

Lista de Exercícios - Álgebra de Boole

1. Considere a propriedade de *idempotência*: $x + x = x$.
 - (a) Prove que ela é válida para qualquer álgebra de Boole, explicitando as propriedades usadas em cada passo da prova.
 - (b) Como fica essa propriedade no contexto da lógica proposicional?
 - (c) E no contexto da teoria dos conjuntos?
2. Prove que a propriedade $x + 1 = 1$ é válida em qualquer álgebra de Boole (explicita a propriedade usada em cada passo. Lembre-se de que uma vez demonstrada uma propriedade, ela pode ser usada na demonstração de outras propriedades). Qual é a propriedade dual?
3. Prove as propriedades a seguir para álgebras de Boole. Justifique cada passo.
 - (a) $x + (x.y) = x$
 - (b) $x.(x + y) = x$
 - (c) $(x + y).(x' + y) = y$
 - (d) $(x + (y.z))' = x'.y' + x'.z'$
 - (e) $(x + y) + (y.x') = x + y$
 - (f) $(x.y).(y + x') = x.y$
 - (g) $(x.y') + (y.z') + (x'.z) = (x'.y) + (y'.z) + (x.z')$
 - (h) $(x + y').z = ((x' + z').(y + z'))'$
4. Pode-se definir uma nova operação binária \oplus em uma álgebra de Boole por $x \oplus y = x.y' + y.x'$. Prove que
 - (a) $x \oplus y = y \oplus x$
 - (b) $x \oplus x = 0$
 - (c) $0 \oplus x = x$
 - (d) $1 \oplus x = x'$
5. Prove que, em qualquer álgebra de Boole, $x.y' = 0$ se, e somente se, $x.y = x$.
6. Prove que, em qualquer álgebra de Boole, $x.y' + x'.y = y$ se, e somente se, $x = 0$.