Contagem (2)

Anjolina Grisi de Oliveira

Centro de Informática
Universidade Federal de Pernambuco

CIn-UFPE

Árvores de decisão

- Desenhe uma árvore ilustrando a maneira que contamos o número de cadeias de comprimento 2 formadas dos caracteres a, b e c, e explique como ela dá a resposta.
- Faça o mesmo para o problema mais geral quando $n = 3$, $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $k_3 = 2$.

Árvores de decisão

- Desenhe uma árvore ilustrando a maneira que contamos o número de cadeias de comprimento 2 formadas dos caracteres *a*, *b* e *c*, e explique como ela dá a resposta.
- Faça o mesmo para o problema mais geral quando $n = 3$, $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $k_3 = 2$.

Árvores de decisão

- Desenhe uma árvore ilustrando a maneira que contamos o número de cadeias de comprimento 2 formadas dos caracteres a, b e c, e explique como ela dá a resposta.
- Faça o mesmo para o problema mais geral quando $n = 3$, $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $k_3 = 2$.

Exemplos

- Numa loja de esportes, existem camisetas de cinco cores diferentes, calções de quatro cores diferentes e meias de três cores diferentes. Quantos uniformes diferentes você pode compor com esses itens?

Resp. 5.4.3

- Em um bilhete de loteria esportiva você tem que apostar 1, 2, ou X para cada um dos 13 jogos. De quantas maneiras você pode preencher o bilhete?

Resp. 3^{13}

Exemplos

- Numa loja de esportes, existem camisetas de cinco cores diferentes, calções de quatro cores diferentes e meias de três cores diferentes. Quantos uniformes diferentes você pode compor com esses itens?

Resp. 5.4.3

- Em um bilhete de loteria esportiva você tem que apostar 1, 2, ou X para cada um dos 13 jogos. De quantas maneiras você pode preencher o bilhete?

Resp. 3^{13}

Exemplos

- Numa loja de esportes, existem camisetas de cinco cores diferentes, calções de quatro cores diferentes e meias de três cores diferentes. Quantos uniformes diferentes você pode compor com esses itens?

Resp. 5.4.3

- Em um bilhete de loteria esportiva você tem que apostar 1, 2, ou X para cada um dos 13 jogos. De quantas maneiras você pode preencher o bilhete?

Resp. 3^{13}

Exemplos

- Numa loja de esportes, existem camisetas de cinco cores diferentes, calções de quatro cores diferentes e meias de três cores diferentes. Quantos uniformes diferentes você pode compor com esses itens?

Resp. 5.4.3

- Em um bilhete de loteria esportiva você tem que apostar 1, 2, ou X para cada um dos 13 jogos. De quantas maneiras você pode preencher o bilhete?

Resp. 3^{13}

Exemplos

- Numa loja de esportes, existem camisetas de cinco cores diferentes, calções de quatro cores diferentes e meias de três cores diferentes. Quantos uniformes diferentes você pode compor com esses itens?

Resp. 5.4.3

- Em um bilhete de loteria esportiva você tem que apostar 1, 2, ou X para cada um dos 13 jogos. De quantas maneiras você pode preencher o bilhete?

Resp. 3^{13}

Exemplos

- Numa loja de esportes, existem camisetas de cinco cores diferentes, calções de quatro cores diferentes e meias de três cores diferentes. Quantos uniformes diferentes você pode compor com esses itens?

Resp. 5.4.3

- Em um bilhete de loteria esportiva você tem que apostar 1, 2, ou X para cada um dos 13 jogos. De quantas maneiras você pode preencher o bilhete?

Resp. 3^{13}

Exemplos

- Temos 20 presentes diferentes que desejamos distribuir para 12 crianças. Não é exigido que toda criança obtenha algo; poderia acontecer de darmos todos os presentes à mesma criança. De quantas maneiras podemos distribuir os presentes?

Resp. 12^{20}, cada presente pode ser distribuído de doze maneiras.

Exemplos

- Temos 20 presentes diferentes que desejamos distribuir para 12 crianças. Não é exigido que toda criança obtenha algo; poderia acontecer de darmos todos os presentes à mesma criança. De quantas maneiras podemos distribuir os presentes?

Resp. 12^{20}, cada presente pode ser distribuído de doze maneiras.

Exemplos

- Temos 20 presentes diferentes que desejamos distribuir para 12 crianças. Não é exigido que toda criança obtenha algo; poderia acontecer de darmos todos os presentes à mesma criança. De quantas maneiras podemos distribuir os presentes?

Resp. 12^{20}, cada presente pode ser distribuído de doze maneiras.

Exemplos

- Temos 20 presentes diferentes que desejamos distribuir para 12 crianças. Não é exigido que toda criança obtenha algo; poderia acontecer de darmos todos os presentes à mesma criança. De quantas maneiras podemos distribuir os presentes?

Resp. 12^{20}, cada presente pode ser distribuído de doze maneiras.

Exemplos

- Temos 20 presentes diferentes que desejamos distribuir para 12 crianças. Não é exigido que toda criança obtenha algo; poderia acontecer de darmos todos os presentes à mesma criança. De quantas maneiras podemos distribuir os presentes?

Resp. 12^{20}, cada presente pode ser distribuído de doze maneiras.

Exemplos

- Temos 20 tipos de presentes; dessa vez, temos um grande suprimento de cada. Desejamos dar presentes a 12 crianças. Novamente, não é exigido que toda criança obtenha algo; mas nenhuma criança possa ganhar duas cópias do mesmo presente. De quantas maneiras podemos dar presentes?

Resp. $(2^{20})^{12}$. Imagine uma matriz de crianças por presentes, cada criança pode receber os presentes de 2^{20} maneiras, cada tipo de presente ela receberá ou não.

Exemplos

- Temos 20 tipos de presentes; dessa vez, temos um grande suprimento de cada. Desejamos dar presentes a 12 crianças. Novamente, não é exigido que toda criança obtenha algo; mas nenhuma criança possa ganhar duas cópias do mesmo presente. De quantas maneiras podemos dar presentes?

Resp. $(2^{20})^{12}$. Imagine uma matriz de crianças por presentes, cada criança pode receber os presentes de 2^{20} maneiras, cada tipo de presente ela receberá ou não.

Exemplos

- Temos 20 tipos de presentes; dessa vez, temos um grande suprimento de cada. Desejamos dar presentes a 12 crianças. Novamente, não é exigido que toda criança obtenha algo; mas nenhuma criança possa ganhar duas cópias do mesmo presente. De quantas maneiras podemos dar presentes?

Resp. $(2^{20})^{12}$, Imagine uma matriz de crianças por presentes, cada criança pode receber os presentes de 2^{20} maneiras, cada tipo de presente ela receberá ou não.

Permutando n objetos

- Se temos uma lista de n objetos (um conjunto ordenado onde é especificado qual elemento é primeiro, segundo etc.), e os rearranjamos de modo que eles estejam em uma outra ordem, isso é chamado de *permutá*-los; a nova ordem é também chamada de uma *permutação* dos objetos. Também chamamos a rearrumação que não muda nada, uma permutação.

Exemplo O conjunto $\{a, b, c\}$ tem as seguintes seis permutações:

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba.$$

Permutando n objetos

- Se temos uma lista de n objetos (um conjunto ordenado onde é especificado qual elemento é primeiro, segundo etc.), e os rearranjamos de modo que eles estejam em uma outra ordem, isso é chamado de *permutá*-los; a nova ordem é também chamada de uma *permutação* dos objetos. Também chamamos a rearrumação que não muda nada, uma permutação.

Exemplo O conjunto $\{a, b, c\}$ tem as seguintes seis permutações:

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba.$$

Permutando n objetos

- Se temos uma lista de n objetos (um conjunto ordenado onde é especificado qual elemento é primeiro, segundo etc.), e os rearranjamos de modo que eles estejam em uma outra ordem, isso é chamado de *permutá*-los; a nova ordem é também chamada de uma *permutação* dos objetos. Também chamamos a rearrumação que não muda nada, uma permutação.

Exemplo O conjunto $\{a, b, c\}$ tem as seguintes seis permutações:

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba.$$

Permutando n objetos

- A solução encontrada pelas pessoas na festa funciona em geral: podemos pôr qualquer das n pessoas no primeiro lugar; independentemente de quem escolhemos, temos $n-1$ escolhas para o segundo. Portanto o número de maneiras de preencher as primeiras duas posições é $n(n-1)$.
- Independentemente de como tenhamos preenchido a primeira e a segunda posições, existem $n-2$ escolhas para a terceira posição, de modo que número de maneiras de preencher as primeiras três posições é $n(n-1)(n-2)$.

Permutando n objetos

- A solução encontrada pelas pessoas na festa funciona em geral: podemos pôr qualquer das n pessoas no primeiro lugar; independentemente de quem escolhemos, temos $n-1$ escolhas para o segundo. Portanto o número de maneiras de preencher as primeiras duas posições é $n(n-1)$.
- Independentemente de como tenhamos preenchido a primeira e a segunda posições, existem $n-2$ escolhas para a terceira posição, de modo que número de maneiras de preencher as primeiras três posições é $n(n-1)(n-2)$.

Permutando n objetos

- A solução encontrada pelas pessoas na festa funciona em geral: podemos pôr qualquer das n pessoas no primeiro lugar; independentemente de quem escolhemos, temos $n-1$ escolhas para o segundo. Portanto o número de maneiras de preencher as primeiras duas posições é $n(n-1)$.
- Independentemente de como tenhamos preenchido a primeira e a segunda posições, existem $n-2$ escolhas para a terceira posição, de modo que número de maneiras de preencher as primeiras três posições é $n(n-1)(n-2)$.

Permutando n objetos

- A solução encontrada pelas pessoas na festa funciona em geral: podemos pôr qualquer das n pessoas no primeiro lugar; independentemente de quem escolhemos, temos $n-1$ escolhas para o segundo. Portanto o número de maneiras de preencher as primeiras duas posições é $n(n-1)$.
- Independentemente de como tenhamos preenchido a primeira e a segunda posições, existem $n-2$ escolhas para a terceira posição, de modo que número de maneiras de preencher as primeiras três posições é $n(n-1)(n-2)$.

Permutando n objetos

- A solução encontrada pelas pessoas na festa funciona em geral: podemos pôr qualquer das n pessoas no primeiro lugar; independentemente de quem escolhemos, temos $n-1$ escolhas para o segundo. Portanto o número de maneiras de preencher as primeiras duas posições é $n(n-1)$.
- Independentemente de como tenhamos preenchido a primeira e a segunda posições, existem $n-2$ escolhas para a terceira posição, de modo que número de maneiras de preencher as primeiras três posições é $n(n-1)(n-2)$.

Permutando n objetos

- Está claro que esse argumento continua assim até que todas as posições sejam preenchidas. Por conseguinte, o número de maneiras de preencher todas as posições é $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$.

Teorema

O número de permutações de n objetos é $n!$.

Permutando n objetos

- Podemos usar árvores de decisão:
- Começamos com o nó no topo, que põe nossa primeira decisão: quem devemos sentar na primeira cadeira? As três setas saindo correspondem às três respostas possíveis à questão. Tomando uma decisão, podemos seguir uma das setas em direção ao nó seguinte.
- Esse carrega o próximo problema de decisão: quem devemos colocar na segunda cadeira? As duas setas saindo do nó representam as duas escolhas possíveis.
- Se tomamos uma decisão e seguimos a seta correspondente para o nó seguinte, sabemos quem senta na terceira cadeira. O nó carrega a “ordem de assentamento” inteira.

Permutando n objetos

- Podemos usar árvores de decisão:
- Começamos com o nó no topo, que põe nossa primeira decisão: quem devemos sentar na primeira cadeira? As três setas saindo correspondem às três respostas possíveis à questão. Tomando uma decisão, podemos seguir uma das setas em direção ao nó seguinte.
- Esse carrega o próximo problema de decisão: quem devemos colocar na segunda cadeira? As duas setas saindo do nó representam as duas escolhas possíveis.
- Se tomamos uma decisão e seguimos a seta correspondente para o nó seguinte, sabemos quem senta na terceira cadeira. O nó carrega a “ordem de assentamento” inteira.

Permutando n objetos

- Podemos usar árvores de decisão:
- Começamos com o nó no topo, que põe nossa primeira decisão: quem devemos sentar na primeira cadeira? As três setas saindo correspondem às três respostas possíveis à questão. Tomando uma decisão, podemos seguir uma das setas em direção ao nó seguinte.
- Esse carrega o próximo problema de decisão: quem devemos colocar na segunda cadeira? As duas setas saindo do nó representam as duas escolhas possíveis.
- Se tomamos uma decisão e seguimos a seta correspondente para o nó seguinte, sabemos quem senta na terceira cadeira. O nó carrega a “ordem de assentamento” inteira.

Permutando n objetos

- Podemos usar árvores de decisão:
- Começamos com o nó no topo, que põe nossa primeira decisão: quem devemos sentar na primeira cadeira? As três setas saindo correspondem às três respostas possíveis à questão. Tomando uma decisão, podemos seguir uma das setas em direção ao nó seguinte.
- Esse carrega o próximo problema de decisão: quem devemos colocar na segunda cadeira? As duas setas saindo do nó representam as duas escolhas possíveis.
- Se tomamos uma decisão e seguimos a seta correspondente para o nó seguinte, sabemos quem senta na terceira cadeira. O nó carrega a “ordem de assentamento” inteira.

Permutando n objetos

O número de subconjuntos ordenados

- Numa competição de 100 atletas, apenas a ordem dos primeiros 10 é registrada. Quantos resultados diferentes tem a competição?

Resp. $100 \cdot 99 \cdot \dots \cdot 91$.

- Ilustre esse argumento por meio de uma árvore.
- Suponha que registremos a ordem de todos os 100 atletas.

(a) Quantos resultados diferentes podemos então ter?

Resp. $100!$

(b) Quantos desses dão o mesmo para os 10 primeiros lugares?

Resp. $(100 - 10)!$

O número de subconjuntos ordenados

- Numa competição de 100 atletas, apenas a ordem dos primeiros 10 é registrada. Quantos resultados diferentes tem a competição?

Resp. $100 \cdot 99 \cdot \dots \cdot 91$.

- Ilustre esse argumento por meio de uma árvore.
- Suponha que registremos a ordem de todos os 100 atletas.

(a) Quantos resultados diferentes podemos então ter?

Resp. $100!$

(b) Quantos desses dão o mesmo para os 10 primeiros lugares?

Resp. $(100-10)!$

O número de subconjuntos ordenados

- Numa competição de 100 atletas, apenas a ordem dos primeiros 10 é registrada. Quantos resultados diferentes tem a competição?

Resp. $100 \cdot 99 \cdot \dots \cdot 91$.

- Ilustre esse argumento por meio de uma árvore.
- Suponha que registremos a ordem de todos os 100 atletas.

(a) Quantos resultados diferentes podemos então ter?

Resp. $100!$

(b) Quantos desses dão o mesmo para os 10 primeiros lugares?

Resp. $(100 - 10)!$

O número de subconjuntos ordenados

- Numa competição de 100 atletas, apenas a ordem dos primeiros 10 é registrada. Quantos resultados diferentes tem a competição?

Resp. $100 \cdot 99 \cdot \cdots \cdot 91$.

- Ilustre esse argumento por meio de uma árvore.
- Suponha que registremos a ordem de todos os 100 atletas.

(a) Quantos resultados diferentes podemos então ter?

Resp. $100!$

(b) Quantos desses dão o mesmo para os 10 primeiros lugares?

Resp. $(100 - 10)!$

O número de subconjuntos ordenados

- Numa competição de 100 atletas, apenas a ordem dos primeiros 10 é registrada. Quantos resultados diferentes tem a competição?

Resp. $100 \cdot 99 \cdot \cdots \cdot 91$.

- Ilustre esse argumento por meio de uma árvore.
- Suponha que registremos a ordem de todos os 100 atletas.

(a) Quantos resultados diferentes podemos então ter?

Resp. $100!$

(b) Quantos desses dão o mesmo para os 10 primeiros lugares?

Resp. $(100-10)!$

O número de subconjuntos ordenados

- Numa competição de 100 atletas, apenas a ordem dos primeiros 10 é registrada. Quantos resultados diferentes tem a competição?

Resp. $100 \cdot 99 \cdot \cdots \cdot 91$.

- Ilustre esse argumento por meio de uma árvore.
- Suponha que registremos a ordem de todos os 100 atletas.

(a) Quantos resultados diferentes podemos então ter?

Resp. $100!$

(b) Quantos desses dão o mesmo para os 10 primeiros lugares?

Resp. $(100 - 10)!$

O número de subconjuntos ordenados

- Numa competição de 100 atletas, apenas a ordem dos primeiros 10 é registrada. Quantos resultados diferentes tem a competição?

Resp. $100 \cdot 99 \cdot \dots \cdot 91$.

- Ilustre esse argumento por meio de uma árvore.
- Suponha que registremos a ordem de todos os 100 atletas.

(a) Quantos resultados diferentes podemos então ter?

Resp. $100!$

(b) Quantos desses dão o mesmo para os 10 primeiros lugares?

Resp. $(100 - 10)!$

O número de subconjuntos ordenados

- Numa competição de 100 atletas, apenas a ordem dos primeiros 10 é registrada. Quantos resultados diferentes tem a competição?

Resp. $100 \cdot 99 \cdot \cdots \cdot 91$.

- Ilustre esse argumento por meio de uma árvore.
- Suponha que registremos a ordem de todos os 100 atletas.

(a) Quantos resultados diferentes podemos então ter?

Resp. $100!$

(b) Quantos desses dão o mesmo para os 10 primeiros lugares?

Resp. $(100-10)!$

O número de subconjuntos ordenados

- Numa competição de 100 atletas, apenas a ordem dos primeiros 10 é registrada. Quantos resultados diferentes tem a competição?

Resp. $100 \cdot 99 \cdot \cdots \cdot 91$.

- Ilustre esse argumento por meio de uma árvore.
- Suponha que registremos a ordem de todos os 100 atletas.

(a) Quantos resultados diferentes podemos então ter?

Resp. $100!$

(b) Quantos desses dão o mesmo para os 10 primeiros lugares?

Resp. $(100-10)!$

O número de subconjuntos ordenados

- Numa competição de 100 atletas, apenas a ordem dos primeiros 10 é registrada. Quantos resultados diferentes tem a competição?

Resp. $100 \cdot 99 \cdot \cdots \cdot 91$.

- Ilustre esse argumento por meio de uma árvore.
- Suponha que registremos a ordem de todos os 100 atletas.

(a) Quantos resultados diferentes podemos então ter?

Resp. $100!$

(b) Quantos desses dão o mesmo para os 10 primeiros lugares?

Resp. $(100 - 10)!$

O número de subconjuntos ordenados

- Numa competição de 100 atletas, apenas a ordem dos primeiros 10 é registrada. Quantos resultados diferentes tem a competição?

Resp. $100 \cdot 99 \cdot \cdots \cdot 91$.

- Ilustre esse argumento por meio de uma árvore.
- Suponha que registremos a ordem de todos os 100 atletas.

(a) Quantos resultados diferentes podemos então ter?

Resp. $100!$

(b) Quantos desses dão o mesmo para os 10 primeiros lugares?

Resp. $(100 - 10)!$

O número de subconjuntos ordenados

- Numa competição de 100 atletas, apenas a ordem dos primeiros 10 é registrada. Quantos resultados diferentes tem a competição?

Resp. $100 \cdot 99 \cdot \cdots \cdot 91$.

- Ilustre esse argumento por meio de uma árvore.
- Suponha que registremos a ordem de todos os 100 atletas.

(a) Quantos resultados diferentes podemos então ter?

Resp. $100!$

(b) Quantos desses dão o mesmo para os 10 primeiros lugares?

Resp. $(100 - 10)!$

O número de subconjuntos ordenados

- Numa competição de 100 atletas, apenas a ordem dos primeiros 10 é registrada. Quantos resultados diferentes tem a competição?

Resp. $100 \cdot 99 \cdot \dots \cdot 91$.

- Ilustre esse argumento por meio de uma árvore.
- Suponha que registremos a ordem de todos os 100 atletas.

(a) Quantos resultados diferentes podemos então ter?

Resp. $100!$

(b) Quantos desses dão o mesmo para os 10 primeiros lugares?

Resp. $(100 - 10)!$

O número de subconjuntos ordenados

- Numa competição de 100 atletas, apenas a ordem dos primeiros 10 é registrada. Quantos resultados diferentes tem a competição?

Resp. $100 \cdot 99 \cdot \cdots \cdot 91$.

- Ilustre esse argumento por meio de uma árvore.
- Suponha que registremos a ordem de todos os 100 atletas.

(a) Quantos resultados diferentes podemos então ter?

Resp. $100!$

(b) Quantos desses dão o mesmo para os 10 primeiros lugares?

Resp. $(100 - 10)!$

O número de subconjuntos ordenados

- Poderíamos fazer o mesmo para n atletas com os k primeiros lugares registrados.

Teorema

O número de subconjuntos ordenados com k elementos de um conjunto com n elementos é $n(n-1)\ldots(n-k+1)$.

- Se você generalizar a solução do exercício anterior, você obtém a resposta na forma

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

- Podemos também usar a notação $P(n,k)$.

Exemplos

- Quantas possibilidades há para os três primeiros lugares de uma corrida com 12 cavalos?

Resp. 12.11.10

- Um grupo contem n homens e n mulheres. De quantas maneiras podemos arrumar essas pessoas numa linha se homens e mulheres devem estar alternados?

Resp. $2.n!.n!$

Exemplos

- Quantas possibilidades há para os três primeiros lugares de uma corrida com 12 cavalos?

Resp. 12.11.10

- Um grupo contem n homens e n mulheres. De quantas maneiras podemos arrumar essas pessoas numa linha se homens e mulheres devem estar alternados?

Resp. $2.n!.n!$

Exemplos

- Quantas possibilidades há para os três primeiros lugares de uma corrida com 12 cavalos?

Resp. 12.11.10

- Um grupo contem n homens e n mulheres. De quantas maneiras podemos arrumar essas pessoas numa linha se homens e mulheres devem estar alternados?

Resp. $2.n!.n!$

O número de subconjuntos de um dado tamanho

Teorema

O número de k-subconjuntos de um n-conjunto é

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Recordemos que se contarmos subconjuntos *ordenados*, obtemos $n(n-1)\dots(n-k+1) = n!/(n-k)!$,
- É claro que, se desejamos saber o número de subconjuntos *não-ordenados*, então contamos demais; todo subconjunto foi contado exatamente $k!$ vezes (com toda ordenação possível de seus elementos)
- Portanto temos que dividir esse número por $k!$ para obter o número de subconjuntos com k elementos (sem ordenação).

O número de subconjuntos de um dado tamanho

Teorema

O número de k-subconjuntos de um n-conjunto é

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Recordemos que se contarmos subconjuntos *ordenados*, obtemos $n(n-1)\dots(n-k+1) = n!/(n-k)!$,
- É claro que, se desejamos saber o número de subconjuntos *não-ordenados*, então contamos demais; todo subconjunto foi contado exatamente $k!$ vezes (com toda ordenação possível de seus elementos)
- Portanto temos que dividir esse número por $k!$ para obter o número de subconjuntos com k elementos (sem ordenação).

O número de subconjuntos de um dado tamanho

Teorema

O número de k-subconjuntos de um n-conjunto é

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Recordemos que se contarmos subconjuntos *ordenados*, obtemos $n(n-1)\dots(n-k+1) = n!/(n-k)!$,
- É claro que, se desejamos saber o número de subconjuntos *não-ordenados*, então contamos demais; todo subconjunto foi contado exatamente $k!$ vezes (com toda ordenação possível de seus elementos)
- Portanto temos que dividir esse número por $k!$ para obter o número de subconjuntos com k elementos (sem ordenação).

O número de subconjuntos de um dado tamanho

Teorema

O número de k-subconjuntos de um n-conjunto é

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Recordemos que se contarmos subconjuntos *ordenados*, obtemos $n(n-1)\dots(n-k+1) = n!/(n-k)!$,
- É claro que, se desejamos saber o número de subconjuntos *não-ordenados*, então contamos demais; todo subconjunto foi contado exatamente $k!$ vezes (com toda ordenação possível de seus elementos)
- Portanto temos que dividir esse número por $k!$ para obter o número de subconjuntos com k elementos (sem ordenação).

O número de subconjuntos de um dado tamanho

Teorema

O número de k-subconjuntos de um n-conjunto é

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Recordemos que se contarmos subconjuntos *ordenados*, obtemos $n(n-1)\dots(n-k+1) = n!/(n-k)!$,
- É claro que, se desejamos saber o número de subconjuntos *não-ordenados*, então contamos demais; todo subconjunto foi contado exatamente $k!$ vezes (com toda ordenação possível de seus elementos)
- Portanto temos que dividir esse número por $k!$ para obter o número de subconjuntos com k elementos (sem ordenação).

O número de subconjuntos de um dado tamanho

- O número de k-subconjuntos de um n-conjunto é uma quantidade tão importante que é preciso uma notação separada para ele: $\binom{n}{k}$ (leia: ‘de n escolha k’). Por conseguinte,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1}$$

- Daí o número de bilhetes de loteria diferentes é $\binom{90}{5}$,
- O número de apertos de mãos é $\binom{7}{2}$ etc.
- Os números $\binom{n}{k}$ são também chamados de *coeficientes binomiais*

O número de subconjuntos de um dado tamanho

- O número de k-subconjuntos de um n-conjunto é uma quantidade tão importante que é preciso uma notação separada para ele: $\binom{n}{k}$ (leia: 'de n escolha k'). Por conseguinte,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1}$$

- Daí o número de bilhetes de loteria diferentes é $\binom{90}{5}$,
- O número de apertos de mãos é $\binom{7}{2}$ etc.
- Os números $\binom{n}{k}$ são também chamados de *coeficientes binomiais*

O número de subconjuntos de um dado tamanho

- O número de k-subconjuntos de um n-conjunto é uma quantidade tão importante que é preciso uma notação separada para ele: $\binom{n}{k}$ (leia: 'de n escolha k'). Por conseguinte,
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1}$$
- Daí o número de bilhetes de loteria diferentes é $\binom{90}{5}$,
- O número de apertos de mãos é $\binom{7}{2}$ etc.
- Os números $\binom{n}{k}$ são também chamados de *coeficientes binomiais*

O número de subconjuntos de um dado tamanho

- O número de k-subconjuntos de um n-conjunto é uma quantidade tão importante que é preciso uma notação separada para ele: $\binom{n}{k}$ (leia: ‘de n escolha k’). Por conseguinte,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1}$$

- Daí o número de bilhetes de loteria diferentes é $\binom{90}{5}$,
- O número de apertos de mãos é $\binom{7}{2}$ etc.
- Os números $\binom{n}{k}$ são também chamados de *coeficientes binomiais*

O número de subconjuntos de um dado tamanho

- O número de k-subconjuntos de um n-conjunto é uma quantidade tão importante que é preciso uma notação separada para ele: $\binom{n}{k}$ (leia: ‘de n escolha k’). Por conseguinte,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1}$$

- Daí o número de bilhetes de loteria diferentes é $\binom{90}{5}$,
- O número de apertos de mãos é $\binom{7}{2}$ etc.
- Os números $\binom{n}{k}$ são também chamados de *coeficientes binomiais*

O número de subconjuntos de um dado tamanho

- O número de k-subconjuntos de um n-conjunto é uma quantidade tão importante que é preciso uma notação separada para ele: $\binom{n}{k}$ (leia: 'de n escolha k'). Por conseguinte,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1}$$

- Daí o número de bilhetes de loteria diferentes é $\binom{90}{5}$,
- O número de apertos de mãos é $\binom{7}{2}$ etc.
- Os números $\binom{n}{k}$ são também chamados de *coeficientes binomiais*

O número de subconjuntos de um dado tamanho

- O número de k-subconjuntos de um n-conjunto é uma quantidade tão importante que é preciso uma notação separada para ele: $\binom{n}{k}$ (leia: 'de n escolha k'). Por conseguinte,
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1}$$
- Daí o número de bilhetes de loteria diferentes é $\binom{90}{5}$,
- O número de apertos de mãos é $\binom{7}{2}$ etc.
- Os números $\binom{n}{k}$ são também chamados de *coeficientes binomiais*

Exemplos

- Ache os valores de $\binom{n}{k}$ para $k = 0, 1, n-1, n$ e explique os resultados por meio do significado combinatório de $\binom{n}{k}$.

Igualdades importantes

Teorema

Coeficientes binomiais satisfazem as seguintes igualdades:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}; \tag{2}$$

Se $n, k > 0$, *então*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} (\textit{identidade de PASCAL}); \tag{3}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n. \tag{4}$$

Provando $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

- Temos um conjunto de n-elementos, digamos S. O lado esquerdo conta subconjuntos de k-elementos de S, enquanto que o lado direito conta subconjuntos de $(n-k)$-elementos de S.
- Para ver que esses números são os mesmos, precisamos apenas observar que juntamente com todo subconjunto de k-elementos vai um subconjunto de $(n-k)$-elementos.
- Isso emparelha subconjuntos de k-elementos com os subconjuntos de $(n-k)$-elementos, mostrando que existe o mesmo número de ambos.

Provando $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ (PASCAL)

- Vamos provar algebricamente
- $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}$.
- Podemos dividir ambos os lados por $(n-1)!$, e multiplicar por $(k-1)!(n-k-1)!$; então a identidade fica
- $\frac{n}{k(n-k)} = \frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}$, que pode ser verificada por fácil manipulação algébrica.

Provando $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ (PASCAL)

- Vamos provar pelo significado combinatório.
- Suponha que T é um conjunto cuja cardinalidade é n;
- seja $a \in T$ e seja $S = T - \{a\}$. Logo $\mid S \mid = n - 1$;
- observe que existem $\binom{n}{k}$ subconjuntos de T com k elementos;
- entretanto, um subconjunto de T com k elementos, ou contem a juntamente com os $k - 1$ elementos de S (que resulta em $\binom{n-1}{k-1}$);
- ou contem k elementos de S e não contem a (que dá $\binom{n-1}{k}$);
- logo $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Provando $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ (PASCAL)

- Vamos provar pelo significado combinatório.
- Suponha que T é um conjunto cuja cardinalidade é n;
- seja $a \in T$ e seja $S = T - \{a\}$. Logo $\mid S \mid = n - 1$;
- observe que existem $\binom{n}{k}$ subconjuntos de T com k elementos;
- entretanto, um subconjunto de T com k elementos, ou contem a juntamente com os $k-1$ elementos de S (que resulta em $\binom{n-1}{k-1}$);
- ou contem k elementos de S e não contem a (que dá $\binom{n-1}{k}$);
- logo $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Provando $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ (PASCAL)

- Vamos provar pelo significado combinatório.
- Suponha que T é um conjunto cuja cardinalidade é n;
- seja $a \in T$ e seja $S = T - \{a\}$. Logo $\mid S \mid = n - 1$;
- observe que existem $\binom{n}{k}$ subconjuntos de T com k elementos;
- entretanto, um subconjunto de T com k elementos, ou contem a juntamente com os $k - 1$ elementos de S (que resulta em $\binom{n-1}{k-1}$);
- ou contem k elementos de S e não contem a (que dá $\binom{n-1}{k}$);
- logo $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Provando $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ (PASCAL)

- Vamos provar pelo significado combinatório.
- Suponha que T é um conjunto cuja cardinalidade é n;
- seja $a \in T$ e seja $S = T - \{a\}$. Logo $\mid S \mid= n - 1$;
- observe que existem $\binom{n}{k}$ subconjuntos de T com k elementos;
- entretanto, um subconjunto de T com k elementos, ou contem a juntamente com os $k - 1$ elementos de S (que resulta em $\binom{n-1}{k-1}$;
- ou contem k elementos de S e não contem a (que dá $\binom{n-1}{k}$;
- logo $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Provando $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ (PASCAL)

- Vamos provar pelo significado combinatório.
- Suponha que T é um conjunto cuja cardinalidade é n;
- seja $a \in T$ e seja $S = T - \{a\}$. Logo $\mid S \mid = n - 1$;
- observe que existem $\binom{n}{k}$ subconjuntos de T com k elementos;
- entretanto, um subconjunto de T com k elementos, ou contem a juntamente com os $k - 1$ elementos de S (que resulta em $\binom{n-1}{k-1}$);
- ou contem k elementos de S e não contem a (que dá $\binom{n-1}{k}$);
- logo $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Provando $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ (PASCAL)

- Vamos provar pelo significado combinatório.
- Suponha que T é um conjunto cuja cardinalidade é n;
- seja $a \in T$ e seja $S = T - \{a\}$. Logo $\mid S \mid = n - 1$;
- observe que existem $\binom{n}{k}$ subconjuntos de T com k elementos;
- entretanto, um subconjunto de T com k elementos, ou contem a juntamente com os $k - 1$ elementos de S (que resulta em $\binom{n-1}{k-1}$);
- ou contem k elementos de S e não contem a (que dá $\binom{n-1}{k}$);
- logo $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Provando $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ (PASCAL)

- Vamos provar pelo significado combinatório.
- Suponha que T é um conjunto cuja cardinalidade é n;
- seja $a \in T$ e seja $S = T - \{a\}$. Logo $\mid S \mid = n - 1$;
- observe que existem $\binom{n}{k}$ subconjuntos de T com k elementos;
- entretanto, um subconjunto de T com k elementos, ou contem a juntamente com os $k - 1$ elementos de S (que resulta em $\binom{n-1}{k-1}$;
- ou contem k elementos de S e não contem a (que dá $\binom{n-1}{k}$;
- logo $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Provando a identidade (4)

- $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$.
- Seja S um conjunto de n-elementos.
- O primeiro termo no lado esquerdo conta os subconjuntos de 0-elementos de S (existe apenas um, o conjunto vazio); o segundo termo conta subconjuntos de 1-elemento; o próximo termo, subconjuntos de 2-elementos etc.
- Na soma completa, todo subconjunto de S é contado exatamente uma vez.
- Sabemos que 2^n (o lado direito) é o número de todos os subconjuntos de S.

Exercícios

- Encontre uma prova de (2) usando a fórmula algébrica para $\binom{n}{k}$ e de (3) usando o significado combinatório de ambos os lados.
- Prove que $\binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} = n^2$; dê duas provas, uma usando a interpretação combinatória e a outra, usando a fórmula algébrica para os coeficientes binomiais.

Exercícios

- Encontre uma prova de (2) usando a fórmula algébrica para $\binom{n}{k}$ e de (3) usando o significado combinatório de ambos os lados.
- Prove que $\binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} = n^2$; dê duas provas, uma usando a interpretação combinatória e a outra, usando a fórmula algébrica para os coeficientes binomiais.

Exercícios

- Prove as seguintes identidades usando uma interpretação combinatória.

a) $\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2}$.

b) $\binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \cdots + \binom{n}{k-1}\binom{m}{1} + \binom{n}{k}\binom{m}{0} = \binom{n+m}{k}$.

obs. A identidade **b** é chamada de identidade de *Vandermonde*.

Exercícios

- Prove as seguintes identidades usando uma interpretação combinatória.

a) $\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2}$.

b) $\binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \cdots + \binom{n}{k-1}\binom{m}{1} + \binom{n}{k}\binom{m}{0} = \binom{n+m}{k}$.

obs. A identidade **b** é chamada de identidade de *Vandermonde*.

Exercícios

- Prove as seguintes identidades usando uma interpretação combinatória.

a) $\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2}$.

b) $\binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \cdots + \binom{n}{k-1}\binom{m}{1} + \binom{n}{k}\binom{m}{0} = \binom{n+m}{k}$.

obs. A identidade **b** é chamada de identidade de *Vandermonde*.

Exercícios

- Prove as seguintes identidades usando uma interpretação combinatória.

a) $\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2}$.

b) $\binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \cdots + \binom{n}{k-1}\binom{m}{1} + \binom{n}{k}\binom{m}{0} = \binom{n+m}{k}$.

obs. A identidade **b** é chamada de identidade de *Vandermonde*.