

Combinando relações

Exemplo

Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$. As relações $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ e $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$ podem ser combinadas para obtermos novas relações:

- $R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
- $R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\}$
- $R_1 - R_2 = \{(2, 2), (3, 3)\}$

Definição

Seja R uma relação de A em B e S uma relação de B em C . A composição de R e S , denotada por $S \circ R$, é a relação que consiste dos pares ordenados (a, c) , onde $a \in A$, $c \in C$, de forma que existe um elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in S$.

Potências de uma relação

Definição

Seja R uma relação em um conjunto A . As potências R^n , $n = 1, 2, 3, \dots$ são definidas indutivamente por

$$R^1 = R \quad e \quad R^{n+1} = R^n \circ R$$

Exemplo

Seja $R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$. Encontre as potências R^n , $n = 2, 3, 4, \dots$

Teorema

A relação R em um conjunto A é transitiva se e somente se $R^n \subseteq R$ para $n = 2, 3, 4, \dots$

Representação usando matrizes

- Matriz de bits;
- Identificando as propriedades;
- Operações de união, interseção e complemento;
- Composição: $M_{S \circ R} = M_R \odot M_S$ (Produto booleano)

Representação usando digrafos

Definição

Um grafo direcionado ou digrafo, consiste de um conjunto V de vértices (ou nós) juntamente com um conjunto E de pares ordenados de elementos de V chamados de arestas (ou arcos). O vértice a é chamado vértice inicial da aresta (a, b) , e o vértice b é chamado de vértice final ou terminal dessa aresta.

- A aresta da forma (a, a) é chamada de **loop**.
- Identificando as propriedades.

Seja R uma relação em A

- Fecho reflexivo de $R = R \cup \Delta$,
 - onde $\Delta = \{(a, a) | a \in A\}$ (relação diagonal em A);
- Fecho simétrico de $R = R \cup R^{-1}$

Caminho em um digrafo

Definição

Um caminho de a para b em um digrafo G é uma sequência de uma ou mais arestas $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n)$ em G , onde $x_0 = a$ e $x_n = b$, ou seja, existe uma sequência de arestas onde o vértice final de uma aresta é o mesmo vértice inicial da próxima aresta do caminho. Esse caminho é denotado por $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ e possui tamanho n . Um caminho que começa e termina no mesmo vértice é chamado de circuito ou ciclo.

- Caminho e Relação.

- O seguinte teorema pode ser obtido da definição de um caminho em uma relação.

Teorema

Seja R uma relação em um conjunto A . Existe um caminho de tamanho n de a para b se e somente se $(a, b) \in R^n$.

Fecho transitivo

Definição

Seja R uma relação em um conjunto A . A relação de conectividade R^ consiste dos pares (a, b) de forma que existe um caminho de a para b em R .*

- Observe que $R^* = R \cup R^2 \cup R^3 \dots$

Teorema

O fecho transitivo de R é igual à relação de conectividade.

Lema

Seja A um conjunto com n elementos, e seja R uma relação em A . Se existe um caminho em R de a para b , então esse caminho não é maior que n . Adicionalmente, quando $a \neq b$, se existe um caminho em R de a para b , então esse tamanho desse caminho não é maior que $n - 1$.

- Por esse lema, vemos que o fecho transitivo de R é igual a $R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots \cup R^n$.

Teorema

Seja M_R a matriz de bits que representa a relação R em um conjunto com n elementos. Então, a matriz de bits do fecho transitivo R^ de R é*

$$M_{R^*} = M_R \vee M_{R^2} \vee M_{R^3} \vee \dots \vee M_{R^n}$$