

Notas sobre Conjuntos(2)

Anjolina Grisi de Oliveira

Centro de Informática
Universidade Federal de Pernambuco

2007.2 / CIn-UFPE

Operações Básicas

Definição (União)

Sejam A e B dois conjuntos arbitrários. A união dos conjuntos A e B , denotada por $A \cup B$, é o conjunto que contém aqueles elementos que estão ou em A ou em B , ou em ambos.

- $A \cup B : \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$

Operações Básicas

Definição (Interseção)

Sejam A e B dois conjuntos arbitrários. A interseção dos conjuntos A e B , denotada por $A \cap B$, é o conjunto que contém aqueles elementos que estão em A e em B ao mesmo tempo.

- $A \cap B : \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$

Operações Básicas

Definição (Conjuntos disjuntos)

Dois conjuntos são chamados de disjuntos se a sua interseção é vazia.

- Qual a cardinalidade de $|A \cup B|$?

• princípio da inclusão-exclusão

Operações Básicas

Definição (Conjuntos disjuntos)

Dois conjuntos são chamados de disjuntos se a sua interseção é vazia.

- Qual a cardinalidade de $|A \cup B|$?

• princípio da inclusão-exclusão

Operações Básicas

Definição (Conjuntos disjuntos)

Dois conjuntos são chamados de disjuntos se a sua interseção é vazia.

- Qual a cardinalidade de $|A \cup B|$?
- **princípio da inclusão-exclusão**

Operações Básicas

Definição (Conjuntos disjuntos)

Dois conjuntos são chamados de disjuntos se a sua interseção é vazia.

- Qual a cardinalidade de $|A \cup B|$?
- **princípio da inclusão-exclusão**

Operações Básicas

Definição (Conjuntos disjuntos)

Dois conjuntos são chamados de disjuntos se a sua interseção é vazia.

- Qual a cardinalidade de $|A \cup B|$?
- **princípio da inclusão-exclusão**

Operações Básicas

Definição (Diferença)

*Sejam A e B dois conjuntos arbitrários. A diferença entre A e B , denotada por $A - B$, é o conjunto que contém aqueles elementos que estão em A mas não estão em B . A diferença de A e B também é chamada de **complemento de B em relação a A** .*

- $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\};$

Definição (Complemento)

Seja U o conjunto universo. O complemento do conjunto A , denotado por $\bar{A}$ ou por A' , é o complemento de A em relação a U . Em outras palavras, o complemento do conjunto A é $U - A$.

- $\bar{A} = \{x \mid x \notin A\}.$

Identities entre conjuntos

- **comutatividade:** 1a. $A \cup B = B \cup A$ e 1b. $A \cap B = B \cap A$
- **associatividade:** 2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e 2b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- **distributividade:** 3a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e 3b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- **identidade:** 4a. $A \cup \emptyset = A$ e 4b. $A \cap U = A$
- **dominação:** 5a. $A \cup U = U$ e 5b. $A \cap \emptyset = \emptyset$
- **complemento:** 6a. $A \cup A' = U$ e 6b. $A \cap A' = \emptyset$
- **complemento:** 6c. $(A')' = A$
- **idempotência:** 7a. $A \cup A = A$ e 7b. $A \cap A = A$
- **Leis de De Morgan:** 8a. $(A \cup B)' = A' \cap B'$ e 8b. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Identities entre conjuntos

- comutatividade: 1a. $A \cup B = B \cup A$ e 1b. $A \cap B = B \cap A$
- associatividade: 2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e 2b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- distributividade: 3a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e 3b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- identidade: 4a. $A \cup \emptyset = A$ e 4b. $A \cap U = A$
- dominação: 5a. $A \cup U = U$ e 5b. $A \cap \emptyset = \emptyset$
- complemento: 6a. $A \cup A' = U$ e 6b. $A \cap A' = \emptyset$
- complemento: 6c. $(A')' = A$
- idempotência: 7a. $A \cup A = A$ e 7b. $A \cap A = A$
- Leis de De Morgan: 8a. $(A \cup B)' = A' \cap B'$ e 8b. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Identities entre conjuntos

- comutatividade: 1a. $A \cup B = B \cup A$ e 1b. $A \cap B = B \cap A$
- associatividade: 2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e 2b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- distributividade: 3a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e 3b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- identidade: 4a. $A \cup \emptyset = A$ e 4b. $A \cap U = A$
- dominação: 5a. $A \cup U = U$ e 5b. $A \cap \emptyset = \emptyset$
- complemento: 6a. $A \cup A' = U$ e 6b. $A \cap A' = \emptyset$
- complemento: 6c. $(A')' = A$
- idempotência: 7a. $A \cup A = A$ e 7b. $A \cap A = A$
- Leis de De Morgan: 8a. $(A \cup B)' = A' \cap B'$ e 8b. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Identidades entre conjuntos

- comutatividade: 1a. $A \cup B = B \cup A$ e 1b. $A \cap B = B \cap A$
- associatividade: 2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e
2b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- distributividade: 3a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e
3b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- identidade: 4a. $A \cup \emptyset = A$ e 4b. $A \cap U = A$
- dominação: 5a. $A \cup U = U$ e 5b. $A \cap \emptyset = \emptyset$
- complemento: 6a. $A \cup A' = U$ e 6b. $A \cap A' = \emptyset$
- complemento: 6c. $(A')' = A$
- idempotência: 7a. $A \cup A = A$ e 7b. $A \cap A = A$
- Leis de De Morgan: 8a. $(A \cup B)' = A' \cap B'$ e
8b. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Identidades entre conjuntos

- comutatividade: 1a. $A \cup B = B \cup A$ e 1b. $A \cap B = B \cap A$
- associatividade: 2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e
2b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- distributividade: 3a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e
3b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- identidade: 4a. $A \cup \emptyset = A$ e 4b. $A \cap U = A$
- dominação: 5a. $A \cup U = U$ e 5b. $A \cap \emptyset = \emptyset$
- complemento: 6a. $A \cup A' = U$ e 6b. $A \cap A' = \emptyset$
- complemento: 6c. $(A')' = A$
- idempotência: 7a. $A \cup A = A$ e 7b. $A \cap A = A$
- Leis de De Morgan: 8a. $(A \cup B)' = A' \cap B'$ e
8b. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Identidades entre conjuntos

- comutatividade: 1a. $A \cup B = B \cup A$ e 1b. $A \cap B = B \cap A$
- associatividade: 2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e 2b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- distributividade: 3a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e 3b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- identidade: 4a. $A \cup \emptyset = A$ e 4b. $A \cap U = A$
- dominação: 5a. $A \cup U = U$ e 5b. $A \cap \emptyset = \emptyset$
- complemento: 6a. $A \cup A' = U$ e 6b. $A \cap A' = \emptyset$
- complemento: 6c. $(A')' = A$
- idempotência: 7a. $A \cup A = A$ e 7b. $A \cap A = A$
- Leis de De Morgan: 8a. $(A \cup B)' = A' \cap B'$ e 8b. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Identities entre conjuntos

- comutatividade: 1a. $A \cup B = B \cup A$ e 1b. $A \cap B = B \cap A$
- associatividade: 2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e 2b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- distributividade: 3a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e 3b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- identidade: 4a. $A \cup \emptyset = A$ e 4b. $A \cap U = A$
- dominação: 5a. $A \cup U = U$ e 5b. $A \cap \emptyset = \emptyset$
- complemento: 6a. $A \cup A' = U$ e 6b. $A \cap A' = \emptyset$
- complemento: 6c. $(A')' = A$
- idempotência: 7a. $A \cup A = A$ e 7b. $A \cap A = A$
- Leis de De Morgan: 8a. $(A \cup B)' = A' \cap B'$ e 8b. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Identidades entre conjuntos

- comutatividade: 1a. $A \cup B = B \cup A$ e 1b. $A \cap B = B \cap A$
- associatividade: 2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e
2b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- distributividade: 3a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e
3b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- identidade: 4a. $A \cup \emptyset = A$ e 4b. $A \cap U = A$
- dominação: 5a. $A \cup U = U$ e 5b. $A \cap \emptyset = \emptyset$
- complemento: 6a. $A \cup A' = U$ e 6b. $A \cap A' = \emptyset$
- complemento: 6c. $(A')' = A$
- idempotência: 7a. $A \cup A = A$ e 7b. $A \cap A = A$
- Leis de De Morgan: 8a. $(A \cup B)' = A' \cap B'$ e
8b. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Identidades entre conjuntos

- comutatividade: 1a. $A \cup B = B \cup A$ e 1b. $A \cap B = B \cap A$
- associatividade: 2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e
2b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- distributividade: 3a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e
3b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- identidade: 4a. $A \cup \emptyset = A$ e 4b. $A \cap U = A$
- dominação: 5a. $A \cup U = U$ e 5b. $A \cap \emptyset = \emptyset$
- complemento: 6a. $A \cup A' = U$ e 6b. $A \cap A' = \emptyset$
- complemento: 6c. $(A')' = A$
- idempotência: 7a. $A \cup A = A$ e 7b. $A \cap A = A$
- Leis de De Morgan: 8a. $(A \cup B)' = A' \cap B'$ e
8b. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Exemplo 1

Exemplo

Prove que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

1 Suponha que $x \in \overline{A \cap B}$.

2 De 1 temos que $x \notin A \cap B$.

3 De 2 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.

4 De 3 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$. Consequentemente,
 $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.

5 Provamos então que $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1

Exemplo

Prove que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

- 1 Suponha que $x \in \overline{A \cap B}$.
- 2 De 1 temos que $x \notin A \cap B$.
- 3 De 2 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.
- 4 De 3 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$. Consequentemente, $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.
- 5 Provamos então que $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1

Exemplo

Prove que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

1 Suponha que $x \in \overline{A \cap B}$.

2 De 1 temos que $x \notin A \cap B$.

3 De 2 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.

4 De 3 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$. Consequentemente,
 $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.

5 Provamos então que $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1

Exemplo

Prove que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

- 1 Suponha que $x \in \overline{A \cap B}$.
- 2 De 1 temos que $x \notin A \cap B$.
- 3 De 2 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.
- 4 De 3 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$. Consequentemente, $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.
- 5 Provamos então que $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1

Exemplo

Prove que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

- 1 Suponha que $x \in \overline{A \cap B}$.
- 2 De 1 temos que $x \notin A \cap B$.
- 3 De 2 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.
- 4 De 3 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$. Consequentemente, $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.
- 5 Provamos então que $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1

Exemplo

Prove que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

- 1 Suponha que $x \in \overline{A \cap B}$.
- 2 De 1 temos que $x \notin A \cap B$.
- 3 De 2 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.
- 4 De 3 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$. Consequentemente, $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.
- 5 Provamos então que $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1

Exemplo

Prove que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

- 1 Suponha que $x \in \overline{A \cap B}$.
- 2 De 1 temos que $x \notin A \cap B$.
- 3 De 2 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.
- 4 De 3 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$. Consequentemente, $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.
- 5 Provamos então que $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1

Exemplo

Prove que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

- 1 Suponha que $x \in \overline{A \cap B}$.
- 2 De 1 temos que $x \notin A \cap B$.
- 3 De 2 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.
- 4 De 3 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$. Consequentemente, $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.
- 5 Provamos então que $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1

Exemplo

Prove que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

- 1 Suponha que $x \in \overline{A \cap B}$.
- 2 De 1 temos que $x \notin A \cap B$.
- 3 De 2 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.
- 4 De 3 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$. Consequentemente, $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.
- 5 Provamos então que $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1

Exemplo

Prove que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

- 1 Suponha que $x \in \overline{A \cap B}$.
- 2 De 1 temos que $x \notin A \cap B$.
- 3 De 2 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.
- 4 De 3 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$. Consequentemente, $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.
- 5 Provamos então que $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1

Exemplo

Prove que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

- 1 Suponha que $x \in \overline{A \cap B}$.
- 2 De 1 temos que $x \notin A \cap B$.
- 3 De 2 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.
- 4 De 3 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$. Consequentemente, $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.
- 5 Provamos então que $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1 (Cont.)

6 Suponha que $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.

7 De 6 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$.

8 De 7 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.

9 De 8 temos que $x \notin A \cap B$. Consequentemente, $x \in \overline{A \cap B}$.

9 Provamos então que $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

10 A partir de 5 e 10 provamos que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1 (Cont.)

6 Suponha que $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.

7 De 6 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$.

8 De 7 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.

9 De 8 temos que $x \notin A \cap B$. Consequentemente, $x \in \overline{A \cap B}$.

9 Provamos então que $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

10 A partir de 5 e 10 provamos que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1 (Cont.)

6 Suponha que $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.

7 De 6 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$.

8 De 7 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.

9 De 8 temos que $x \notin A \cap B$. Consequentemente, $x \in \overline{A \cap B}$.

9 Provamos então que $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

10 A partir de 5 e 10 provamos que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1 (Cont.)

6 Suponha que $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.

7 De 6 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$.

8 De 7 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.

9 De 8 temos que $x \notin A \cap B$. Consequentemente, $x \in \overline{A \cap B}$.

9 Provamos então que $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

10 A partir de 5 e 10 provamos que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1 (Cont.)

6 Suponha que $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.

7 De 6 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$.

8 De 7 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.

9 De 8 temos que $x \notin A \cap B$. Consequentemente, $x \in \overline{A \cap B}$.

9 Provamos então que $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

10 A partir de 5 e 10 provamos que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1 (Cont.)

6 Suponha que $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.

7 De 6 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$.

8 De 7 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.

9 De 8 temos que $x \notin A \cap B$. Consequentemente, $x \in \overline{A \cap B}$.

9 Provamos então que $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

10 A partir de 5 e 10 provamos que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1 (Cont.)

6 Suponha que $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.

7 De 6 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$.

8 De 7 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.

9 De 8 temos que $x \notin A \cap B$. Consequentemente, $x \in \overline{A \cap B}$.

9 Provamos então que $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

10 A partir de 5 e 10 provamos que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1 (Cont.)

6 Suponha que $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.

7 De 6 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$.

8 De 7 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.

9 De 8 temos que $x \notin A \cap B$. Consequentemente, $x \in \overline{A \cap B}$.

9 Provamos então que $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

10 A partir de 5 e 10 provamos que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1 (Cont.)

6 Suponha que $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.

7 De 6 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$.

8 De 7 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.

9 De 8 temos que $x \notin A \cap B$. Consequentemente, $x \in \overline{A \cap B}$.

9 Provamos então que $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

10 A partir de 5 e 10 provamos que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1 (Cont.)

6 Suponha que $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.

7 De 6 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$.

8 De 7 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.

9 De 8 temos que $x \notin A \cap B$. Consequentemente, $x \in \overline{A \cap B}$.

9 Provamos então que $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

10 A partir de 5 e 10 provamos que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1 (Cont.)

- 6 Suponha que $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.
- 7 De 6 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$.
- 8 De 7 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.
- 9 De 8 temos que $x \notin A \cap B$. Consequentemente, $x \in \overline{A \cap B}$.
- 9 Provamos então que $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.
- 10 A partir de 5 e 10 provamos que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1 (Cont.)

- 6 Suponha que $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.
- 7 De 6 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$.
- 8 De 7 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.
- 9 De 8 temos que $x \notin A \cap B$. Consequentemente, $x \in \overline{A \cap B}$.
- 9 Provamos então que $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.
- 10 A partir de 5 e 10 provamos que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 1 (Cont.)

- 6 Suponha que $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.
- 7 De 6 temos que $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$.
- 8 De 7 temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$.
- 9 De 8 temos que $x \notin A \cap B$. Consequentemente, $x \in \overline{A \cap B}$.
- 9 Provamos então que $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.
- 10 A partir de 5 e 10 provamos que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplo 2

Exemplo

Use as identidades entre conjuntos para provar que

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}.$$

1 **pela primeira lei de De Morgan inferimos**

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = \bar{A} \cap \overline{(B \cap C)}.$$

2 $= \bar{A} \cap (\bar{B} \cup \bar{C})$ (pela segunda lei de De Morgan).

3 $= (\bar{B} \cup \bar{C}) \cap \bar{A}$ (pela comutatividade da interseção).

4 $= (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$ (pela comutatividade da união)

Exemplo 2

Exemplo

Use as identidades entre conjuntos para provar que
$$\overline{A \cup (B \cap C)} = (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}.$$

1 pela primeira lei de De Morgan inferimos

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = \bar{A} \cap \overline{(B \cap C)}.$$

2 $= \bar{A} \cap (\bar{B} \cup \bar{C})$ (pela segunda lei de De Morgan).

3 $= (\bar{B} \cup \bar{C}) \cap \bar{A}$ (pela comutatividade da interseção).

4 $= (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$ (pela comutatividade da união)

Exemplo 2

Exemplo

Use as identidades entre conjuntos para provar que
 $\overline{A \cup (B \cap C)} = (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}.$

1 pela primeira lei de De Morgan inferimos

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = \bar{A} \cap \overline{(B \cap C)}.$$

2 $= \bar{A} \cap (\bar{B} \cup \bar{C})$ (pela segunda lei de De Morgan).

3 $= (\bar{B} \cup \bar{C}) \cap \bar{A}$ (pela comutatividade da interseção).

4 $= (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$ (pela comutatividade da união)

Exemplo 2

Exemplo

Use as identidades entre conjuntos para provar que
$$\overline{A \cup (B \cap C)} = (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}.$$

1 pela primeira lei de De Morgan inferimos

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = \bar{A} \cap \overline{(B \cap C)}.$$

2 $= \bar{A} \cap (\bar{B} \cup \bar{C})$ (pela segunda lei de De Morgan).

3 $= (\bar{B} \cup \bar{C}) \cap \bar{A}$ (pela comutatividade da interseção).

4 $= (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$ (pela comutatividade da união)

Exemplo 2

Exemplo

Use as identidades entre conjuntos para provar que

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}.$$

- 1 pela primeira lei de De Morgan inferimos

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = \bar{A} \cap \overline{(B \cap C)}.$$
- 2
$$= \bar{A} \cap (\bar{B} \cup \bar{C})$$
 (pela segunda lei de De Morgan).
- 3
$$= (\bar{B} \cup \bar{C}) \cap \bar{A}$$
 (pela comutatividade da interseção).
- 4
$$= (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$$
 (pela comutatividade da união)

Exemplo 2

Exemplo

Use as identidades entre conjuntos para provar que
 $\overline{A \cup (B \cap C)} = (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}.$

1 pela primeira lei de De Morgan inferimos

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = \bar{A} \cap \overline{(B \cap C)}.$$

2 $= \bar{A} \cap (\bar{B} \cup \bar{C})$ (pela segunda lei de De Morgan).

3 $= (\bar{B} \cup \bar{C}) \cap \bar{A}$ (pela comutatividade da interseção).

4 $= (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$ (pela comutatividade da união)

Exemplo 2

Exemplo

Use as identidades entre conjuntos para provar que
 $\overline{A \cup (B \cap C)} = (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}.$

- 1 pela primeira lei de De Morgan inferimos
 $\overline{A \cup (B \cap C)} = \bar{A} \cap \overline{(B \cap C)}.$
- 2 $= \bar{A} \cap (\bar{B} \cup \bar{C})$ (pela segunda lei de De Morgan).
- 3 $= (\bar{B} \cup \bar{C}) \cap \bar{A}$ (pela comutatividade da interseção).
- 4 $= (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$ (pela comutatividade da união)

Exemplo 2

Exemplo

Use as identidades entre conjuntos para provar que
 $\overline{A \cup (B \cap C)} = (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}.$

- 1 pela primeira lei de De Morgan inferimos
 $\overline{A \cup (B \cap C)} = \bar{A} \cap \overline{(B \cap C)}.$
- 2 $= \bar{A} \cap (\bar{B} \cup \bar{C})$ (pela segunda lei de De Morgan).
- 3 $= (\bar{B} \cup \bar{C}) \cap \bar{A}$ (pela comutatividade da interseção).
- 4 $= (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$ (pela comutatividade da união)

Exemplo 2

Exemplo

Use as identidades entre conjuntos para provar que
 $\overline{A \cup (B \cap C)} = (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}.$

- 1 pela primeira lei de De Morgan inferimos
 $\overline{A \cup (B \cap C)} = \bar{A} \cap \overline{(B \cap C)}.$
- 2 $= \bar{A} \cap (\bar{B} \cup \bar{C})$ (pela segunda lei de De Morgan).
- 3 $= (\bar{B} \cup \bar{C}) \cap \bar{A}$ (pela comutatividade da interseção).
- 4 $= (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$ (pela comutatividade da união)

Generalizando união e interseção

- Os conceitos de *união* e *interseção* entre conjuntos podem ser aplicados à uma coleção de conjuntos. Nesse caso, a notação utilizada é definida como a seguir:

1 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$ denota a união dos conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$.

2 $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i$ denota a interseção dos conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Generalizando união e interseção

- Os conceitos de *união* e *interseção* entre conjuntos podem ser aplicados à uma coleção de conjuntos. Nesse caso, a notação utilizada é definida como a seguir:

1 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$ denota a união dos conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$.

2 $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i$ denota a interseção dos conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Generalizando união e interseção

- Os conceitos de *união* e *interseção* entre conjuntos podem ser aplicados à uma coleção de conjuntos. Nesse caso, a notação utilizada é definida como a seguir:

1 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$ denota a união dos conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$.

2 $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i$ denota a interseção dos conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Generalizando união e interseção

- Os conceitos de *união* e *interseção* entre conjuntos podem ser aplicados à uma coleção de conjuntos. Nesse caso, a notação utilizada é definida como a seguir:

1 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$ denota a união dos conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$.

2 $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i$ denota a interseção dos conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Generalizando união e interseção

- Dessa forma, responda as seguintes questões:

1 Seja

$A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $C = \{0, 3, 6, 9\}$.

Quais são os conjuntos $A \cup B \cup C$ e $A \cap B \cap C$?

2 Seja $A_i = \{i, i+1, i+2, \dots\}$. Encontre $\bigcup_{i=1}^n A_i$ e $\bigcap_{i=1}^n A_i$.

3 Seja $A_i = \{1, 2, 3, \dots, i\}$. Encontre $\bigcup_{i=1}^n A_i$ e $\bigcap_{i=1}^n A_i$.

Generalizando união e interseção

- Dessa forma, responda as seguintes questões:

1 Seja

$$A = \{0, 2, 4, 6, 8\}, \quad B = \{0, 1, 2, 3, 4\} \text{ e } C = \{0, 3, 6, 9\}.$$

Quais são os conjuntos $A \cup B \cup C$ e $A \cap B \cap C$?

2 Seja $A_i = \{i, i + 1, i + 2, \dots\}$. Encontre $\bigcup_{i=1}^n A_i$ e $\bigcap_{i=1}^n A_i$.

3 Seja $A_i = \{1, 2, 3, \dots, i\}$. Encontre $\bigcup_{i=1}^n A_i$ e $\bigcap_{i=1}^n A_i$.

Generalizando união e interseção

- Dessa forma, responda as seguintes questões:

① Seja

$$A = \{0, 2, 4, 6, 8\}, \quad B = \{0, 1, 2, 3, 4\} \text{ e } C = \{0, 3, 6, 9\}.$$

Quais são os conjuntos $A \cup B \cup C$ e $A \cap B \cap C$?

② Seja $A_i = \{i, i+1, i+2, \dots\}$. Encontre $\bigcup_{i=1}^n A_i$ e $\bigcap_{i=1}^n A_i$.

③ Seja $A_i = \{1, 2, 3, \dots, i\}$. Encontre $\bigcup_{i=1}^n A_i$ e $\bigcap_{i=1}^n A_i$.

- 1 Determine se cada uma das sentenças abaixo é verdadeira ou falsa.
 - 1 $x \in \{x\}$
 - 2 $\{x\} \subseteq \{x\}$
 - 3 $\{x\} \in \{x\}$
 - 4 $\{x\} \in \{\{x\}\}$
 - 5 $\emptyset \subseteq \{x\}$
 - 6 $\emptyset \in \{\{x\}\}$
- 2 Suponha que A, B e C são conjuntos tal que $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$. Mostre que $A \subseteq C$.
- 3 Encontre um exemplo de dois conjuntos A e B de forma que $A \in B$ e $A \subseteq B$.
- 4 Determine se cada um dos seguintes conjuntos é o conjunto das partes de algum conjunto.
 - 1 $\emptyset$
 - 2 $\{\emptyset, \{a\}\}$
 - 3 $\{\emptyset, \{a\}, \{\emptyset, a\}\}$

- 4 $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
- 5 Encontre os conjuntos A e B se $A - B = \{1, 5, 7, 8\}$, $B - A = \{2, 10\}$, e $A \cap B = \{3, 6, 9\}$.
- 6 Prove que se A e B são conjuntos então $A - B = A \cap \bar{B}$.
- 7 Sejam A , B e C conjuntos. Prove que:
 - 1 $(A \cap B) \subseteq A$
 - 2 $A - B \subseteq A$
 - 3 $A \cap (B - A) = \emptyset$
 - 4 $\overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$
 - 5 $(B - A) \cup (C - A) = (B \cup C) - A$
 - 6 $A \cup (B - A) = A \cup B$
 - 7 $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A$
 - 8 $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$
- 8 $P(A \cup B) \subseteq P(A) \cup P(B)$?

$$P(A \cup B) \subseteq P(A) \cup P(B)?$$

Exemplo

Seja $A = \{1\}$ e $B = \{3\}$. $\{1, 3\} \subseteq A \cup B$ e portanto pertence a $P(A \cup B)$, mas $\{1, 3\}$ não pertence nem a $P(A)$ e nem a $P(B)$, pois $\{1, 3\} \not\subseteq A$ e $\{1, 3\} \not\subseteq B$.

$$P(A \cup B) \subseteq P(A) \cup P(B)?$$

Exemplo

Seja $A = \{1\}$ e $B = \{3\}$. $\{1, 3\} \subseteq A \cup B$ e portanto pertence a $P(A \cup B)$, mas $\{1, 3\}$ não pertence nem a $P(A)$ e nem a $P(B)$, pois $\{1, 3\} \not\subseteq A$ e $\{1, 3\} \not\subseteq B$.

$$P(A \cup B) \subseteq P(A) \cup P(B)?$$

Exemplo

Seja $A = \{1\}$ e $B = \{3\}$. $\{1, 3\} \subseteq A \cup B$ e portanto pertence a $P(A \cup B)$, mas $\{1, 3\}$ não pertence nem a $P(A)$ e nem a $P(B)$, pois $\{1, 3\} \not\subseteq A$ e $\{1, 3\} \not\subseteq B$.

$$P(A \cup B) \subseteq P(A) \cup P(B)?$$

Exemplo

Seja $A = \{1\}$ e $B = \{3\}$. $\{1, 3\} \subseteq A \cup B$ e portanto pertence a $P(A \cup B)$, mas $\{1, 3\}$ não pertence nem a $P(A)$ e nem a $P(B)$, pois $\{1, 3\} \not\subseteq A$ e $\{1, 3\} \not\subseteq B$.

- 1 O que é possível afirmar sobre A e B em cada uma das sentenças abaixo, supondo que cada sentença é verdadeira:
 - 1 $A \cup B = A$
 - 2 $A - B = A$
- 2 Você pode concluir que $A = B$ se A , B e C são conjuntos e $A \cup C = B \cup C$?
- 3 A **diferença simétrica** entre os conjuntos A e B , denotada por $A \otimes B$, é o conjunto que contém todos os elementos que estão em A ou estão em B , mas não em ambos. Com base nessa definição, responda:
 - 1 Encontre a diferença simétrica entre $\{1, 3, 5\}$ e $\{1, 2, 3\}$.
 - 2 Desenhe o diagrama de Venn para $A \otimes B$.
 - 3 Mostre que $A \otimes B = (A \cup B) - (A \cap B)$.
 - 4 Mostre que se A é um subconjunto de um conjunto universal U , então:
 - 1 $A \otimes A = \emptyset$

$$2 \quad A \otimes U = \bar{A}$$

- 4 O *sucessor* de um conjunto A é o conjunto $A \cup \{A\}$.
Encontre o sucessor dos seguintes conjuntos:

$$1 \quad \{1, 2, 3\}$$

$$2 \quad \{\emptyset\}$$

- 5 Em certas situações, o número de vezes que um determinado elemento ocorre em uma coleção não ordenada é relevante para o problema estudado. **Multiconjuntos** são coleções não ordenadas de elementos, onde cada elemento pode ocorrer como membro mais de uma vez. A notação $\{m_1.a_1, m_2.a_2, \dots, m_r.a_r\}$ denota que no multiconjunto o elemento a_1 ocorre m_1 vezes, o elemento a_2 ocorre m_2 vezes, e assim sucessivamente. Os números m_i são chamados de **multiplicidades** dos elementos a_i , onde $i = 1, 2, \dots, r$.

Sejam P e Q multiconjuntos. A *união* de P e Q é o multiconjunto onde a multiplicidade de um elemento é o máximo de suas multiplicidades em P e em Q . A *interseção* de P e Q é o multiconjunto onde a multiplicidade de cada elemento é o mínimo das multiplicidades em P e Q . A *diferença* entre P e Q é o multiconjunto onde a multiplicidade de um elemento é a multiplicidade do elemento em P menos sua multiplicidade em Q , a não ser que a diferença seja negativa, nesse caso a multiplicidade é zero. A *soma* de P e Q é o multiconjunto onde a multiplicidade de um elemento é a soma de suas multiplicidades em P e em Q . A *soma* é denotada por $+$. Com base nessas definições, pergunta-se:

- 1 Sejam A e B os multiconjuntos $\{3.a, 2.b, 1.c\}$ e $\{2.a, 3.b, 4.d\}$, respectivamente. Encontre os multiconjuntos $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$ e $A + B$.