Definição

Uma relação em um conjunto A é chamada de relação de equivalência se ela é reflexiva, simétrica e transitiva.

Exemplo

Seja R uma relação de equivalência no conjunto dos números reais de forma que aRb se e somente se $a - b$ é um inteiro. A relação R é uma relação de equivalência ?

Exemplo

Seja m um inteiro positivo maior que 1. *Mostre que a relação* $R = \{(a, b) | a \equiv b (mod\ m)\}$ *é uma relação de equivalência.*

pause

Exemplo

Seja R uma relação de equivalência no conjunto dos pares ordenados de inteiros positivos de forma que $((a, b), (c, d)) \in R$ *se e somente se* $ad = bc$. *Mostre que R é uma relação de equivalência.*

Definição

Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A. O conjunto de todos os elementos que estão relacionados com um elemento a de A é chamado de classe de equivalência *de a, e é denotada por* $[a]_R$ *(podemos denotar apenas por* $[a]$ *se deixamos claro quem é R).*

- $[a]_R = \{s|(a,s) \in \mathrm{R}\}$
- Se $b \in [a]_R$ então b é chamado de **representante** dessa classe de equivalência

Exemplo

Quais são as classes de equivalência de 0 *e de* 1 *para a relação congruência módulo* 4*?*

- As classes de equivalência da relação de de congruência módulo m são chamadas de **classes de congruência módulo m.**
- A classe de congruência de um inteiro a módulo m é denotada por $[a]_m$ e é igual a $\{\ldots, a-2m, a-m, a, a+m, a+2m, \ldots\}$.

Exemplo

Mostre que a relação R no conjunto de todas as cadeias de bits de tamanho 4 definida por sRt se e somente se s e t contêm a mesma quantidade de 1s é uma relação de equivalência.

Exemplo

Qual é a classe de equivalência de 1011 *?*

Teorema

Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A. As seguintes sentenças são equivalentes:

1. $a \, R \, b$;
2. $[a] = [b]$
3. $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

Partição de um conjunto

- Vamos entender como uma relação de equivalência particiona um conjunto.
- Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A. A união das classes de equivalência de R é igual a A:
  - $\bigcup_{a \in A} [a]_R = A \quad (1)$
- Adicionalmente, ou essas classes de equivalência são iguais ou disjunttas (pelo teorema anterior):
  - $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$ quando $a \neq b \quad (2)$
- Essas duas observações nos levam a concluir que uma relação de equivalência em um conjunto A divide o conjunto A em subconjuntos disjuntos. Mais precisamente, uma **partição** de um conjunto S é uma coleção de subconjuntos disjuntos não vazios de S que possuem S como resultado de sua união.