Combinando relações

Exemplo

Seja $A = \{1, 2, 3\}$ *e* $B = \{1, 2, 3, 4\}$*. As relações* $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ *e* $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$ *podem ser combinadas para obtermos novas relações:*

- $R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
- $R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\}$
- $R_1 - R_2 = \{(2, 2), (3, 3)\}$

Combinando relações

Exemplo

Seja $A = \{1, 2, 3\}$ *e* $B = \{1, 2, 3, 4\}$*. As relações* $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ *e* $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$ *podem ser combinadas para obtermos novas relações:*

- $R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
- $R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\}$
- $R_1 - R_2 = \{(2, 2), (3, 3)\}$

Combinando relações

Exemplo

Seja $A = \{1, 2, 3\}$ *e* $B = \{1, 2, 3, 4\}$*. As relações* $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ *e* $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$ *podem ser combinadas para obtermos novas relações:*

- $R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
- $R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\}$
- $R_1 - R_2 = \{(2, 2), (3, 3)\}$

Definição

Seja R uma relação de A em B e S uma relação de B em C. A composição de R e S, denotada por $S \circ R$, é a relação que consiste dos pares ordenados (a, c), onde $a \in A$, $c \in C$, de forma que existe um elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in S$.

Potências de uma relação

Definição

Seja R uma relação em um conjunto A. As potências R^n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ são definidas indutivamente por

$$R^1 = R \quad e \quad R^{n+1} = R^n \circ R$$

Exemplo

Seja $R = \{(1,1),(2,1),(3,2),(4,3)\}$. Encontre as potências R^n, $n = 2, 3, 4 \ldots$.

Teorema

A relação R em um conjunto A é transitiva se e somente se $R^n \subseteq R$ *para* $n = 2, 3, 4 \ldots$.

Representação usando matrizes

- Matriz de bits;
- Identificando as propriedades;
- Operações de união, interseção e complemento;
- Composição: $M_{S \circ R} = M_R \odot M_S$ (Produto booleano)

Representação usando matrizes

- Matriz de bits;
- Identificando as propriedades;
- Operações de união, interseção e complemento;
- Composição: $M_{S \circ R} = M_R \odot M_S$ (Produto booleano)

Representação usando matrizes

- Matriz de bits;
- Identificando as propriedades;
- Operações de união, interseção e complemento;
- Composição: $M_{S \circ R} = M_R \odot M_S$ (Produto booleano)

Representação usando matrizes

- Matriz de bits;
- Identificando as propriedades;
- Operações de união, interseção e complemento;
- Composição: $M_{S \circ R} = M_R \odot M_S$ (Produto booleano)

Representação usando digrafos

Definição

Um grafo direcionado ou digrafo, consiste de um conjunto V de vértices *(ou* nós *) juntamente com um conjunto E de pares ordenados de elementos de V chamados de* arestas *(ou* arcos *). O vértice a é chamado vértice inicial da aresta (a, b), e o vértice b é chamado de vértice final ou terminal dessa aresta.*

- A aresta da forma (a, a) é chamada de **loop**.
- Identificando as propriedades.

Representação usando digrafos

Definição

Um grafo direcionado ou digrafo, consiste de um conjunto V de vértices *(ou* nós *) juntamente com um conjunto E de pares ordenados de elementos de V chamados de* arestas *(ou* arcos *). O vértice a é chamado vértice inicial da aresta (a, b), e o vértice b é chamado de vértice final ou terminal dessa aresta.*

- A aresta da forma (a, a) é chamada de **loop.**
- Identificando as propriedades.

Representação usando digrafos

Definição

Um grafo direcionado ou digrafo, consiste de um conjunto V de vértices *(ou* nós *) juntamente com um conjunto E de pares ordenados de elementos de V chamados de* arestas *(ou* arcos *). O vértice a é chamado vértice inicial da aresta (a, b), e o vértice b é chamado de vértice final ou terminal dessa aresta.*

- A aresta da forma (a, a) é chamada de **loop**.
- Identificando as propriedades.

Seja R uma relação em A

- Fecho reflexivo de $R = R \cup \Delta$,
  - onde $\Delta = \{(a, a) | a \in A\}$ (relação diagonal em A);
- Fecho simétrico de $R = R \cup R^{-1}$

Seja R uma relação em A

- Fecho reflexivo de $R = R \cup \Delta$,
  - onde $\Delta = \{(a, a) | a \in A\}$ (relação diagonal em A);
- Fecho simétrico de $R = R \cup R^{-1}$

Caminho em um digrafo

Definição

Um caminho de a para b em um digrafo G é uma sequência de uma ou mais arestas $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \ldots (x_{n-1}, x_n)$ *em G, onde* $x_0 = a$ *e* $x_n = b$*, ou seja, existe uma sequência de arestas onde i vértice final de uma aresta é o mesmo vértice inicial da próxima aresta do caminho. Esse caminho é denotado por* $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}, x_n$ *e possui tamanho n. Um caminho que começa e termina no mesmo vértice é chamado de circuito ou ciclo.*

- Caminho e Relação.

Caminho em um digrafo

Definição

Um caminho de a para b em um digrafo G é uma sequência de uma ou mais arestas $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \ldots (x_{n-1}, x_n)$ *em G, onde* $x_0 = a$ *e* $x_n = b$*, ou seja, existe uma sequência de arestas onde i vértice final de uma aresta é o mesmo vértice inicial da próxima aresta do caminho. Esse caminho é denotado por* $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}, x_n$ *e possui tamanho n. Um caminho que começa e termina no mesmo vértice é chamado de circuito ou ciclo.*

- Caminho e Relação.

- O seguinte teorema pode ser obtido da definição de um caminho em uma relação.

Teorema

Seja R uma relação em um conjunto A. Existe um caminho de tamanho n de a para b se e somente se $(a, b) \in R^n$.

Fecho transitivo

Definição

Seja R uma relação em um conjunto A. A relação de conectividade R^* *consiste dos pares* (a, b) *de forma que existe um caminho de a para b em R.*

- Observe que $R^* = R \cup R^2 \cup R^3 \ldots$

Teorema

O fecho transitivo de R é igual à relação de conectividade.

Fecho transitivo

Definição

Seja R uma relação em um conjunto A. A relação de conectividade R^* *consiste dos pares* (a, b) *de forma que existe um caminho de a para b em R.*

- Observe que $R^* = R \cup R^2 \cup R^3 \ldots$

Teorema

O fecho transitivo de R é igual à relação de conectividade.

Fecho transitivo

Definição

Seja R uma relação em um conjunto A. A relação de conectividade R^* *consiste dos pares* (a, b) *de forma que existe um caminho de a para b em R.*

- Observe que $R^* = R \cup R^2 \cup R^3 \ldots$

Teorema

O fecho transitivo de R é igual à relação de conectividade.

Lema

Seja A um conjunto com n elementos, e seja R uma relação em A. Se existe um caminho em R de a para b, então esse caminho não é maio que n. Adicionalmente, quando $a \neq b$, se existe um caminho em R de a para b, então esse otamanho desse caminho não é maior que $n - 1$.

- Por esse lema, vemos que o fecho transitivo de R é igual a $R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n$.

Teorema

Seja M_R a matriz de bits que representa a relação R em um conjunto com n elementos. Então, a matriz de bits do fecho transitivo R^* de R é

$$M_{R^*} = M_R \vee M_{R^2} \vee M_{R^3} \vee \ldots \vee M_{R^n}$$

Lema

Seja A um conjunto com n elementos, e seja R uma relação em A. Se existe um caminho em R de a para b, então esse caminho não é maio que n. Adicionalmente, quando $a \neq b$, se existe um caminho em R de a para b, então esse otamanho desse caminho não é maior que $n - 1$.

- Por esse lema, vemos que o fecho transitivo de R é igual a $R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n$.

Teorema

Seja M_R a matriz de bits que representa a relação R em um conjunto com n elementos. Então, a matriz de bits do fecho transitivo R^* de R é

$$M_{R^*} = M_R \vee M_{R^2} \vee M_{R^3} \vee \ldots \vee M_{R^n}$$

Lema

Seja A um conjunto com n elementos, e seja R uma relação em A. Se existe um caminho em R de a para b, então esse caminho não é maio que n. Adicionalmente, quando $a \neq b$, se existe um caminho em R de a para b, então esse otamanho desse caminho não é maior que $n - 1$.

- Por esse lema, vemos que o fecho transitivo de R é igual a $R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n$.

Teorema

Seja M_R a matriz de bits que representa a relação R em um conjunto com n elementos. Então, a matriz de bits do fecho transitivo R^* de R é

$$M_{R^*} = M_R \vee M_{R^2} \vee M_{R^3} \vee \ldots \vee M_{R^n}$$