\psi}\,\mathrm{RAA}_1}{\varphi\to\psi}\to I_2}{(\neg\psi\to\neg\varphi)\to(\varphi\to\psi)}\to I_3$$

Portanto agora temos $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ (\varphi\to\psi)\to(\neg\psi\to\neg\varphi)\end{matrix}\qquad \begin{matrix}\mathcal{D}'\\ (\neg\psi\to\neg\varphi)\to(\varphi\to\psi)\end{matrix}}{(\varphi\to\psi)\leftrightarrow(\neg\psi\to\neg\varphi)}$

5. Já demonstramos $\varphi\to\neg\neg\varphi$ como um exemplo. Reciprocamente:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]^1 \quad [\neg\neg\varphi]^2}{\bot}\to E}{\varphi}\,\mathrm{RAA}_1}{\neg\neg\varphi\to\varphi}\to I_2$$

O resultado agora segue imediatamente. Os números 6 e 7 são deixados para o leitor. □

O sistema delineado nesta seção é chamado de "cálculo de dedução natural" por uma boa razão. Isto é: sua forma de fazer inferências corresponde ao raciocínio que usamos intuitivamente. As regras apresentam meios pelos quais se pode quebrar fórmulas, ou juntá-las. Uma derivação então consiste de uma manipulação habilidosa das regras, cujo uso é usualmente sugerido pela forma da fórmula que desejamos provar.

Discutiremos um exemplo de modo a ilustrar a estratégia geral de construção de derivações. Vamos considerar a recíproca do nosso exemplo anterior **III**.

Para provar $(\varphi\wedge\psi\to\sigma)\to(\varphi\to(\psi\to\sigma))$ existe apenas um único passo inicial: supor $\varphi\wedge\psi\to\sigma$ e tentar derivar $\varphi\to(\psi\to\sigma)$. Agora podemos olhar para a suposição ou para o resultado desejado. Vamos considerar a última opção inicialmente: para provar $\varphi\to(\psi\to\sigma)$, devemos supor φ e derivar $\psi\to\sigma$, mas para esse último caso devemos supor ψ e derivar σ.

Logo, podemos supor ao mesmo tempo $\varphi\wedge\psi\to\sigma$, φ e ψ. Agora o procedimento sugere a si próprio: derive $\varphi\wedge\psi$ a partir de φ e ψ, e σ a partir de $\varphi\wedge\psi$ e $\varphi\wedge\psi\to\sigma$.

Colocando tudo junto, obtemos a seguinte derivação:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]^2 \quad [\psi]^1}{\varphi\wedge\psi}\wedge I \qquad [\varphi\wedge\psi\to\sigma]^3}{\sigma}\to E}{\psi\to\sigma}\to I_1}{\varphi\to(\psi\to\sigma)}\to I_2}{(\varphi\wedge\psi\to\sigma)\to(\varphi\to(\psi\to\sigma))}\to I_3$$

Se tivéssemos considerado primeiro $\varphi \wedge \psi \rightarrow \sigma$, então a única maneira de seguir adiante seria adicionar $\varphi \wedge \psi$ e aplicar $\rightarrow E$. Agora $\varphi \wedge \psi$ ou permanece como uma suposição, ou é obtida a partir de uma outra coisa. Imediatamente ocorre ao leitor derivar $\varphi \wedge \psi$ a partir de φ e ψ. Mas agora ele terá que construir a derivação que obtivemos acima.

Por mais simples que esse exemplo pareça, existem complicações. Em particular a regra de reductio ad absurdum não é nem de perto tão natural quanto as outras regras. Seu uso tem que ser aprendido praticando-se; além disso uma certa habilidade para perceber a distinção entre o *construtivo* e o *não-construtivo* será útil quando se vai tentar decidir quando usá-la.

Finalmente, recordamos que $\top$ é uma abreviação de $\neg\bot$ (i.e. $\bot \rightarrow \bot$).

Exercícios

1. Demonstre que as seguintes proposições são deriváveis.

$$\begin{array}{llll} (a) & \varphi \rightarrow \varphi, & (d) & (\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow \neg(\varphi \wedge \neg\psi), \\ (b) & \bot \rightarrow \varphi, & (e) & (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi), \\ (c) & \neg(\varphi \wedge \neg\varphi), & (f) & \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi \wedge \psi). \end{array}$$

2. Idem para

$$\begin{array}{ll} (a) & (\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \neg\varphi, \\ (b) & (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)) \leftrightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma)), \\ (c) & (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi, \\ (d) & (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma)). \end{array}$$

3. Demonstre que

$$\begin{array}{llll} (a) & \varphi \vdash \neg(\neg\varphi \wedge \psi), & (d) & \vdash \varphi \Rightarrow \vdash \psi \rightarrow \varphi, \\ (b) & \neg(\varphi \wedge \neg\psi), \varphi \vdash \psi, & (e) & \neg\varphi \vdash \varphi \rightarrow \psi. \\ (c) & \neg\varphi \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow \neg\varphi, & & \end{array}$$

4. Demonstre que $\vdash ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)))$,
$\vdash ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$.

5. Demonstre que $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \cup \Delta \vdash \varphi$,
$\Gamma \vdash \varphi; \Delta, \varphi \vdash \psi \Rightarrow \Gamma \cup \Delta \vdash \psi$.

6. Dê uma definição recursiva da função Hyp que associa a cada derivação $\mathcal{D}$ seu conjunto de hipóteses $Hyp(\mathcal{D})$ (trata-se de uma noção mais estrita que a noção apresentada na definição 1.4.2, pois esta refere-se ao menor conjunto de hipóteses, i.e. hipóteses sem 'lixo').

7. Análogo ao operador de substituição para proposições definimos um operador de substituição para derivações. $\mathcal{D}[\varphi/p]$ é obtida substituindo-se cada ocorrência de p em cada proposição em $\mathcal{D}$ por φ. Dê uma definição recursiva de $\mathcal{D}[\varphi/p]$. Demonstre que $\mathcal{D}[\varphi/p]$ é uma derivação se $\mathcal{D}$ é uma derivação, e que $\Gamma \vdash \sigma \Rightarrow \Gamma[\varphi/p] \vdash \sigma[\varphi/p]$. Observação: em muitos casos se necessita de noções mais refinadas de substituição, mas esta nos será suficiente.

8. (**Teorema da Substituição**) $\vdash (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) \to (\psi[\varphi_1/p] \leftrightarrow \psi[\varphi_2/p])$.

   Sugestão: use indução sobre ψ; o teorema também seguirá como conseqüência do Teorema da Substituição para $\models$, uma vez que tenhamos estabelecido o Teorema da Completude.

9. O *tamanho*, $t(\mathcal{D})$, de uma derivação é o número de ocorrências de proposições em $\mathcal{D}$. Dê uma definição indutiva de $t(\mathcal{D})$. Demonstre que se pode provar propriedades de derivações por indução sobre o seu tamanho.

10. Dê uma definição recursiva da relação $\vdash$ (use a lista do Lema 1.4.3), demonstre que essa relação coincide com a relação derivada da Definição 1.4.2. Conclua que cada Γ com $\Gamma \vdash \varphi$ contém um Δ finito, tal que $\Delta \vdash \varphi$ também.

11. Demonstre que

    (a) $\vdash \top$,
    (b) $\vdash \varphi \Leftrightarrow \vdash \varphi \leftrightarrow \top$,
    (c) $\vdash \neg\varphi \Leftrightarrow \vdash \varphi \leftrightarrow \bot$.

1.5 Completude

Nesta seção demonstraremos que "veracidade" e "derivabilidade" coincidem, mais precisamente: as relações "$\models$" e "$\vdash$" coincidem. A parte fácil da afirmação é: "derivabilidade" implica em "veracidade"; pois derivabilidade é estabelecida pela existência de uma derivação. Essa última noção é definida indutivamente, portanto podemos demonstrar a implicação por indução sobre a derivação.

Lema 1.5.1 (Corretude) $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$.

Demonstração. Como, pela definição 1.4.2, $\Gamma \vdash \varphi$ sse existe uma derivação $\mathcal{D}$ com todas as hipóteses em Γ, é suficiente mostrar que: para cada derivação $\mathcal{D}$ com conclusão φ e hipóteses em Γ temos $\Gamma \models \varphi$. Agora usamos indução sobre $\mathcal{D}$.

(*caso base*) Se $\mathcal{D}$ tem um elemento, então evidentemente $\varphi \in \Gamma$. O leitor facilmente vê que $\Gamma \models \varphi$.

$(\wedge I)$ Hipótese da indução: $\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi\end{array}$ e $\begin{array}{c}\mathcal{D}'\\ \varphi'\end{array}$ são derivações e para cada Γ, Γ' contendo as hipóteses de $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\Gamma \models \varphi$, $\Gamma' \models \varphi'$.

Agora suponha que Γ'' contém as hipóteses de $\dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{D} & \mathcal{D}'\\ \varphi & \varphi'\end{array}}{\varphi \wedge \varphi'}$

Escolhendo Γ e Γ' de tal forma que sejam exatamente o conjunto de hipóteses de $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, vemos que $\Gamma'' \supseteq \Gamma \cup \Gamma'$.

Logo $\Gamma'' \models \varphi$ e $\Gamma'' \models \varphi'$. Seja $[\![\psi]\!]_v = 1$ para toda $\psi \in \Gamma''$, então $[\![\varphi]\!]_v = [\![\varphi']\!]_v = 1$, portanto $[\![\varphi \wedge \varphi']\!]_v = 1$. Isso mostra que $\Gamma'' \models \varphi \wedge \varphi'$.

($\wedge E$) Hipótese da indução: para qualquer Γ contendo as hipóteses de $\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi\wedge\psi\end{array}$ temos $\Gamma \models \varphi\wedge\psi$. Considere um Γ contendo todas as hipóteses de $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi\wedge\psi\end{array}}{\varphi}$ e $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi\wedge\psi\end{array}}{\psi}$. Deixo ao leitor a demonstração de que $\Gamma \models \varphi$ e $\Gamma \models \psi$.

($\rightarrow I$) Hipótese da indução: para qualquer Γ contendo todas as hipóteses de $\begin{array}{c}\varphi\\ \mathcal{D}\\ \psi\end{array}$, $\Gamma \models \psi$. Suponha que Γ' contém todas as hipóteses de $\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \mathcal{D}\\ \psi\end{array}}{\varphi\rightarrow\psi}$. Agora $\Gamma' \cup \{\varphi\}$ contém todas as hipóteses de $\begin{array}{c}\varphi\\ \mathcal{D}\\ \psi\end{array}$, logo se $[\![\varphi]\!] = 1$ e $[\![\chi]\!] = 1$ para toda χ em Γ', então $[\![\psi]\!] = 1$. Portanto a tabela-verdade de $\rightarrow$ nos diz que $[\![\varphi\rightarrow\psi]\!] = 1$ se todas as proposições em Γ' têm valor 1. Logo $\Gamma' \models \varphi\rightarrow\psi$.

($\rightarrow E$) Um exercício para o leitor.

($\perp$) Hipótese da indução: para cada Γ contendo todas as hipóteses de $\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \perp\end{array}$, $\Gamma \models \perp$. Como $[\![\perp]\!] = 0$ para todas as valorações, não existe valoração tal que $[\![\psi]\!] = 1$ para toda $\psi \in \Gamma$. Suponha que Γ' contém todas as hipóteses de $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \perp\end{array}}{\varphi}$ e suponha que $\Gamma' \not\models \varphi$, então $[\![\psi]\!] = 1$ para toda $\psi \in \Gamma'$ e $[\![\varphi]\!] = 0$ para alguma valoração. Como Γ' contém todas as hipóteses da primeira derivação temos uma contradição.

(RAA) Hipótese da indução: para cada Γ contendo todas as hipóteses de $\begin{array}{c}\neg\varphi\\ \mathcal{D}\\ \perp\end{array}$, temos $\Gamma \models \perp$. Suponha que Γ' contém todas as hipóteses de $\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]\\ \mathcal{D}\\ \perp\end{array}}{\varphi}$ e suponha que $\Gamma' \not\models \varphi$, então existe uma valoração tal que $[\![\psi]\!] = 1$ para toda $\psi \in \Gamma'$ e $[\![\varphi]\!] = 0$, i.e. $[\![\neg\varphi]\!] = 1$. Mas $\Gamma'' = \Gamma' \cup \{\neg\varphi\}$ contém todas as hipóteses da primeira derivação e $[\![\psi]\!] = 1$ para toda $\psi \in \Gamma''$. Isto é impossível pois $\Gamma'' \models \perp$. Logo $\Gamma' \models \varphi$. $\square$

Esse lema pode não parecer impressionante, mas ele nos permite mostrar que algumas proposições não são teoremas, através simplesmente de uma demonstração de que elas não são tautologias. Sem esse lema isso teria sido uma tarefa muito trabalhosa. Teríamos que mostrar que não existe derivação (sem hipóteses) da proposição dada. Em geral isso requer profunda percepção sobre a natureza das derivações, o que está além das nossas possibilidades no momento.

Exemplos. $\nvdash p_0, \nvdash (\varphi \to \psi) \to \varphi \wedge \psi$.

No primeiro exemplo, tome a valoração constante 0. $[\![p_0]\!] = 0$, logo $\not\models p_0$ e portanto $\nvdash p_0$. No segundo exemplo nos deparamos com uma meta-proposição (um *esquema*); estritamente falando ela não pode ser derivável (apenas proposições *reais* podem). Por $\vdash (\varphi \to \psi) \to \varphi \wedge \psi$ queremos dizer que todas as proposições daquela forma (obtidas substituindo-se φ e ψ por proposições reais, por exemplo) são deriváveis. Para refutá-la precisamos apenas de uma instância que não é derivável. Tome $\varphi = \psi = p_0$. Para demonstrar a recíproca do enunciado do Lema 1.5.1 precisamos de algumas novas noções. A primeira tem uma história impressionante; trata-se da noção de *ausência de contradição* ou *consistência*. Foi transformada na pedra angular dos fundamentos da matemática por Hilbert.

Definição 1.5.2 Um conjunto Γ de proposições é *consistente* se $\Gamma \nvdash \perp$.

Em palavras: não se pode derivar uma contradição a partir de Γ. A consistência de Γ pode ser expressa de várias outras formas:

Lema 1.5.3 *As seguintes condições são equivalentes:*

(i) Γ *é consistente,*

(ii) *Para nenhuma* φ, $\Gamma \vdash \varphi$ *e* $\Gamma \vdash \neg\varphi$,

(iii) *Existe pelo menos uma* φ *tal que* $\Gamma \nvdash \varphi$.

Demonstração. Vamos chamar Γ de *inconsistente* se $\Gamma \vdash \perp$, então podemos também provar a equivalência de

(iv) Γ é inconsistente,

(v) Existe uma φ tal que $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$,

(vi) $\Gamma \vdash \varphi$ para toda φ.

(iv) $\Rightarrow$ (vi) Suponha que $\Gamma \vdash \perp$, i.e. existe uma derivação $\mathcal{D}$ com conclusão $\perp$ e hipóteses em Γ. Pela regra ($\perp$) podemos adicionar uma inferência, $\perp \vdash \varphi$, a $\mathcal{D}$, de tal forma que $\Gamma \vdash \varphi$. Isso se verifica para todo φ.

(vi) $\Rightarrow$ (v) Trivial.

(v) $\Rightarrow$ (iv) Suponha que $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$. A partir das duas derivações associadas a essas hipóteses, obtém-se uma derivação para $\Gamma \vdash \perp$ usando a regra ($\to E$). $\square$

A cláusula (vi) nos diz por que razão conjuntos inconsistentes (ou teorias inconsistentes) são destituídas de interesse matemático. Pois, se tudo é derivável, não podemos distinguir entre "boas" e "más" proposições. A matemática tenta encontrar distinções, não borrá-las.

Na prática matemática procura-se estabelecer consistência exibindo-se um modelo (pense na consistência da negação do quinto postulado de Euclides e as geometrias não-euclideanas). No contexto da lógica proposicional isso significa procurar uma valoração apropriada.

Lema 1.5.4 *Se existe uma valoração tal que* $[\![\psi]\!]_v = 1$ *para toda* $\psi \in \Gamma$, *então* Γ *é consistente.*

Demonstração. Suponha que $\Gamma \vdash \perp$, então pelo Lema 1.5.1 $\Gamma \models \perp$, logo para qualquer valoração v $[\![(\psi)]\!]_v = 1$ para toda $\psi \in \Gamma \Rightarrow [\![\perp]\!]_v = 1$. Como $[\![\perp]\!]_v = 0$ para todas as valorações, não existe valoração com $[\![\psi]\!]_v = 1$ para toda $\psi \in \Gamma$. Contradição. Portanto Γ é consistente. □

Exemplos.

1. $\{p_0, \neg p_1, p_1 \to p_2\}$ é consistente. Uma valoração apropriada é uma que satisfaz $[\![p_0[\![= 1$, $[\![p_1]\!] = 0$.

2. $\{p_0, p_1, \ldots\}$ é consistente. Escolha a valoração constante 1.

A cláusula (v) do Lema 1.5.3 nos diz que $\Gamma \cup \{\varphi, \neg\varphi\}$ é inconsistente. Agora como poderia $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ ser inconsistente? Parece plausível imputar isso à derivabilidade de φ. O próximo lema confirma isto.

Lema 1.5.5 (a) $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *é inconsistente* $\Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$,

(b) $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *é inconsistente* $\Rightarrow \Gamma \vdash \neg\varphi$.

Demonstração. As suposições de (a) e de (b) permitem que se construam as duas derivações abaixo: ambas com conclusão $\perp$. Aplicando (RAA), e ($\to I$), obtemos derivações com hipóteses em Γ, de φ, e de $\neg\varphi$, respectivamente.

$$\begin{array}{ccc} [\neg\varphi] & \qquad & [\varphi] \\ \mathcal{D} & & \mathcal{D}' \\ \dfrac{\perp}{\varphi}\, RAA & & \dfrac{\perp}{\neg\varphi} \to I \end{array}$$

□

Definição 1.5.6 Um conjunto Γ é *maximamente consistente* sse

(a) Γ é consistente,

(b) $\Gamma \subseteq \Gamma'$ e Γ' consistente $\Rightarrow \Gamma = \Gamma'$.

Observação. Poder-se-ia substituir (b) por (b′): se Γ é um subconjunto próprio de Γ', então Γ' é inconsistente. I.e., simplesmente acrescentando mais uma proposição, o conjunto torna-se inconsistente.

Conjuntos maximamente consistentes têm um papel importante em lógica. Mostraremos que existem muitos deles.

Aqui vai um exemplo: $\Gamma = \{\varphi \mid [\![\varphi]\!] = 1\}$ para uma valoração fixa. Pelo Lema 1.5.4 Γ é consistente. Considere um conjunto consistente Γ' tal que $\Gamma \subseteq \Gamma'$. Agora suponha que $\psi \in \Gamma'$ e que $[\![\psi]\!] = 0$, então $[\![\neg\psi]\!] = 1$, e portanto $\neg\psi \in \Gamma$.

Porém como $\Gamma \subseteq \Gamma'$ isso implica que Γ' é inconsistente. Contradição. Por conseguinte $[\![\psi]\!] = 1$ para toda $\psi \in \Gamma'$, logo por definição $\Gamma = \Gamma'$. Da demonstração do Lema 1.5.11 segue que esse é basicamente o único tipo de conjunto maximamente consistente que podemos esperar.

O lema fundamental a seguir é demonstrado diretamente. O leitor pode reconhecer nele um análogo do Lema da Existência do Ideal Máximo da teoria dos anéis (ou o Teorema do Ideal Primo Booleano), que é usualmente demonstrado por uma aplicação do Lema de Zorn.

Lema 1.5.7 *Cada conjunto consistente Γ está contido em um conjunto maximamente consistente Γ^*.*

Demonstração. Existem um número contável de proposições, portanto suponha que temos uma lista $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ de todas as proposições (cf. Exercício 5). Definimos uma seqüência não-decrescente de conjuntos Γ_i tal que a união desses conjuntos é maximamente consistente.

$$\begin{array}{lcl} \Gamma_0 & = & \Gamma, \\ \Gamma_{n+1} & = & \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \text{ se } \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \text{ é consistente,} \\ \Gamma_n \text{ caso contrário.} \end{cases} \\ \Gamma^* & = & \bigcup\{\Gamma_n \mid n \geq 0\}. \end{array}$$

(a) Γ_n é consistente para todo n.

Imediato, por indução sobre n.

(b) Γ^* é consistente.

Suponha que $\Gamma^* \vdash \perp$ então, pela definição de $\perp$ existe uma derivação $\mathcal{D}$ de $\perp$ com hipóteses em Γ^*; $\mathcal{D}$ tem um número finito de hipóteses $\psi_0, \ldots, \psi_k$. Como $\Gamma^* = \bigcup\{\Gamma_n \mid n \geq 0\}$, temos para cada $i \leq k$ $\psi_k \in \Gamma_{n_i}$ para algum n_i. Suponha que n seja $\max\{n_i \mid i \leq k\}$, então $\psi_0, \ldots, \psi_k \in \Gamma_n$ e portanto $\Gamma_n \vdash \perp$. Mas Γ é consistente. Contradição.

(c) Γ^* é maximamente consistente. Suponha que $\Gamma^* \subseteq \Delta$ e que Δ seja consistente. Se $\psi \in \Delta$, então $\psi = \varphi_m$ para algum m. Como $\Gamma_m \subseteq \Gamma^* \subseteq \Delta$ e Δ é consistente, $\Gamma_m \cup \{\varphi_m\}$ é consistente. Por conseguinte $\Gamma_{m+1} = \Gamma_m \cup \{\varphi_m\}$, i.e. $\varphi_m \in \Gamma_{m+1} \subseteq \Gamma^*$. Isso mostra que $\Gamma^* = \Delta$. □

Lema 1.5.8 *Se Γ é maximamente consistente, então Γ é fechado sob derivabilidade (i.e. $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in \Gamma$).*

Demonstração. Suponha que $\Gamma \vdash \varphi$ e que $\varphi \notin \Gamma$. Então $\Gamma \cup \{\varphi\}$ deve ser inconsistente. Portanto $\Gamma \vdash \neg\varphi$, logo Γ é inconsistente. Contradição. □

Lema 1.5.9 *Suponha que Γ seja maximamente consistente; então*

(a) *para toda φ ou $\varphi \in \Gamma$, ou $\neg\varphi \in \Gamma$,*

(b) *para todas φ, ψ $\varphi \to \psi \in \Gamma \Leftrightarrow (\varphi \in \Gamma \Rightarrow \psi \in \Gamma)$.*

Demonstração. (a) Sabemos que não é possível que ambas φ e $\neg\varphi$ pertençam a Γ. Considere $\Gamma' = \Gamma \cup \{\varphi\}$. Se Γ' é inconsistente, então, por 1.5.5, 1.5.8, $\neg\varphi \in \Gamma$. Se Γ' é consistente, então $\varphi \in \Gamma$ pela maximalidade de Γ.

(b) Suponha que $\varphi \to \psi \in \Gamma$ e que $\varphi \in \Gamma$. Vamos mostrar que: $\psi \in \Gamma$. Como $\varphi, \varphi \to \psi \in \Gamma$ e considerando que Γ é fechado sob derivabilidade (Lema 1.5.8), obtemos que $\psi \in \Gamma$ por $\to E$.

Reciprocamente: Suponha que $\varphi \in \Gamma$ implica em $\psi \in \Gamma$. Se $\varphi \in \Gamma$ então obviamente $\Gamma \vdash \psi$, logo $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. Se $\varphi \notin \Gamma$, então $\neg\varphi \in \Gamma$, e portanto $\Gamma \vdash \neg\varphi$. Por conseguinte $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. $\square$

Note que obtemos automaticamente o seguinte:

Corolário 1.5.10 *Se Γ é maximamente consistente, então $\varphi \in \Gamma \Leftrightarrow \neg\varphi \notin \Gamma$, e $\neg\varphi \in \Gamma \Leftrightarrow \varphi \notin \Gamma$.*

Lema 1.5.11 *Se Γ é consistente, então existe uma valoração tal que $[\![\psi]\!] = 1$ para toda $\psi \in \Gamma$.*

Demonstração. (a) Por 1.5.7 Γ está contido em um Γ^* maximamente consistente.

(b) Defina $v(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } p_i \in \Gamma^* \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$ e estenda v para a valoração $[\![\ ]\!]_v$.
Afirmação: $[\![\varphi]\!] = 1 \Leftrightarrow \varphi \in \Gamma^*$. Use indução sobre φ.

1. Para φ atômica a afirmação se verifica por definição.
2. $\varphi = \psi \wedge \sigma$. $[\![\varphi]\!]_v = 1 \Leftrightarrow [\![\psi]\!]_v = [\![\sigma]\!]_v = 1 \Leftrightarrow$ (hipótese da indução) $\psi, \sigma \in \Gamma^*$ e portanto $\varphi \in \Gamma^*$. Reciprocamente, $\psi \wedge \sigma \in \Gamma^* \Leftrightarrow \psi, \sigma \in \Gamma^*$ (1.5.8). O restante segue da hipótese da indução.
3. $\varphi = \psi \to \sigma$. $[\![(\psi \to \sigma)]\!]_v = 0 \Leftrightarrow [\![\psi]\!]_v = 1$ e $[\![\sigma]\!]_v = 0 \Leftrightarrow$ (hipótese da indução) $\psi \in \Gamma^*$ e $\sigma \notin \Gamma^* \Leftrightarrow \psi \to \sigma \notin \Gamma^*$ (por 1.5.9).

(c) Como $\Gamma \subseteq \Gamma^*$ temos $[\![\psi]\!]_v = 1$ para toda $\psi \in \Gamma$. $\square$

Corolário 1.5.12 $\Gamma \nvdash \varphi \Leftrightarrow$ *existe uma valoração tal que $[\![\psi]\!] = 1$ para toda $\psi \in \Gamma$ e $[\![\varphi]\!] = 0$.*

Demonstração. $\Gamma \nvdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ consistente $\Leftrightarrow$ existe uma valoração tal que $[\![\psi]\!] = 1$ para toda $\psi \in \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, ou $[\![\psi]\!] = 1$ para toda $\psi \in \Gamma$ e $[\![\psi]\!] = 0$. $\square$

Teorema 1.5.13 (Teorema da Completude) $\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \models \varphi$.

Demonstração. $\Gamma \nvdash \varphi \Rightarrow \Gamma \not\models \varphi$ por 1.5.12. A recíproca contrária se verifica por 1.5.1. $\square$

Em particular temos $\vdash \varphi \Leftrightarrow \models \varphi$, logo o conjunto de teoremas é exatamente o conjunto de tautologias.

O Teorema da Completude nos diz que a tarefa tediosa de fazer derivações pode ser substituída pela tarefa (igualmente tediosa, porém automática) de checar tautologias. Em princípio isto simplifica consideravelmente a busca por teoremas; se, por um lado, para se construir derivações é preciso ser (razoavelmente) inteligente, por outro lado, para se montar tabelas-verdade é necessário se ter perseverança.

Para teorias lógicas às vezes se leva em conta uma outra noção de completude: uma conjunto Γ é chamado de *completo* se para cada φ, $\Gamma \vdash \varphi$ ou $\Gamma \vdash \neg\varphi$. Essa noção é intimamente relacionada a "maximamente consistente". Do Exercício 6 segue que $Cons(\Gamma) = \{\sigma \mid \Gamma \vdash \sigma\}$ (o *conjunto de conseqüências de* Γ) é maximamente consistente se Γ é um conjunto completo. A recíproca também se verifica (cf. Exercício 10). A própria lógica proposicional (i.e. o caso em que $\Gamma =$) não é completa nesse sentido, e.g. $\nvdash p_0$ e $\nvdash \neg p_0$.

Existe uma outra noção importante que é tradicionalmente levada em conta em lógica: *decidibilidade*. A lógica proposicional é decidível no seguinte sentido: existe um procedimento efetivo para verificar a derivabilidade de proposições φ. Colocando de outra forma: existe um algoritmo que para cada φ testa se $\vdash \varphi$. O algoritmo é simples: escreva a tabela-verdade completa para φ e verifique se a última coluna contém apenas 1's. Se for o caso, então $\models \varphi$ e, pelo Teorema da Completude, $\vdash \varphi$. Caso contrário, então $\not\models \varphi$ e portanto $\nvdash \varphi$. Esse certamente não é o melhor algoritmo, pode-se encontrar outros mais econômicos. Existem também algoritmos que dão mais informação, e.g. eles não apenas testam $\vdash \varphi$, mas também produzem uma derivação, se é que existe uma. Tais algoritmos, entretanto, requerem uma análise mais profunda de derivações. Isso está fora do escopo deste livro.

Há um aspecto do Teorema da Completude que desejamos discutir agora. Não vem como uma surpresa o fato de que verdade segue de derivabilidade. Afinal de contas começamos com uma noção combinatorial, definida indutivamente, e terminamos com 'ser verdadeiro para todas as valorações'. Uma demonstração indutiva simples resolve o problema.

Para a recíproca a situação é totalmente diferente. Por definição $\Gamma \models \varphi$ significa que $[\![\varphi]\!]_v = 1$ para todas as valorações v que tornam verdadeiras as proposições de Γ. Portanto sabemos algo sobre o comportamento de *todas* as valorações com respeito a Γ e φ. Podemos ter esperança de extrair desse número infinito de fatos conjuntistas a informação finita, concreta, necessária para construir uma derivação para $\Gamma \vdash \varphi$? Evidentemente os fatos disponíveis não nos dão muita coisa para prosseguir. Vamos portanto simplificar um pouco as coisas diminuindo o tamanho do conjunto Γ; afinal de contas usamos apenas um número finito de fórmulas de Γ em uma derivação, portanto vamos supor que aquelas fórmulas $\psi_1, \ldots, \psi_n$ são dadas. Agora podemos esperar maior sucesso, pois apenas um número finito de átomos estão envolvidos, e por isso podemos considerar uma "parte" finita do número infinito de valorações que têm algum papel a desempenhar. Isso quer dizer que apenas as restrições das valorações ao conjunto dos átomos ocorrendo em $\psi_1, \ldots \psi_n, \varphi$ são relevantes. Vamos simplificar o problema ainda mais. Sabemos que $\psi_1, \ldots \psi_n \vdash \varphi$ ($\psi_1, \ldots \psi_n \models \varphi$) pode ser substituído por $\vdash \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \to \varphi$ ($\models \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \to \varphi$), baseando-se nas regras de derivação (a definição de valoração). Daí nos vem a pergunta: dada a tabela-verdade para uma tautologia σ, podemos efetivamente encontrar uma derivação para σ?

Essa questão não é respondida pelo Teorema da Completude, pois nossa demonstração não é efetiva (pelo menos não o é à primeira vista). A questão foi respondida positivamente, e.g. por Post, Bernays e Kalmar (cf. *Kleene* IV, §29) e foi facilmente tratada por meio das técnicas de Gentzen, ou por tableaux semânticos. Vamos apenas esquematizar um método de prova: podemos efetivamente encontrar uma forma normal conjuntiva σ^* para σ tal que $\vdash \sigma \leftrightarrow \sigma^*$.

Demonstra-se facilmente que σ^* é uma tautologia se e somente se cada operando da conjunção contém um átomo e sua negação, ou $\neg\bot$, e junta-se todos para obter uma derivação de σ^*, que imediatamente resulta numa derivação de σ.

Exercícios

1. Verifique quais dos seguintes conjuntos são consistentes
   (a) $\{\neg p_1 \wedge p_2 \to p_0,\ p_1 \to (\neg p_1 \to p_2),\ p_0 \leftrightarrow \neg p_2\}$,
   (b) $\{p_0 \to p_1,\ p_1 \to p_2,\ p_2 \to p_3,\ p_3 \to \neg p_0\}$,
   (c) $\{p_0 \to p_1,\ p_0 \wedge p_2 \to p_1 \wedge p_3,\ p_0 \wedge p_2 \wedge p_4 \to p_1 \wedge p_3 \wedge p_5,\ \ldots\}$.

2. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:
   (a) $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ é consistente.
   (b) $\nvdash \neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$.
   (c) $\nvdash \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_{n-1} \to \neg\varphi_n$.

3. φ é *independente* de Γ se $\Gamma \nvdash \varphi$ e $\Gamma \nvdash \neg\varphi$. Demonstre que: $p_1 \to p_2$ é independente de $\{p_1 \leftrightarrow p_0 \wedge \neg p_2, p_2 \to p_0\}$.

4. Um conjunto Γ é *independente* se para cada $\varphi \in \Gamma$ $\Gamma - \{\varphi\} \nvdash \varphi$.

   (a) Demonstre que cada conjunto finito Γ tem um subconjunto independente Δ tal que $\Delta \vdash \varphi$ para todo $\varphi \in \Gamma$.
   (b) Seja $\Gamma = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$. Encontre um conjunto equivalente $\Gamma' = \{\psi_0, \psi_1, \ldots\}$ (i.e. $\Gamma \vdash \psi_i$ e $\Gamma \vdash \varphi_i$ para todo i) tal que $\vdash \psi_{n+1} \to \psi_n$, mas $\nvdash \psi_n \to \psi_{n+1}$. Note que Γ' pode ser finito.
   (c) Considere um conjunto infinito Γ' como o do item (b). Defina $\sigma_0 = \psi_0$, $\sigma_{n+1} = \psi_n \to \psi_{n+1}$. Demonstre que $\Delta = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots\}$ é independente e equivalente a Γ'.
   (d) Demonstre que cada conjunto Γ é equivalente a um conjunto independente Δ.
   (e) Demonstre que Δ não precisa ser um subconjunto de Γ (considere $\{p_0, p_0 \wedge p_1, p_0 \wedge p_1 \wedge p_2, \ldots\}$).

5. Encontre uma maneira efetiva de enumerar todas as proposições (sugestão: considere conjuntos Γ_n de todas as proposições de posto $\leq n$ com átomos vindos de $p_0, \ldots, p_n$).

6. Demonstre que um conjunto consistente Γ é maximamente consistente se $\varphi \in \Gamma$ ou $\neg\varphi \in \Gamma$ para todo φ.

7. Demonstre que $\{p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ é completo.

8. (*Teorema da Compaccidade*). Demonstre que: existe um v tal que $[\![\psi]\!]_v = 1$ para toda $\psi \in \Gamma \Leftrightarrow$ para cada subconjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$ existe um v tal que $[\![\sigma]\!]_v = 1$ para toda $\sigma \in \Delta$.

   Formulada nos termos do Exercício 13 da seção 1.3: $[\![\Gamma]\!] \neq \emptyset$ se $[\![\Delta]\!] \neq \emptyset$ para todo Δ finito tal que $\Delta \subseteq \Gamma$.

9. Considere um conjunto infinito $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots\}$. Se para cada valoração existe um n tal que $[\![\varphi_n]\!] = 1$, então existe um m tal que $\vdash \varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_m$. (Sugestão: considere as negações $\neg\varphi_1$, $\neg\varphi_2$, …, e aplique o Exercício 8).

10. Demonstre que: $\text{Cons}(\Gamma) - \{\sigma \mid \Gamma \vdash \sigma\}$ é um conjunto maximamente consistente $\Leftrightarrow \Gamma$ é completo.

11. Demonstre que: Γ é maximamente consistente $\Leftrightarrow$ existe uma única valoração tal que $[\![\psi]\!] = 1$ para toda $\psi \in \Gamma$, onde Γ é uma teoria, i.e. Γ é fechado sob $\vdash$ ($\Gamma \vdash \sigma \Rightarrow \sigma \in \Gamma$).

12. Seja φ uma proposição contendo o átomo p. Por conveniência escrevemos $\varphi(\sigma)$ para designar $\varphi[\sigma/p]$. Tal qual anteriormente, abreviamos $\neg\bot$ por $\top$.

    Demonstre que: (*i*) $\varphi(\top) \vdash \varphi(\top) \leftrightarrow \top$ e $\varphi(\top) \vdash \varphi(\varphi(\top))$.
    (*ii*) $\neg\varphi(\top) \vdash \varphi(\top) \leftrightarrow \bot$,
    $\varphi(p), \neg\varphi(\top) \vdash p \leftrightarrow \bot$,
    $\varphi(p), \neg\varphi(\top) \vdash \varphi(\varphi(\top))$.
    (*iii*) $\varphi(p) \vdash \varphi(\varphi(\top))$.

13. Se os átomos p e q não ocorrem em ψ e φ respectivamente, então

    $\models \varphi(p) \rightarrow \psi \Rightarrow \models \varphi(\sigma) \rightarrow \psi$ para toda σ,

    $\models \varphi \rightarrow \psi(q) \Rightarrow \models \varphi \rightarrow \psi(q)$ para toda σ.

14. Suponha que $\vdash \varphi \rightarrow \psi$. Chamamos σ de *interpolante* se $\vdash \varphi \rightarrow \sigma$ e $\vdash \sigma \rightarrow \psi$, e além disso σ contém apenas átomos comuns a φ e ψ. Considere $\varphi(p, r)$, $\psi(r, q)$ com todos os átomos à mostra. Demonstre que $\varphi(\varphi(\top, r), r)$ é um interpolante (use os Exercícios 12, 13).

15. Demonstre o *Teorema da Interpolação* (Craig): Para qualquer φ, ψ com $\vdash \varphi \rightarrow \psi$ existe um interpolante (faça repetidamente o procedimento do Exercício 13).

1.6 Os conectivos que faltam

A linguagem da seção 1.4 continha apenas os conectivos $\wedge$, $\rightarrow$ e $\bot$. Nós já sabemos que, do ponto de vista semântico, essa linguagem é suficientemente rica, ou seja, os conectivos que faltam podem ser definidos em função dos que dispomos. Na verdade já usamos, nas seções precedentes, a negação como uma noção definida.

É uma questão de prática matemática segura se introduzir novas noções se seu uso simplifica nosso trabalho, e se elas codificam prática informal corrente. Isso, claramente, é uma razão para se introduzir $\neg$, $\leftrightarrow$ e $\vee$.

Agora existem duas maneiras de proceder: pode-se introduzir os novos conectivos como abreviações (de proposições complicadas), ou pode-se enriquecer a linguagem adicionando-se de fato os conectivos ao alfabeto, e fornecendo-se as respectivas regras de derivação.

O primeiro procedimento foi adotado acima; trata-se de procedimento completamente inofensivo, como por exemplo, a cada vez que se lê $\varphi \leftrightarrow \psi$ deve-se substituir por $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$. Portanto não é nada mais que uma abreviação, introduzida por conveniência. O segundo procedimento é de natureza mais teórica. A linguagem é enriquecida e o conjunto de derivações é expandido. Como conseqüência é preciso que se reveja os resultados teóricos (tal como o Teorema da Completude) obtidos para a linguagem mais simples.

Adotaremos o primeiro procedimento porém esboçaremos também a segunda abordagem.

Definição 1.6.1

$$\begin{aligned} \varphi \vee \psi &:= \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi), \\ \neg\varphi &:= \varphi \to \perp, \\ \varphi \leftrightarrow \psi &:= (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi). \end{aligned}$$

Obs.: Isso significa que as expressões acima *não* fazem parte da linguagem, mas são abreviações para certas proposições.

As propriedades de $\vee$, $\neg$ e $\leftrightarrow$ são dadas a seguir:

Lema 1.6.2
(i) $\varphi \vdash \varphi \vee \psi,\ \psi \vdash \varphi \vee \psi,$
(ii) $\Gamma, \varphi \vdash \sigma$ *e* $\Gamma, \psi \vdash \sigma \Rightarrow \Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \sigma,$
(iii) $\varphi, \neg\varphi \vdash \perp,$
(iv) $\Gamma, \varphi \vdash \perp \Rightarrow \Gamma \vdash \neg\varphi,$
(v) $\varphi \leftrightarrow \psi,\ \varphi \vdash \psi$ *e* $\varphi \leftrightarrow \psi, \psi \vdash \varphi,$
(vi) $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ *e* $\Gamma, \psi \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$

Demonstração. A única parte não trivial é (ii). Exibimos uma derivação de σ a partir de Γ e $\varphi \vee \psi$ (i.e. $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$), dadas derivações $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ de $\Gamma, \varphi \vdash \sigma$ e $\Gamma, \psi \vdash \sigma$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma, [\varphi]^1 \\ \mathcal{D}_1 \\ \sigma\end{matrix} \qquad [\neg\sigma]^3}{\perp}\to E}{\neg\varphi}\to I_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma, [\psi]^2 \\ \mathcal{D}_2 \\ \sigma\end{matrix} \qquad [\neg\sigma]^3}{\perp}\to E}{\neg\psi}\to I_2}{\neg\varphi \wedge \neg\psi}\wedge I \qquad \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)}{\perp}\to E}{\sigma}\ \mathrm{RAA}_3$$

Os casos restantes deixo ao leitor. □

Note que (i) e (ii) podem ser lidos como regras de introdução e eliminação para $\vee$, (iii) e (iv) a mesma coisa para $\neg$, (vi) e (v) também para $\leftrightarrow$.

Tais propriedades legalizam as seguintes abreviações em derivações:

$$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\vee I \qquad \dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi}\vee I \qquad\qquad \dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \begin{matrix}[\varphi] \\ \vdots \\ \sigma\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\psi] \\ \vdots \\ \sigma\end{matrix}}{\sigma}\vee E$$

$$\dfrac{\begin{matrix}[\varphi]\\ \vdots\\ \bot\end{matrix}}{\neg\varphi}\,\neg I \qquad\qquad \dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\,\neg E$$

$$\dfrac{\begin{matrix}[\varphi]\\ \vdots\\ \psi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\psi]\\ \vdots\\ \psi\end{matrix}}{\varphi\leftrightarrow\psi}\leftrightarrow I \qquad\qquad \dfrac{\varphi \quad \varphi\leftrightarrow\psi}{\psi} \quad \dfrac{\varphi \quad \varphi\leftrightarrow\psi}{\psi}\leftrightarrow E$$

Considere por exemplo a seguinte aplicação de $\vee E$

$$\dfrac{\begin{matrix}\\ \mathcal{D}_0\\ \varphi\vee\psi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\varphi]\\ \mathcal{D}_1\\ \sigma\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\psi]\\ \mathcal{D}_2\\ \sigma\end{matrix}}{\sigma}\vee E$$

Trata-se de mera abreviação para

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_0\\ \neg(\neg\varphi\wedge\neg\psi)\end{matrix} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\varphi]^1\\ \mathcal{D}_1\\ \sigma\end{matrix} \quad [\neg\sigma]^3}{\bot}}{\neg\varphi}\,1 \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\psi]^2\\ \mathcal{D}_2\\ \sigma\end{matrix} \quad [\neg\sigma]^3}{\bot}}{\neg\psi}\,2}{\neg\varphi\wedge\neg\psi}}{\bot}}{\sigma}\,3$$

O leitor está convocado a usar as abreviações acima em derivações reais, sempre que for conveniente. Via de regra, apenas $\vee I$ e $\vee E$ são de alguma importância, e leitor terá obviamente reconhecido as regras para $\neg$ e $\leftrightarrow$ como aplicações ligeiramente excêntricas de regras familiares.

Exemplos. $\vdash (\varphi\vee\psi)\vee\sigma\leftrightarrow(\varphi\vee\sigma)\wedge(\psi\vee\sigma)$.

$$\dfrac{\dfrac{(\varphi\wedge\psi)\vee\sigma \quad \dfrac{\dfrac{[\varphi\wedge\psi]^1}{\varphi}}{\varphi\vee\sigma} \quad \dfrac{[\sigma]^1}{\varphi\vee\sigma}}{\varphi\vee\sigma}\,1 \qquad \dfrac{(\varphi\wedge\psi)\vee\sigma \quad \dfrac{\dfrac{[\varphi\wedge\psi]^2}{\psi}}{\psi\vee\sigma} \quad \dfrac{[\sigma]^2}{\psi\vee\sigma}}{\psi\vee\sigma}\,2}{(\varphi\vee\sigma)\wedge(\psi\vee\sigma)} \tag{1}$$

Reciprocamente

$$\dfrac{\dfrac{(\varphi\vee\sigma)\wedge(\psi\vee\sigma)}{\varphi\vee\sigma} \qquad \dfrac{\dfrac{(\varphi\vee\sigma)\wedge(\psi\vee\sigma)}{\psi\vee\sigma} \quad \dfrac{\dfrac{[\varphi]^2 \quad [\psi]^1}{\varphi\wedge\psi}}{(\varphi\wedge\psi)\vee\sigma} \quad \dfrac{[\sigma]^1}{(\varphi\wedge\psi)\vee\sigma}}{(\varphi\wedge\psi)\vee\sigma}\,1 \qquad \dfrac{[\sigma]^2}{(\varphi\wedge\psi)\vee\sigma}}{(\varphi\wedge\psi)\vee\sigma}\,2 \tag{2}$$

Combinando (1) e (2) obtemos a seguinte derivação:

$$\dfrac{\begin{matrix}[(\varphi \wedge \psi) \vee \sigma] \\ \mathcal{D} \\ (\varphi \vee \sigma) \wedge (\psi \vee \sigma)\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[(\varphi \wedge \psi) \vee \sigma] \\ \mathcal{D}' \\ (\varphi \wedge \psi) \vee \sigma\end{matrix}}{(\varphi \wedge \psi) \vee \sigma \leftrightarrow (\varphi \vee \sigma) \wedge (\psi \vee \sigma)} \leftrightarrow I$$

$\vdash \varphi \vee \neg\varphi$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]^1}{\varphi \vee \neg\varphi}\vee I \qquad [\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^2}{\perp}\to E}{\neg\varphi}\to I_1}{\varphi \vee \neg\varphi}\vee I \qquad [\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^2}{\perp}\to E}{\varphi \vee \neg\varphi}\,\mathrm{RAA}_2$$

$\vdash (\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]^1}{\psi \to \varphi}\to I_1}{(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)}\vee I \qquad [\neg((\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi))]^2}{\perp}\to E}{\psi}\perp}{\varphi \to \psi}\to I_1}{(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)}\vee I \qquad [\neg((\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi))]^2}{\perp}\to E}{(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)}\,\mathrm{RAA}_2$$

$\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \to \neg\varphi \vee \neg\psi$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi\wedge\psi)] \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\neg\varphi\vee\neg\psi)] \quad \dfrac{[\neg\varphi]}{\neg\varphi\vee\neg\psi}}{\bot}}{\varphi} \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg(\neg\varphi\vee\neg\psi)] \quad \dfrac{[\neg\psi]}{\neg\varphi\vee\neg\psi}}{\bot}}{\psi}}{\varphi\wedge\psi}}{\bot}}{\neg\varphi\vee\neg\psi}}{\neg(\varphi\wedge\psi)\to(\neg\varphi\vee\neg\psi)}$$

$\square$

Agora vamos dar uma idéia de como seria a segunda abordagem. Adicionamos $\vee$, $\neg$ e $\leftrightarrow$ à linguagem, e consequentemente extendemos o conjunto de proposições. Em seguida adicionamos as regras para $\vee$, $\neg$ e $\leftrightarrow$ relacionadas acima ao nosso estoque de regras de derivação. Para ser mais precisos, nesse ponto deveríamos também introduzir um novo símbolo de derivabilidade, porém continuaremos a usar o já estabelecido $\vdash$ na esperança de que o leitor se lembrará que agora estamos fazendo derivações em um sistema maior. As seguintes condições se verificam:

Teorema 1.6.3
$\vdash \varphi \vee \psi \leftrightarrow \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$.
$\vdash \neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \to \bot)$.
$\vdash (\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$.

Demonstração. Observe que, pelo Lema 1.6.2, os conectivos definidos e os primitivos (estes os 'reais' conectivos) obedecem a exatamente as mesmas relações de derivabilidade (regras de derivação, se você prefere). Isso nos leva imediamente ao resultado desejado. Vamos dar um exemplo.

$\varphi \vdash \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ e $\psi \vdash \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ (1.6.2(i)), logo por $\vee E$ obtermos
$\varphi \vee \psi \vdash \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \ldots (1)$
Reciprocamente, $\varphi \vdash \varphi \vee \psi$ (por $\vee I$), logo por 1.6.2(ii)
$\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \vdash \varphi \vee \psi \ldots (2)$
Aplique $\leftrightarrow I$ a (1) e (2), então $\vdash \varphi\vee\psi \leftrightarrow \neg(\neg\varphi\wedge\neg\psi)$. O resto deixo ao leitor. $\square$

Para ver mais resultados direciono o leitor aos exercícios.

As regras para $\vee$, $\leftrightarrow$, e $\neg$ capturam de fato o significado intuitivo daqueles conectivos. Vamos considerar a disjunção: $(\vee I)$: Se sabemos que φ se verifica então certamente sabemos que $\varphi \vee \psi$ se verifica (sabemos até qual dos dois operandos se verifica). A regra $(\vee E)$ captura a idéia da "prova por casos": se sabemos que $\varphi \vee \psi$ se verifica e em cada um dos dois casos podemos concluir que σ se verifica, então podemos imediatamente concluir que σ se verifica. A disjunção intuitivamente pede uma decisão: qual dos dois operandos é dado ou pode ser suposto? Esse traço construtivo de $\vee$ fica grosseiramente (mesmo que convenientemente) apagado pela identificação de $\varphi \vee \psi$ e $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$. Essa última fórmula apenas nos diz que φ e ψ não podem estar ambas erradas, porém não diz qual das duas é correta. Para maiores informações sobre essa questão de construtividade, que tem um papel importante na demarcação da fronteira entre lógica clássica bi-valorada e lógica intuicionística efetiva, remeto o leitor ao Capítulo 5.

Note que com $\vee$ como um conectivo primitivo alguns teoremas tornam-se mais difíceis de provar. E.g. $\vdash \neg(\neg\neg\varphi \wedge \neg\varphi)$ é trivial, mas $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$ não é. A seguinte regra geral pode ser útil: passar de premissas não-efetivas (ou nenhuma) para uma conclusão efetiva pede por uma aplicação de RAA.

Exercícios

1. Demonstre usando dedução natural que $\vdash \varphi \vee \psi \to \psi \vee \varphi$, $\vdash \varphi \vee \varphi \leftrightarrow \varphi$.

2. Considere a linguagem cheia $\mathcal{L}$ com todos os conectivos $\wedge$, $\to$, $\bot$, $\leftrightarrow$, $\vee$ e a linguagem restrita $\mathcal{L}'$ com os conectivos $\wedge$, $\to$, $\bot$. Usando as regras de derivação apropriadas obtemos as noções de derivabilidade $\vdash$ e $\vdash'$. Definimos uma tradução óbvia de $\mathcal{L}$ para $\mathcal{L}'$:

$$\begin{array}{rcl} \varphi^+ & := & \varphi, \text{ para } \varphi \text{ atômica} \\ (\varphi \Box \psi)^+ & := & \varphi^+ \Box \psi^+ \text{ para } \Box = \wedge, \to, \\ (\varphi \vee \psi)^+ & := & \neg(\neg\varphi^+ \wedge \neg\psi^+), \text{ onde } \neg \text{ é uma abreviação,} \\ (\varphi \leftrightarrow \psi)^+ & := & (\varphi^+ \to \psi^+) \wedge (\psi^+ \to \varphi^+), \\ (\neg\varphi)^+ & := & \varphi^+ \to \bot. \end{array}$$

Demonstre que
(i) $\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi^+$,
(ii) $\vdash \varphi \Leftrightarrow \vdash' \varphi^+$,
(iii) $\varphi^+ = \varphi$ para $\varphi \in \mathcal{L}'$.
(iv) A lógica cheia é *conservativa* em relação à lógica restrita, isto é, para $\varphi \in \mathcal{L}'$ $\vdash \varphi \Leftrightarrow \vdash' \varphi$.

3. Demonstre que o Teorema da Completude se verifica para a lógica cheia. Sugestão: use o Exercício 2.

4. Demonstre que
(a) $\vdash \top \vee \bot$.
(b) $\vdash (\varphi \leftrightarrow \top) \vee (\varphi \leftrightarrow \bot)$.
(c) $\vdash \varphi \leftrightarrow (\varphi \leftrightarrow \top)$.

5. Demonstre que $\vdash (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow ((\varphi \to \psi) \to \psi)$.

6. Demonstre que:
(a) Γ é completa $\Leftrightarrow$ ($\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi$ ou $\Gamma \vdash \psi$, para toda φ, ψ),
(b) Γ é maximamente consistente $\Leftrightarrow$ Γ é uma teoria consistente e para toda φ, ψ ($\varphi \vee \psi \in \Gamma \Leftrightarrow \varphi \in \Gamma$ ou $\psi \in \Gamma$).

7. Demonstre que no sistema com $\vee$ como um conectivo primitivo:
$\vdash (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$,
$\vdash (\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$.