Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Informática

Matemática Discreta - Lista de Exercícios (2)

1. Liste os membros dos seguintes conjuntos.
   (a) $\{x \mid x$ é um inteiro positivo menor que $12\}$
   (b) $\{x \mid x$ é um inteiro tal que $x^2 = 2\}$

2. Use a notação adotada na questão anterior para descrever os seguintes conjuntos.
   (a) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
   (b) $\{m, n, o, p\}$

3. Determine se cada uma das sentenças abaixo é verdadeira ou falsa.
   (a) $x \in \{x\}$
   (b) $\{x\} \subseteq \{x\}$
   (c) $\{x\} \in \{x\}$
   (d) $\{x\} \in \{\{x\}\}$
   (e) $\emptyset \subseteq \{x\}$
   (f) $\emptyset \in \{\{x\}\}$

4. Use o diagrama de Venn para ilustrar as relações $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$.

5. Suponha que A, B e C são conjuntos tal que $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$. Mostre que $A \subseteq C$.

6. Encontre um exemplo de dois conjuntos A e B de forma que $A \in B$ e $A \subseteq B$.

7. Qual a cardinalidade dos seguintes conjuntos?
   (a) $\{a\}$
   (b) $\emptyset$
   (c) $\{\{a\}\}$
   (d) $\{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$

8. Encontre o conjunto das partes dos seguintes conjuntos.
   (a) $\{a\}$
   (b) $\{a, b\}$
   (c) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

9. O que pode ser dito sobre A se $P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$?

10. Determine se cada um dos seguintes conjuntos é o conjunto das partes de algum conjunto.

    (a) $\emptyset$
    (b) $\{\emptyset, \{a\}\}$
    (c) $\{\emptyset, \{a\}, \{\emptyset, a\}\}$
    (d) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

11. Seja $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{y, z\}$. Encontre:

    (a) AXB
    (b) AXA
    (c) BXA

12. Suponha que $AXB = \emptyset$, onde A e B são conjuntos. O que é possível concluir disso?

13. Encontre os conjuntos A e B se $A - B = \{1, 5, 7, 8\}$, $B - A = \{2, 10\}$, e $A \cap B = \{3, 6, 9\}$.

14. Prove que se A e B são conjuntos então $A - B = A \cap \bar{B}$.

15. Sejam A, B e C conjuntos. Prove que:

    (a) $(A \cap B) \subseteq A$
    (b) $A - B \subseteq A$
    (c) $A \cap (B - A) = \emptyset$
    (d) $\overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$
    (e) $(B - A) \cup (C - A) = (B \cup C) - A$
    (f) $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$
    (g) $A \cup (B - A) = A \cup B$
    (h) $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A$

16. Desenhe o diagrama de Venn para cada uma das combinações de conjuntos A, B e C.

    (a) $A \cap (B \cup C)$
    (b) $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

17. O que é possível afirmar sobre A e B em cada uma das sentenças abaixo, supondo que cada sentença é verdadeira:

    (a) $A \cup B = A$
    (b) $A - B = A$

18. Você pode concluir que $A = B$ se A, B e C são conjuntos e $A \cup C = B \cup C$?

19. A **diferença simétrica** entre os conjuntos A e B, denotada por $A \otimes B$, é o conjunto que contém todos os elementos que estão em A ou estão em B, mas não em ambos. Com base nessa definição, responda:

    (a) Encontre a diferença simétrica entre $\{1, 3, 5\}e\{1, 2, 3\}$.

    (b) Desenhe o diagrama de Venn para $A \otimes B$.

    (c) Mostre que $A \otimes B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

    (d) Mostre que se A é um subconjunto de um conjunto universal U, então:

        i. $A \otimes A = \emptyset$

        ii. $A \otimes U = \bar{A}$

20. Os conceitos de *união* e *interseção* entre conjuntos podem ser aplicados à uma coleção de conjuntos. Nesse caso, a notação utilizada é definida como a seguir:

    (a) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ denota a união dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

    (b) $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ denota a interseção dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

    (c) Dessa forma, responda as seguintes questões:

        i. Seja $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}, \quad B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ *e* $C = \{0, 3, 6, 9\}$. Quais são os conjuntos $A \cup B \cup C$ e $A \cap B \cap C$?

        ii. Seja $A_i = \{i, i + 1, i + 2, \ldots\}$. Encontre $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ e $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

        iii. Seja $A_i = \{1, 2, 3, \ldots, i\}$. Encontre $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ e $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

21. O *sucessor* de um conjunto A é o conjunto $A \cup \{A\}$. Encontre o sucessor dos seguintes conjuntos:

    (a) $\{1, 2, 3\}$

    (b) $\{\emptyset\}$

22. Em certas situações, o número de vezes que um determinado elemento ocorre em uma coleção não ordenada é relevante para o problema estudado. **Multiconjuntos** são coleções não ordenadas de elementos, onde cada elemento pode ocorrer como membro mais de uma vez. A notação $\{m_1.a_1, m_2.a_2, \ldots, m_r.a_r\}$ denota que no multiconjunto o elemento a_1 ocorre m_1 vezes, o elemento a_2 ocorre m_2 vezes, e assim sucessivamente. Os números m_i são chamados de **multiplicidades** dos elementos a_i, onde $i = 1, 2, \ldots, r$.

    Sejam P e Q multiconjuntos. A *união* de P e Q é o multiconjunto onde a multiplicidade de um elemento é o máximo de suas multiplicidades em P e em Q. A *interseção* de P e Q é o multiconjunto onde a multiplicidade de cada elemento é o mínimo das multiplicidades em P e Q. A *diferença* entre P e Q é o multiconjunto onde a multiplicidade de um elemento é a multiplicidade do elemento em P menos sua multiplicidade em Q, a não ser que a diferença seja negativa, nesse caso a multiplicidade é zero. A *soma* de P e Q é o multiconjunto onde a multiplicidade de um elemento é a soma de suas multiplicidades em P e em Q. A *soma* é denotada por $+$.

Com base nessas definições, pergunta-se:

(a) Sejam A e B os multiconjuntos $\{3.a, 2.b, 1.c\}$ e $\{2.a, 3.b, 4.d\}$, r espectivamente. Encontre os multiconjuntos $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$ e $A + B$.