Princípio da Inclusão - Exclusão

1 Teorema

Teorema 1 (Rosen, p.358) *Sejam* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *conjuntos finitos. Então* $\mid A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \mid = \sum_{1 \leq i \leq n} \mid A_i \mid - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mid A_i \cap A_j \mid + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \mid A_i \cap A_j \cap A_k \mid - \ldots + (-1)^{n+1} \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \mid$

Prova

- Será mostrado que um elemento da união é contado apenas uma vez pelo lado direito da equação.
- Suponha que a é membro de extamente r dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, onde $1 \leq r \leq n$.
- Esse elemento é contado $C(r, 1)$ vezes pelo primeiro somatório, $C(r, 2)$ vezes pelo segundo somatório, etc. Assim, esse elemento é contado exatamente:

$$C(r, 1) - C(r, 2) + C(r, 3) - \ldots + (-1)^{r+1} C(r, r)$$

.

- Nosso objetivo é provar que essa quantidade é igual a 1.
- Vimos que $C(r, 0) - C(r, 1) + C(r, 2) - \ldots + (-1)^r C(r, r) = 0$.
- Consequentemente: $1 = C(r, 0) = C(r, 1) - C(r, 2) + \ldots + (-1)^{r+1} C(r, r)$. Logo, cada elemento é contado apenas uma vez.

2 Exercícios

1. Quantos elementos estão em $A \cup B$ se existem 12 elementos em A, 18 elementos em B, e
   (a) $A \cap B = \emptyset$
   (b) $\mid A \cap B \mid = 1$
   (c) $\mid A \cap B \mid = 6$
   (d) $A \subseteq B$
2. Encontre a quantidade de inteiros positivos menores ou iguais a 100 que são ímpares ou o quadrado de um inteiro.

3. Encontre a quantidadde de inteiros positivos menores ou iguais a 100 que não são divisíveis por 5 ou por 7.

4. Quantas cadeias de bits de tamanho 8 não contém 6 zeros consecutivos?

5. Quantas permutações de 10 digitos começam com 987, ou possuem 45 a partir da quinta posição, ou terminam com 123?

6. Quantos elementos estão na união de quatro conjuntos se cada um dos conjuntos possuem 100 elementos, cada par compartilham 50 elementos, cada três compartilham 25 elementos e os quatro compartlham 5 elementos?