Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)
Centro de Informática (CIn)
Graduação em Ciência da Computação e Engenharia da Computação

Lógica para Computação

(IF673)
1º Semestre de 2004
Lista de Exercícios
Entrega: 8 de Julho de 2004

1. (2,0)

Uma *substituição* é uma função $s : X \rightarrow PROP$ (onde X é o conjunto de variáveis proposicionais). Como $PROP$ é livremente gerado por X e $\{f_\neg, f_\wedge, f_\vee, f_\rightarrow\}$, toda substituição se estende a uma única função $\hat{s} : PROP \rightarrow PROP$ definida por recursão. Seja φ uma proposição qualquer contendo os símbolos proposicionais $\{x_1, \ldots, x_n\}$, e s_1 e s_2 duas dessas substituições tais que para todo $x_i \in \{x_1, \ldots, x_n\}$, as proposições $s_1(x_i)$ e $s_2(x_i)$ são logicamente equivalentes (isto é, $s_1(x_i) \leftrightarrow s_2(x_i)$ é uma tautologia).
Prove que as proposições $\hat{s_1}(\varphi)$ e $\hat{s_2}(\varphi)$ são logicamente equivalentes. (Dica: indução sobre a complexidade de φ.)

2. (2,0)

Prove que para todo conjunto Γ de proposições

$$\text{Se} \quad \Gamma, \varphi \models \theta \quad \text{e} \quad \Gamma, \rho \models \theta \quad \text{então} \quad \Gamma, (\varphi \vee \rho) \models \theta$$

3. (3,0)

Suponha que consideremos proposições expressas unicamente por meio dos conectivos $\wedge, \vee, \neg$. A *dual* de uma proposição φ, denotada por φ^d, é definida recursivamente da seguinte forma:

$$\begin{array}{rcl} p^d & = & p, \quad \text{para todo símbolo proposicional } p \\ (\neg\varphi)^d & = & \neg\varphi^d \\ (\varphi \vee \rho)^d & = & (\varphi^d \wedge \rho^d) \\ (\varphi \wedge \rho)^d & = & (\varphi^d \vee \rho^d) \end{array}$$

(a) Prove que, para quaisquer proposições ψ e σ,
ψ é logicamente equivalente a σ sse ψ^d é logicamente equivalente a σ^d

(b) Se modificarmos a definição de ψ^d de modo que para todo símbolo proposicional p (i.e. toda variável p), $p^d = \neg p$, prove que ψ^d e $\neg\psi$ são logicamente equivalentes.

4. (3,0)

Podemos ver a relação $\models \varphi \rightarrow \theta$ como uma espécie de ordenação sobre o conjunto $PROP$ de todas as proposições. Vamos dizer que φ é menor que θ se:

$$\models \varphi \rightarrow \theta \quad \text{e} \quad \not\models \theta \rightarrow \varphi.$$

Exemplo: $(\rho \wedge \sigma)$ é menor que $(\rho \vee \sigma)$, pois $\models ((\rho \wedge \sigma) \rightarrow (\rho \vee \sigma))$, mas $\not\models ((\rho \vee \sigma) \rightarrow (\rho \wedge \sigma))$.

(i) para cada par de proposições φ, θ tal que $\varphi < \theta$ encontre σ tal que $\varphi < \sigma < \theta$;
(ii) dê um exemplo de uma seqüência $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ tal que $\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < \ldots$;
(iii) mostre que para cada par φ, θ com φ e θ incomparáveis, existe uma σ mínima tal que $\varphi < \sigma$ e $\theta < \sigma$.