Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Informática

Matemática Discreta - Lista de Exercícios (3)

1. Por quê f não é uma função de $\mathbf{R}$ em $\mathbf{R}$ nas seguintes equações?

   (a) $f(x) = 1/x$
   (b) $f(x) = \sqrt{x}$
   (c) $f(x) = \pm\sqrt{(x^2+1)}$

2. Determine se f é uma função de $\mathbf{Z}$ em $\mathbf{R}$.

   (a) $f(n) = \pm n$
   (b) $f(n) = \sqrt{n^2+1}$
   (c) $f(n) = 1/(n^2-4)$

3. Encontre o valor da função teto e piso dos seguintes números.

   a) 1.1 **b)** -0.1 **c)** 2.99
   d) -2.99 **e)** 3/4 **f)** -7/8

4. Diga se cada uma das seguintes funções do conjunto $\{a, b, c, d\}$ nele mesmo é injetora e/ou sobrejetora.

   (a) $f(a) = b, \quad f(b) = a, \quad f(c) = c, \quad f(d) = d$
   (b) $f(a) = b, \quad f(b) = b, \quad f(c) = d, \quad f(d) = c$
   (c) $f(a) = d, \quad f(b) = b, \quad f(c) = c, \quad f(d) = d$

5. Dê um exemplo de função de $\mathbf{N}$ em $\mathbf{N}$ que seja:

   (a) injetora, mas não seja sobrejetora.
   (b) sobrejetora, mas não seja injetora.
   (c) injetora e sobrejetora e seja diferente da função identidade.
   (d) Nem injetora e nem sobrejetora.

6. Encontre $f \circ g$ e $g \circ f$ onde $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x + 2$ são funções de $\mathbf{R}$ em $\mathbf{R}$.

7. Sejam $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$, onde a, b, c, d são constantes. Diga para quais constantes a, b, c, d temos que $f \circ g$ é igual a $g \circ f$.

8. Suponha que g é uma função de A em B e f é uma função de B em C.

   (a) Mostre que se f e g são funções injetoras, então $f \circ g$ também é injetora.

(b) Mostre que se f e g são funções bijetoras, então $f \circ g$ também é bijetora.

9. Se f e $f \circ g$ são funções bijetoras então é certo concluir que g também é bijetora? Justifique sua resposta.

10. Mostre que a função $f(x) = ax + b$ de $\mathbf{R}$ em $\mathbf{R}$ possui uma função inversa, onde a e b são constantes, com $a \neq 0$; e encontre a inversa de f.

11. Mostre que se x é um número real e n é um número inteiro, então:

    (a) $x < n$ se e somente se a função piso de x é menor que n.

    (b) $n < x$ se e somente se n é menor que a função teto de x.

12. Mostre que se x é um número real então a função teto de x menos a função piso de x é igual a 1 se x não é um inteiro. Caso x seja um inteiro mostre que essa diferença é igual a zero.

13. O conceito de **função parcial** é utilizado em computação. Por exemplo, um determinado programa pode ser visto como uma função que pode não produzir valores corretos para todos os elementos do domínio. O programa pode entrar em *loop* ou pode dar um *overflow* para uma determinada entrada. Por esse motivo, a noção de **função parcial** é adequada para estudar situações como essa. Uma função parcial de A em B mapeia cada elemento a pertencente a um subconjunto de A , chamado de *domínio de definição* de f, a um único elemento b em B. Os conjuntos A e B são chamados de domínio e codomínio de f, respectivamente. Dizemos que f é *indefinida* para elementos em A que não estão no domínio de definição de f. Usamos a notação $f : A \to B$ para denotarmos que f é uma função parcial de A em B. Quando o domínio de definição de f é igual a A, dizemos que f é uma **função total**.

    Para cada uma das seguintes funções parciais, determine o seu domínio, codomínio, domínio de definição, e o conjunto de valores para os quais a função não está definida. Além disso, diga se a função é total.

    (a) $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$, $f(n) = 1/n$.

    (b) $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $f(n) =$ função teto de $n/2$

    (c) $f : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$, $f(m.n) = m/n$

    (d) $f : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ $f(m.n) = m.n$

14. Encontre os seguintes termos da sequência $\{a_n\}$ onde $a_n = 2.(-3)^n + 5^n$.

    a) a_0 **b**)a_1 **c**)a_4 **d**)a_5

15. Liste os 10 primeiros termos de cada uma das seguintes sequências.

    (a) A sequência que começa com 2 e cada termo seguinte é igual ao anterior mais 3.

    (b) A sequência que lista cada inteiro positivo três vezes numa ordem crescente.

(c) A sequência cujo o e-nésimo termo é $n! - 2^n$

(d) A sequência que começa com 3 e cada termo seguinte é obtido pelo termo anterior multiplicado por 2.

(e) A sequência que possui os dois primeiros termos iguais a 1 e cada termo seguinte é obtido pela soma dos dois termos predecessores (é a famosa sequência de *Fibonacci*).

(f) A sequência cujo o e-nésimo termo é $3^n - 2^n$.

16. Defina três sequências diferentes cujos três primeiros termos são $1, 2, 4$ e os termos seguintes são gerados por uma fórmula simples ou alguma regra.

17. Para cada uma das seguintes sequências determine uma fórmula ou regra que gere os seus termos.

    (a) $1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, \ldots$

    (b) $1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, \ldots$

    (c) $1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, \ldots$

    (d) $3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, \ldots$

    (e) $15, 8, 1, -6, -13, -20, -27, \ldots$

    (f) $3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, 38, 47, \ldots$

    (g) $2, 16, 54, 128, 250, 432, 686, \ldots$

    (h) $2, 3, 7, 25, 121, 721, 5041, 40321, \ldots$