

## Princípio da Casa dos Pombos

### 1 Primeiro princípio

**Teorema 1 (Rosen p.244)** *Se  $k+1$  ou mais objetos são colocados em  $k$  caixas, então no mínimo uma caixa conterá dois ou mais objetos.*

#### Prova

Suponha que nenhuma das  $k$  caixas possua mais que 1 objeto. Logo, o total de objetos colocados nas caixas é no máximo  $k$ . Isso é uma contradição, pois foram colocados pelo menos  $k + 1$  objetos.

### 2 Exemplos

**Exemplo 1** *Entre um grupo de 367 pessoas, pelo menos duas possuem o mesmo dia de nascimento, pois existem apenas 366 possibilidades.*

**Exemplo 2** *Em qualquer grupo de 27 palavras inglesas, existem pelo menos duas que comecem com a mesma letra, pois existem 26 letras no alfabeto inglês.*

**Exemplo 3** *Quantos estudantes devem ter numa turma para garantir que pelo menos dois estudantes possuam a mesma nota no exame final, se a nota do exame varia entre 0 e 100 pontos?*

### 3 O princípio da casa dos pombos generalizado

- Entre um conjunto de 21 dígitos decimais quantos são os mesmos?
- Três são os mesmos, pois existem 21 objetos distribuídos entre 10 caixas, portanto uma caixa deve conter mais que 2 objetos.

**Teorema 2 (Rosen p.245)** *Se  $N$  objetos são colocados em  $k$  caixas, então existe no mínimo uma caixa que contém pelo menos  $\lceil N/k \rceil$  objetos.*

## 4 Exercícios

- Mostre que entre um grupo de 5 inteiros (não necessariamente consecutivos) existem dois com o mesmo resto quando divididos por 4.
- Seja  $d$  um inteiro positivo. Mostre que entre qualquer grupo de  $d+1$  inteiros (não necessariamente consecutivos) existem dois com exatamente o mesmo resto quando divididos por  $d$ .
- Entre 100 pessoas, quantas pelo menos nasceram no mesmo mês?
- Qual é o menor número de estudantes que se deve ter em um curso para garantir que pelo menos 6 irão receber a mesma nota, sabendo que as possíveis notas são  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e  $E$ ?