Notas sobre Lógica de Predicados (1)

1 Introdução

O poder de expressividade da lógica de predicados, conhecida também como *lógica de primeira ordem* é muito maior em comparação com a lógica proposicional. Declarações do tipo "Para todo x, x tem sucessor" , não podem ser expressas na lógica propositcional. Um outro exemplo bastante ultilizado nos livros clássicos de lógica é mostrado a seguir.

Exemplo 1 *Todo homem é mortal. Sócrates é homem. Portanto, ele é mortal. Se usássemos a lógica proposicional, poderiamos definir os seguintes átomos:*

- *P: Todo homem é mortal*
- *Q: Sócrates é homem*
- *R: Sócrates é mortal*

R não é consequência lógica de P e Q na lógica proposicional. Porém na lógica de predicados é possível formalizar essas declarações e provar que R é de fato consequência lógica de P e Q.

Para aumentar o poder de expressão da lógica e portanto definir situações como as mostradas nos exemplos acima, é preciso definir três noções adicionais: *termos*. *predicados* e *quantificadores*.

2 Termos, Predicados e Quantificadores

Para escrevermos declarações do tipo "Para todo x, x tem um sucessor" , usamos um *quantificador universal*i, denotado por $\forall$, que siginifica "para todo", "para cada", ou "qualquer". E, preciamos também de um *predicado* para expressar a propriedade "x tem um sucessor" sobre o objeto x, que no caso é uma *variável*. Predicados são nomes que expressam propriedade ou relações a cerca de objetos de um determinado *domínio*. No nosso exemplo, poderiamos definir o predicado *TEM-SUCESSOR*(x), indicando que o objeto x possui a propriedade de ter um sucessor. A sentença então seria simbolizada da seguinte forma:

$$\forall x \, \textit{TEM-SUCESSOR}(x)$$

2.1 Outros exemplos

A seguir enumeramos algumas sentenças e como elas podem ser simbolizadas:

1. "x é maior que y" - $MAIOR(x, y)$
2. "x é maior que 3" - $MAIOR(x, 3)$
3. "x ama y" - $AMA(x, y)$

4. "João ama Maria" - $AMA(joao, maria)$

Nesses exemplos, AMA e $JOAO$ são predicados que expressam *relações* entre os objetos. Esses predicados podem ser *verdadeiros* ou *falsos*. Foram usadas as *variáveis* x e y e as *constantes* 3, $joao$, e $maria$.

2.2 Funções

Além de variáveis e constantes, os predicados podem ter como argumentos *funções*. Vejamos os seguintes exemplos:

- "$x + y$ - soma(x,y)
- "pai de x" - pai(x)

As seguintes sentenças podem usar as funções definidas acima:

1. "$x + 1$ é maior que x" - $MAIOR(soma(x, 1), x)$
2. "O pai e João o ama" - $AMA(pai(joao), joao)$

É importante observarmos a diferença entre *função* e *predicado*. Enquanto funções mapeiam lista de objetos em um objeto, os predicados mapeiam lista de objetos em um valor-verdade, ou seja, "verdadeiro" ou "falso".

Ate' agora, vimos um exemplo que usa o *quantificador universal* ($\forall$), entretanto a lógica de predicados também possui o *quantificador existencial*, denotado por $\exists$ que lida com sentenças do tipo "existe um", "para algum", ou "pelo menos um". Dessa forma, a expressão $\exists P(x)$ simboliza a sentença "existe um x tal que x tem a propriedade P".

Vimos então que na lógica de predicados temos as seguintes noções adicionais:

- variáveis;
- constantes;
- funções;
- predicados;
- quantificadores.

As constantes, variáveis e funções são os termos da nossa linguagem de primeira ordem. A definição de termos é dada a seguir:

Definição 1 (termos) *Termos são definidos recursivamente da seguinte forma:*

- *Uma variável é um termo;*
- *uma constante é um termo;*
- *seja $t_1, \ldots, t_n$ termos e f um símbolo de função n-ária (ou seja, com n argumentos). Então, $f(t_1, \ldots, t_n)$ é um termo.*

Os argumentos dos predicados e funções são termos.

2.3 Átomos

Os àtomos da lógica de predicados são simplesmente os predicados:

Definição 2 (átomos) *Seja $t_1, \ldots, t_n$ uma lista de termos e P um símbolo de predicado com aridade n. $P(t_1, \ldots, t_n)$ é um átomo da lógica de primeira ordem.*

2.4 Variáveis livres e ligadas

As variáveis que ocorrem numa fórmula da lógica de priemira ordem, podem ser *livres* ou *ligada*.

Definição 3 (variável ligada) *Uma ocorrência de uma variável em uma fórmu la é chamada de* ocorrência ligada *se : (i) for uma variável definida com o quantificador ou (ii) estar dentro do escopo de um quantificador envolvendo essa variável. Uma variável que tenha pelo menos uma ocorrência ligada em uma fórmula é chamada de* **variável ligada**.

Uma ocorrência livre é uma ocorrência que não é ligada, ou seja, est'a fora do escopo de um quantificador e nem seja parte direta de um quantificador.

Exemplo 2 *Os seguintes exemplos ilustram os conceitos de variável livre e ligada:*

1. $\forall x P(x)$ *- as duas ocorrências de x são ligadas, ou seja, x é ligada;*
2. $\forall y Q(y, z)$ *- y é ligada e z é livre.*

3 Fórmulas bem-formadas

As fórmulas bem-formadas da lógica de primeira ordem são definidas como a seguir.

Definição 4 (fórmulas bem-formadas) *Fórmulas bem-formadas ou simplesmente fórmulas na lógica de primeira ordem são definidas recursivamente como a seguir:*

1. *Um átomo é uma fórmula;*
2. *Se P e G são fórmulas, então $\neg P$, $P \vee G$, $P \wedge G$, $P \rightarrow G$ e $P \leftrightarrow G$ são fórmulas;*
3. *Se P é uma fórmula e x uma variável livre em P, então $\forall x P$ e $\exists x P$ são fórmulas;*
4. *Fórmulas são geradas somente por um número finito de aplicações de 1, 2 e 3.*

3.1 Exemplos

As frases que envolvem o quantificador existencial assertam a existência de um ou mais objetos com uma determinada propriedade. Elas frequentemente são simbolizadas juntamente com o conectivo $\wedge$. Entretanto, as frases que usam o quantificador universal frequentemente são simbolizadas juntamente com o conectivo $\rightarrow$.

Exemplo 3 *Um cachorro pequeno e feliz está em casa. Essa frase pode ser simbolizada na lógica de primeira ordem como a seguir:*

$$\exists x(Cachorro(x) \wedge Pequeno(x) \wedge Feliz(x) \wedge Em\text{-}casa(x))$$

Exemplo 4 *Todo cachorro pequeno que mora em casa é feliz:*

$$\forall x((Cachorro(x) \land Pequeno(x) \land Mora\text{-}em\text{-}casa(x)) \to Feliz(x))$$

Exemplo 5 *Nosso exemplo inicial:*

1. *Todo homem é mortal:* $\forall x(Homem(x) \to Mortal(x))$
2. *Sócrates é homem:* $Homem(socrates)$
3. *Socrates é mortal:* $Mortal(socrates)$

Exemplo 6 *João possui um cachorro pequeno e feliz:*

$$\exists x(Cachorro(x) \land Pequeno(x) \land Feliz(x) \land Possui(joao, x))$$

Exemplo 7 *João possui todos os cachorros pequenos e felizes:*

$$\forall x((Cachorro(x) \land Pequeno(x) \land Feliz(x)) \to Possui(joao, x))$$

3.2 Formas aristotélicas

Aristóteles definiu as seguintes formas, conhecidas como "formas aristotélicas":

1. Todos os $P's$ são $Q's$;
2. Alguns $P's$ são $Q's$;
3. Nenhum P é Q;
4. Alguns $P's$ não são $Q's$.

Exemplo 8 *(forma 1) Todo homem é mamífero:* $\forall x(Homem(x) \to Mamifero(x))$

Exemplo 9 *(forma 2) Alguns animais são mamíferos:* $\exists x(Animal(x) \land Mamifero(x))$

Exemplo 10 *(forma 3) Não existe cachorro que fala:* $\forall x(Cachorro(x) \to \neg Fala(x))$

Exemplo 11 *(forma 4) Alguns homens não falam:* $\exists x(Homem(x) \land \neg Fala(x))$

3.3 Combinando os quantificadores

A expressão $\forall x \exists y P(x, y)$ simboliza a frase "para todo x existe um y tal que $P(x, y)$ se verifica". Ao mudar a ordem dos quantificadores, a frase simbolizada passa a ter outro significado. Dessa a forma, a expressão $\exists x \forall y P(x, y)$ simboliza a frase "existe um x para todo y tal que $P(x, y)$".

Exemplo 12 *Sejam os seguintes axiomas básicos sobre os números naturais:*

1. *Todo número natural possui um e somente um sucessor imediato;*
2. *Não existe um número natural de forma que o número zero seja seu sucessor imediato;*

3. *Todo número natural diferente de zero possui um e somente um predecessor imediato.*

Definimos as funções $suc(x)$ *e* $pred(x)$ *para fornecer o sucessor imediatp e o predecessor imediato de x, respectivamente; e o predicado* $Igual(x, y)$ *que denota a relação "x é igual a y". Os axiomas podem ser simbolizados como a seguir:*

1. $\forall x \exists y (Igual(y, suc(x)) \land \forall z (Igual(z, suc(x)) \to Igual(y, z)))$
2. $\neg \exists x (Igual(0, suc(x))$
3. $\forall x (\neg Igual(x, 0) \to \exists y (Igual(y, pred(x)) \land \forall z (Igual(z, pred(z)) \to Igual(y, z))))$